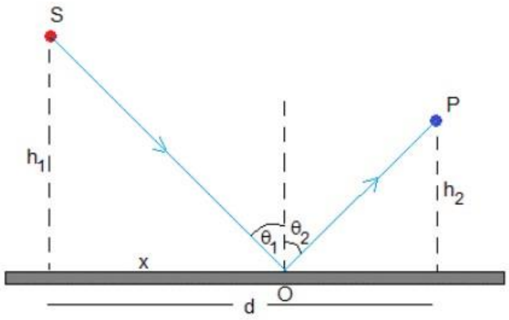
ÓPTICA

GEOMÉTRICA

LEYES DE LA REFLEXION Y DE LA REFRACCION

Ley de la reflexión



Sea una fuente S que emite un rayo que se reflejan en una superficie horizontal reflectante, en O y llega al observador situado en el punto P. La luz se propaga en el mismo medio homogéneo, con velocidad *c*

La longitud del camino seguido por este rayo es SOP y el tiempo que emplea es la suma del tiempo que tarda en recorrer los caminos SO y OP

x es la distancia de S a O, *d-x* es la distancia de P a O. h_1 es la distancia de S al espejo y h_2 es la distancia de P al espejo

$$t=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{c}+\frac{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}{c}$$

Derivamos el tiempo *t* respecto de *x* e igualamos a cero

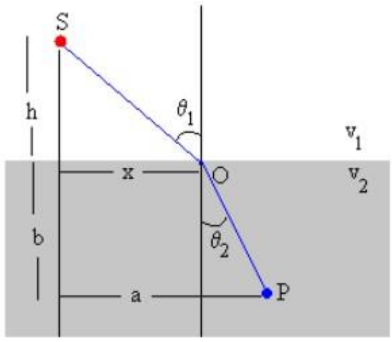
$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{c\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{d-x}{c\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}=0$$

$$\frac{\sin\theta_1}{c}=\frac{\sin\theta_2}{c}$$

$$\theta_1=\theta_2$$

Como vemos en la figura, θ_1 es el ángulo que hace el rayo incidente con la normal al espejo y θ_2 es el ángulo que hace el rayo reflejado

Ley de la refracción



Calculamos el tiempo que tarda un rayo de luz en ir de la fuente S hasta llegar al observador P. El primer tramo SO lo recorre en el primer medio con velocidad v_1 y el segundo tramo OP lo recorre en el segundo medio con una velocidad v_2.

$$t=\frac{SO}{v_1}+\frac{OP}{v_2}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}{v_2}$$

El tiempo *t* es una función de la posición *x* de O. La función *t*(*x*) tendrá un mínimo en la posición *x* en la que se cumple que la derivada primera de *t* respecto de *x* a cero

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{h^2+x^2}}+\frac{-(a-x)}{v_2\sqrt{b^2+(a-x)^2}}=0$$

Esto es equivalente a escribir

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

Se define el índice de refracción *n* de un medio como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío *c* entre la velocidad *v* de propagación de la luz en dicho medio, *n=c/v*.

La ley de Snell de la refracción se escribe: $n_1\cdot\sin\theta_1=n_2\cdot\sin\theta_2$

Reflexión total

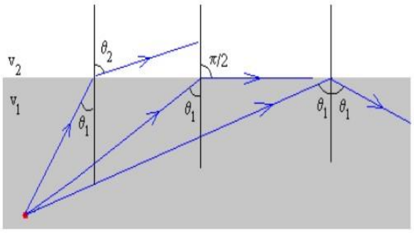
- Si $v_1 > v_2$ el ángulo $\theta_1 > \theta_2$ el rayo refractado se acerca a la normal
- Si $v_1 < v_2$ el ángulo $\theta_1 < \theta_2$ el rayo refractado se aleja de la normal

En este segundo caso, para un ángulo límite θ_c el ángulo de refracción es $\theta_2 = \pi/2$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{v_1}{v_2}$$

El ángulo límite es aquél ángulo incidente para el cual el rayo refractado emerge tangente a la superficie de separación entre los dos medios.

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, el seno del ángulo de refracción resulta mayor que la unidad. Esto indica, que las ondas que inciden con un ángulo mayor que el límite no pasan al segundo medio, sino que son reflejados totalmente en la superficie de separación.



En la figura, observamos que a medida que se incrementa el ángulo de incidencia θ_1 el ángulo de refracción aumenta hasta que se hace igual a $\pi/2$. Si se vuelve a incrementar el ángulo de incidencia, la onda incidente se refleja en el primer medio.

ÓPTICA GEOMÉTRICA. DIOPTRIOS: ESPEJOS Y LENTES

DEFINICIÓN DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

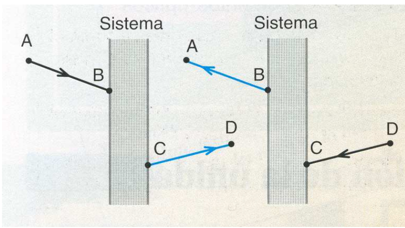
Ciertos fenómenos luminosos, como las interferencias, la difracción o la polarización, sólo pueden ser correctamente interpretados teniendo en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz. El estudio de estos fenómenos es objeto de la **óptica física**.

Otros fenómenos ópticos, en especial los que incluyen la reflexión y la refracción, pueden ser interpretados si consideramos únicamente que la luz está constituida por rayos rectilíneos que proceden de un foco emisor. Mediante la aproximación de rayos, estos fenómenos, tratados geométricamente de una forma simplificada que facilita su interpretación, son objeto de estudio de la **óptica geométrica**.

La óptica geométrica es la parte de la óptica que trata, a partir de representaciones geométricas, de los cambios de dirección que experimentan los rayos luminosos en los distintos fenómenos de reflexión y refracción.

La óptica geométrica parte de los siguientes supuestos:

- La luz se propaga rectilíneamente en los medios homogéneos e isótropos.
- Los rayos luminosos son reversibles; el camino seguido por un rayo es independiente de que se produzca en un determinado sentido o en su contrario.
  Un rayo luminoso que parte de A y llega a B, después de atravesar cierto sistema, emerge en C y llega hasta D. Según el principio de reversibilidad, si el rayo partiera de D en dirección a C, llegaría a A después de emerger del sistema en el punto B.

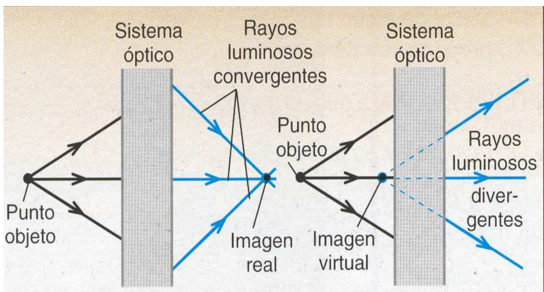


- Se cumplen las leyes de la reflexión y dela refracción.

Con estos sencillos fundamentos podemos determinar el paso de la luz a través de los distintos instrumentos ópticos, como la lupa, el microscopio, el telescopio óptico, etc., y la forma, el tamaño y la posición de las imágenes obtenidas por medio de ellos.

CONCEPTOS BÁSICOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

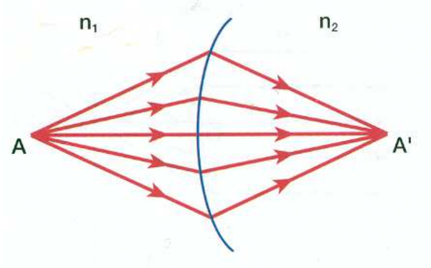
- **Sistema óptico**: es un conjunto de superficies que separan medios transparentes, homogéneos e isótropos de distinto índice de refracción.
- **Imagen real de un punto objeto**: es la imagen formada en un sistema óptico mediante intersección en un punto de los rayos convergentes procedentes del objeto puntual después de atravesar el sistema.
- **Imagen virtual de un punto objeto**: es la imagen formada mediante intersección en un punto de las prolongaciones de los rayos divergentes formados después de atravesar el sistema óptico.



- **Imagen de un objeto extenso**: la imagen de un objeto extenso está formada por las imágenes puntuales de cada uno de los puntos del objeto. Será real o virtual según lo sean todas las imágenes puntuales.
- **Sistema óptico estigmático**: es el sistema óptico en el que a cada punto objeto le corresponde un punto imagen.
  En la práctica, los sistemas ópticos no suelen ser estigmáticos. Los diferentes rayos que provienen del punto objeto no forman un único punto imagen después de atravesar el sistema.

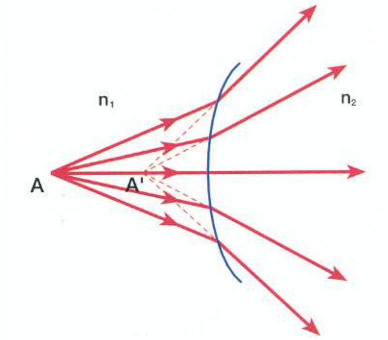
1. DIOPTRIO

Recibe el nombre de dioptrio el conjunto formado por dos medios transparentes, isótropos y homogéneos, separados por una superficie. Si la superficie de separación es plana, se dice que el dioptrio es plano; mientras que si la superficie es esférica, el dioptrio recibe el nombre de esférico.



El punto A' es la imagen real del punto A

El centro de la superficie esférica a la que pertenece el dioptrio esférico se denomina **centro de curvatura, C**, y el radio**, R**, de dicha superficie es el **radio de curvatura** del dioptrio. Si el haz luminoso, en su propagación, encuentra la superficie refringente antes que el centro de curvatura de la misma, el dioptrio recibe el nombre de **convexo** y se habla de **dioptrio cóncavo** en caso contrario. Lógicamente, el radio de curvatura del dioptrio plano es infinito.



El punto A' es la imagen virtual del punto A

El conjunto de varios dioptrios constituye un **sistema óptico**, y el eje común de todos ellos se denomina **eje óptico del sistema**.
Las imágenes producidas por un dioptrio o por un sistema óptico pueden ser reales o virtuales.

- ✓ Si los rayos que proceden de un punto luminoso A, después de atravesar el sistema óptico, convergen en un punto A', este punto es la **imagen real** del objeto A. Las imágenes reales se pueden recoger en una pantalla.

- ✓ Si los rayos procedentes de A, después de atravesar el sistema óptico, salen divergentes, de modo que son sus prolongaciones las que se cortan en un punto A', este punto será la imagen virtual de A. Las imágenes virtual es no existen en realidad, ni tampoco se pueden recoger en una pantalla.

1.1 Convenio de signos

Para estudiar los sistemas ópticos se establece un convenio de signos que permite determinar con precisión los elementos del sistema. Fijemos el convenio de signos a partir del sistema óptico más simple, el dioptrio.

Supongamos una superficie esférica de centro C y radio de curvatura R que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. Consideremos además que el punto objeto P emite un rayo luminoso. Este rayo incidente alcanzará la superficie esférica y se refracta cortando el eje en P'. Para un ángulo α con el eje del dioptrio muy pequeño, lo que corresponde a la **aproximación paraxial**, el sistema es estigmático y al punto P le corresponde un punto imagen P'.

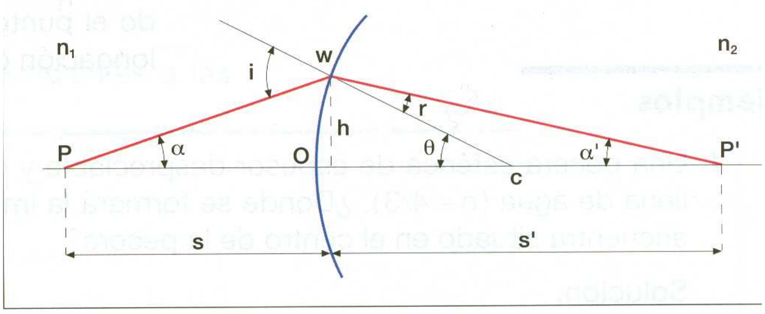
Por convenio se establece que:
- En las figuras, la luz incide de izquierda a derecha.
- El origen de coordenadas O es el polo del dioptrio y el eje OX, el eje óptico.
- Las distancias en la horizontal son positivas para los puntos a la derecha de O y negativas para los puntos a su izquierda.
- Las distancias en la vertical son positivas por encima del eje del dioptrio y negativas por debajo de él.
- Los ángulos de incidencia, reflexión y refracción son positivos si, para que el rayo coincida con la normal a la superficie por el camino más corto, ha de girar en sentido horario. Son negativos en caso contrario.
- Los ángulos formados por los rayos o por la normal con el eje óptico son positivos si, para hacerlos coincidir con el eje por el camino más corto, han de girar en sentido antihorario.

1.2. Dioptrio esférico

Consideremos dos medios transparentes, de índices de refracción n_1 y n_2, separados por una superficie esférica de radio R, y un **punto objeto P**, del cual parten infinitos rayos luminosos; uno de ellos alcanzará la superficie de separación en W, y se refractará, cortando al eje óptico en el **punto imagen P'**. El punto O recibe el nombre de **vértice del dioptrio**.

Un sistema óptico es **estigmático** cuando todos los rayos procedentes de cualquier punto objeto pasan por un punto imagen determinado. En caso contrario, el sistema se denomina **astigmático**. Los puntos objeto e imagen -tales como el P y el P'- se dice que son **conjugados**.

Supondremos que el dioptrio esférico es estigmático y consideraremos solamente rayos paraxiales; es decir, rayos de luz que formen ángulos pequeños con el eje óptico; para estos rayos, los senos y las tangentes de los ángulos se pueden sustituir sin error apreciable por el valor de los propios ángulos expresado en radianes" En estas condiciones, aplicando la ley de Snell de la refracción, tenemos:



$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$$

y si los rayos son paraxiales se cumplirá:

$$n_1 \cdot i = n_2 \cdot r$$

El ángulo i es exterior al triángulo PWC y será igual, por lo tanto, a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes del mismo: $i = \alpha + \theta$.

Del mismo modo, el ángulo θ es exterior al triángulo WCP' y se cumplirá: $\theta = r + \alpha'$ y, por tanto: $r = \theta - \alpha'$.

Sustituyendo los valores de i y r en la expresión correspondiente a la ley de Snell para rayos paraxiales, tenemos: $n_1 \cdot (\alpha + \theta) = n_2 \cdot (\theta - \alpha')$

Además, para los ángulos α, α' y θ se cumple:

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{h}{s} \qquad \alpha' \approx \text{tg } \alpha' = \frac{h}{s'} \qquad \theta \approx \text{tg } \theta = \frac{h}{R}$$

(siendo R = OC el radio del dioptrio), y sustituyendo en la última ecuación se obtiene:

$$n_1 \left(\frac{h}{s} + \frac{h}{R}\right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s'}\right)$$

y simplificando:

$$n_1 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R}\right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'}\right)$$

Esta expresión se puede modificar ligeramente de acuerdo con los criterios de signos antes considerados. Como la distancia objeto, s, está situada a la izquierda del vértice del dioptrio, será negativa y, en consecuencia:

$$n_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s}\right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'}\right)$$

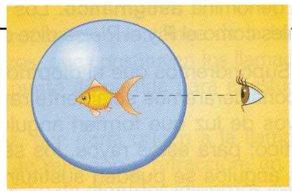
O también:

$$\boxed{\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}}$$

que es la **fórmula fundamental del dioptrio esférico.**

- ✓ Cuando el punto imagen se forma en el medio de índice de refracción distinto a aquel en que se encuentra el punto objeto (s' >O), la imagen es real, formada por los propios rayos luminosos.

- ✓ Si el punto imagen se obtiene en el mismo medio en el que está situado el punto objeto (s'<O), la imagen es virtual, y se forma por la prolongación de los rayos.



EJEMPLO:

Una pecera esférica de espesor despreciable y de 20 cm de radio está llena de agua (n = 4/3). ¿Dónde se formará la imagen de un pez que se encuentra en el centro de la pecera?

Solución:

De acuerdo con la figura, tenemos $n_1 = 4/3$; $n_2 = 1$; R = - 0,2 m; s = - 0,2 m.

Sustituyendo estos datos en la expresión: $\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$, resulta: $\frac{4/3}{-0{,}2} - \frac{n_2}{s'} = \frac{4/3 - 1}{-0{,}2}$, de donde s' = - 0,2 m.

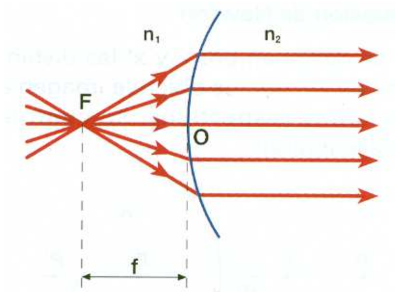
La imagen del pez se forma en el mismo punto en que se encuentra situado: el centro de la pecera.

1.2.1 Focos y distancias focales

En todo dioptrio existen dos puntos característicos que reciben el nombre de focos.

✓ **Foco objeto, F**, es un punto del eje óptico tal que los rayos que parten de él (o cuyas prolongaciones pasan por él) se refractan paralelamente al eje, de modo que su imagen se forma en el infinito ($s' \rightarrow \infty$). La distancia f entre el foco objeto y el vértice del dioptrio se denomina **distancia focal objeto** y se puede obtener aplicando la fórmula fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{f} - \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_1 - n_2}{R} \text{ de donde resulta: } \boxed{f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} \bullet R}$$



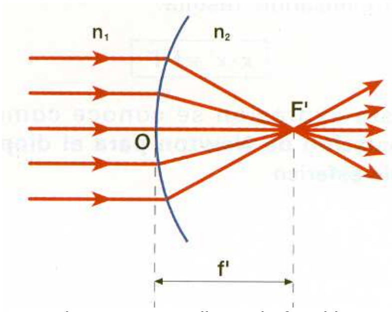
Foco objeto, F, y distancia focal objeto, f.

-Si R>O y $n_2 > n_1$, se obtiene f<0, lo que significa que el foco objeto está a la izquierda del vértice del dioptrio, de modo que los rayos que pasan por F se refractan paralelamente al eje óptico.

-Si R > O y $n_2 < n_1$, se obtiene f > 0: el foco objeto está a la derecha del vértice del dioptrio, de manera que los rayos cuyas prolongaciones pasan por F se refractan paralelamente al eje óptico.

✓ **Foco imagen, F'**, es un punto del eje óptico tal que todos los rayos procedentes de un objeto situado en el infinito ($s \rightarrow -\infty$) y que llegan al dioptrio paralelamente al eje óptico se refractan de modo que ellos o sus prolongaciones pasan por F'. La distancia f ' entre el foco imagen y el vértice del dioptrio se denomina **distancia focal imagen** y se puede obtener a partir de la fórmula fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{\infty} - \frac{n_2}{f'} = \frac{n_1 - n_2}{R} \text{ de donde resulta: } \boxed{f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \bullet R}$$



Foco imagen, F', y distancia focal imagen, f'.

-Si R > 0 y $n_2 > n_1$, se obtiene f' > 0, lo que significa que el foco imagen está a la derecha del vértice del dioptrio, de modo que los rayos paralelos al eje óptico se refractan convergiendo en F'.

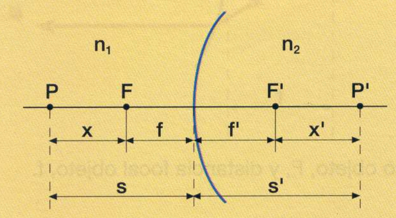
-Si R > 0 y $n_2 < n_1$, se obtiene f' < 0: el foco imagen está a la izquierda del vértice del dioptrio, de manera que los rayos paralelos al eje óptico divergen y sus prolongaciones pasan por F'.

Dividiendo miembro a miembro las expresiones correspondientes a las dos distancias focales, se obtiene:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_2}$$

Ecuación de Newton

Si se designan por x y x′ las distancias de los puntos objeto e imagen a los focos respectivos, se cumple (véase figura):



$$s = x + f$$
$$s' = x' + f'$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general del dioptrio esférico y simplificando, resulta:

$$\boxed{x \cdot x' = f \cdot f'}$$

Esta expresión se conoce como **ecuación de Newton para el dioptrio esférico.**

Los focos objeto e imagen se encuentran uno a cada lado del dioptrio.

Por otra parte, sumando los valores de f y f' resulta:

$$f + f' = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R + \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R = R \qquad \boxed{f + f' = R}$$

Por último, si en la ecuación fundamental del dioptrio esférico se dividen los dos miembros por el segundo, se obtiene:

$$\frac{n_1 \cdot \frac{R}{n_1 - n_2}}{s} - \frac{n_2 \cdot \frac{R}{n_1 - n_2}}{s'} = 1$$

Y considerando los valores de las distancias focales objeto e imagen, resulta finalmente:

$$\boxed{\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1}$$

expresión que se conoce con el nombre de **fórmula general del dioptrio esférico**, también llamada **fórmula de Gauss**.

EJEMPLO:

Un dioptrio esférico cóncavo de 10 cm de radio separa dos medios transparentes de índice de refracción $n_1 = 1$ y $n_2 = 4/3$. Calcular las distancias focales de dicho dioptrio.

Solución:

Como R = -10 cm (dioptrio cóncavo), resulta:

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R = -\frac{1}{4/3 - 1} \cdot (-10\ \text{cm}) = 30\ \text{cm}$$

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R = \frac{4/3}{4/3 - 1} \cdot (-10\ \text{cm}) = -40\ \text{cm}$$

Se puede comprobar que f + f' = R = -10 cm.

1.2.2 Obtención gráfica de las imágenes producidas por un dioptrio

Si se conoce la posición de los focos de un dioptrio y se tiene en cuenta, además, que todo rayo que incide normalmente al dioptrio -pasando por su centro de curvatura- no se refracta, se puede obtener la .imagen de un objeto cualquiera hallando las intersecciones de dos rayos refractados -o prolongaciones de éstos- originados por otros dos procedentes del extremo de dicho objeto, y elegidos entre los tres siguientes:

- ✓ Un rayo paralelo al eje óptico, al refractarse, pasa por el foco imagen.
- ✓ Un rayo que pase por el foco objeto se refracta paralelamente al eje óptico.
- ✓ Un rayo que pase por el centro de curvatura del dioptrio no se desvía.

La imagen obtenida puede ser:

- ✓ Real e invertida, si el objeto está situado a la izquierda de F .
- ✓ Virtual y derecha, si el objeto está entre F y el vértice del dioptrio.

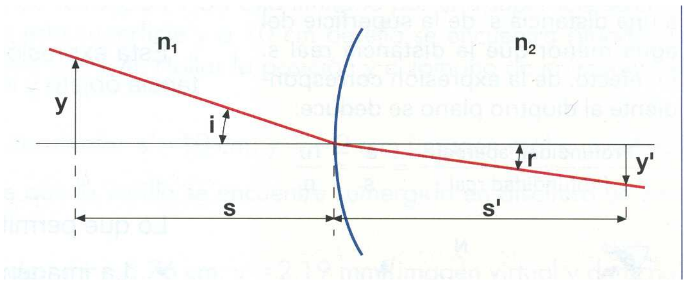
1.2.3 Aumento lateral del dioptrio

Aumento lateral del dioptrio, M_L, es la relación entre el tamaño de la imagen y el del objeto: $M_L = \frac{y'}{y}$

El aumento puede ser positivo o negativo, según que la imagen sea derecha o invertida respecto al objeto. En la figura se observa que:

$$\mathrm{tg}\, i = \frac{y}{-s}$$

$$\mathrm{tg}\, r = \frac{y'}{-s'}$$



Dividiendo ambas expresiones y teniendo en cuenta la ley de Snell para rayos paraxiales:

$$\frac{\mathrm{sen}\, i}{\mathrm{sen}\, r} = \frac{\mathrm{tg}\, i}{\mathrm{tg}\, r} = \frac{y \bullet s'}{y' \bullet s} = \frac{n_2}{n_1}$$

Por tanto, el aumento lateral del dioptrio valdrá:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$$

que, aplicando la relación entre las distancias focales anteriormente considerada, conduce a:

$$\boxed{M_L = -\frac{f \bullet s'}{f' \bullet s}}$$

EJEMPLO

Delante de un dioptrio esférico cóncavo de 20 cm de radio y a 40 cm de distancia de él se encuentra situado un objeto de 5 cm de altura. Los índices de refracción de los dos medios separados por el dioptrio son: $n_1 = 1$ y $n_2 = 1,5$. Hallar la posición y el tamaño de la imagen.

Solución:

Aplicando la fórmula general del dioptrio esférico $\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$ y teniendo en cuenta que: s = - 40 cm y R = -20 cm, tenemos:

$\frac{1}{-40} - \frac{1,5}{s'} = \frac{1-1,5}{-20}$, de donde s' = - 30 cm.

La imagen se encuentra situada delante del dioptrio (s' < 0) y a 30 cm de distancia de él.

Aplicando la fórmula del aumento lateral: $M_L = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$ tenemos:

$\frac{y'}{5\ \mathrm{cm}} = \frac{1 \bullet (-30\ \mathrm{cm})}{1,5 \bullet (-40\ \mathrm{cm})}$ de donde resulta y' = 2,5 cm

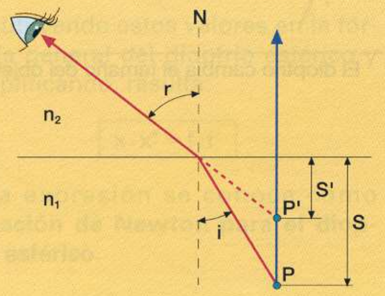
La imagen es directa respecto al objeto y su tamaño es la mitad que el de éste.

1.3 El dioptrio plano

Profundidad aparente de un objeto sumergido

Como el índice de refracción del agua es mayor que el del aire, la profundidad aparente de un objeto sumergido en agua es menor que la profundidad real, pues el observador aprecia la imagen virtual del objeto, a una distancia s´ de la superficie del agua menor que la distancia real s. En efecto, de la expresión correspondiente al dioptrio plano se deduce:

$$\frac{\text{Profundidad aparente}}{\text{Profundidad real}} = \frac{s'}{s} = \frac{n_2}{n}$$



La profundidad aparente s′ del punto objeto sumergido P es menor que la profundidad real s.

El dioptrio plano puede considerarse como un caso particular del dioptrio esférico con radio infinito. Haciendo la sustitución $R \to \infty$ en la fórmula general del dioptrio esférico, se obtiene:

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{\infty} \text{, de donde } \boxed{\frac{n_1}{s} = \frac{n_2}{s'}}$$

Esta expresión nos permite calcular la distancia imagen conociendo la distancia objeto y los índices de refracción de ambos medios. De ella se obtiene:

$$s' = \frac{n_2}{n_1} s$$

Lo que permite extraer las siguientes consecuencias:

- ✓ La imagen que un dioptrio plano produce de un objeto real ($s < 0$) es virtual ($s' < 0$).
- ✓ Si el objeto es virtual ($s > 0$), la imagen que produce un dioptrio plano es real ($s' > 0$).

El aumento lateral del dioptrio plano es:

$$M_L = \frac{n_1 s'}{n_2 s} = 1$$

Por lo tanto, las imágenes producidas en el dioptrio plano para rayos paraxiales son virtuales, derechas y del mismo tamaño que el objeto.

EJEMPLO

Un pescador situado en su barca se encuentra a 2,1 m de altura por encima de la superficie del agua, mientras que un pez nada a 0,5 m debajo de la superficie. El índice de refracción del agua es 4/3.
a) ¿A qué distancia ve el pescador al pez?
b) ¿Y el pez al pescador?

Solución:

a) Según los datos del problema: $s = 0{,}5$ m; $n_1 = 4/3$; $n_2 = 1$.

La profundidad aparente a la que se encuentra el pez es:

$$s' = \frac{n_2}{n_1} s = \frac{1}{4/3} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 0{,}375 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia a la que el pescador ve al pez es: 2,1 m + 0,375 m = 2,475 m

b) En este caso: $s = 2{,}1$ m; $n_1 = 1$; $n_2 = 4/3$.

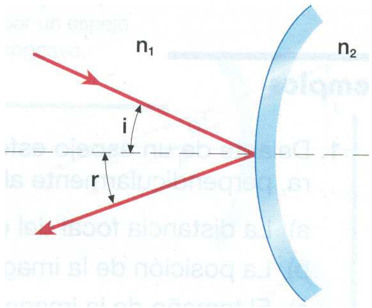
La distancia aparente por encima de la superficie del agua a la que se encuentra el pescador (vista por el pez) es:

$$s' = \frac{n_2}{n_1} s = \frac{4/3}{1} \cdot 2{,}1 \text{ m} = 2{,}8 \text{ m},$$

Por consiguiente, la distancia a la que el pez ve al pescador es: 0,5 m +2,8 m = 3,3 m.

2 ESPEJOS

Un espejo es toda superficie pulimentada capaz de reflejar la luz. Según la forma de dicha superficie, los espejos pueden ser planos, esféricos, parabólicos, etc.



De acuerdo con el criterio de signos para los ángulos, en el caso de la figura la ley de la reflexión se escribiría de la forma:

$$i = -r$$

y se puede considerar como un caso particular de la refracción y aplicar, por consiguiente, la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}(-i)} = \frac{\operatorname{sen} i}{-\operatorname{sen} i} = \frac{n_2}{n_1} = -1$$

es decir: $n_2 = -n_1$, ya que la luz al reflejarse cambia de sentido, pero no de medio.

2.1 Espejos esféricos

La ecuación fundamental del dioptrio esférico es válida para los espejos esféricos teniendo en cuenta que $n_2 = -n_1$. Se obtiene así:

$$\frac{n_1}{s} - \frac{-n_1}{s'} = \frac{n_1 - (-n_1)}{R}$$

Es decir:

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}}$$

siendo s y s' las distancias objeto e imagen y R el radio de curvatura del espejo.

NOTA: Espejos esféricos cóncavos y convexos

Los espejos esféricos pueden ser convexos y cóncavos, según que la superficie pulimentada reflectante sea la exterior o la interior, respectivamente. De acuerdo con el criterio de signos admitido:

- ✓ Para los espejos convexos: $R > 0$
- ✓ Para los espejos cóncavos: $R < 0$.

Las distancias focales objeto e imagen (f y f') se obtienen a partir de la expresión anterior haciendo $s' \to \infty$ y $s \to \infty$, respectivamente. Resulta:

$$f = f' = \frac{R}{2}$$

En los espejos esféricos las distancias focales objeto e imagen son iguales; por ello, en la práctica sólo se considera una distancia focal, cuyo valor es igual a la mitad del radio de curvatura del espejo. Es decir, en los espejos esféricos existe un solo foco, situado en el punto medio del segmento que une el vértice con el centro de curvatura.

Teniendo en cuenta este valor de la distancia focal, la ecuación fundamental de los espejos esféricos se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}}$$

El aumento lateral de los espejos esféricos se puede obtener a partir de la expresión correspondiente a los dioptrios esféricos: $M_L = -\frac{f \cdot s'}{f' \cdot s}$, teniendo en cuenta que f y f' son iguales. Resulta así:

$$\boxed{M_L = -\frac{s'}{s}}$$

EJEMPLO

Delante de un espejo esférico convexo de 50 cm de radio de curvatura se sitúa un objeto de 4 cm de altura, perpendicularmente al eje óptico del espejo ya 75 cm de distancia de su vértice. Calcular:
a) La distancia focal del espejo.
b) La posición de la imagen.
c) El tamaño de la imagen.

Solución:

a) La distancia focal es igual a la mitad del radio de curvatura del espejo. Como éste es positivo por tratarse de un espejo convexo, resulta:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{50\ \text{cm}}{2} = 25\text{cm}$$

b) Aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos, tenemos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}; \qquad \frac{1}{-75\ \text{cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{25\ \text{cm}}; \quad s' = 18{,}75\ \text{cm}$$

La imagen se forma al otro lado del espejo: se trata de una imagen virtual.

c) Aplicando la fórmula del aumento lateral: $M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$ tenemos:

$$\frac{y'}{4\ \text{cm}} = -\frac{18{,}75\ \text{cm}}{-75\ \text{cm}}$$, de donde resulta: y' = 1 cm

La imagen es directa respecto al objeto y de menor tamaño que éste.

2.1.1 Espejos esféricos convexos

La superficie reflectante de estos espejos es la exterior, lo que implica, suponiendo que la luz se propaga de izquierda a derecha, que el radio de curvatura sea positivo (R > 0) y que el foco se encuentre situado a la derecha del vértice.

De la ecuación fundamental de los espejos esféricos $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$ se deduce:

$$s' = \frac{R \bullet s}{2s - R}$$

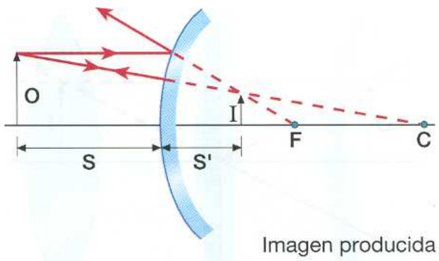


Imagen producida por un espejo convexo.

Por lo tanto, como los objetos se sitúan normalmente a la izquierda del espejo (s < 0), la distancia imagen s' será positiva; es decir, se obtiene una imagen virtual (formada por las prolongaciones de los rayos reflejados). Por otra parte, el aumento lateral valdrá:

$$M_L = -\frac{s'}{s} = -\frac{Rs}{s(2s - R)} = -\frac{R}{2s - R} \qquad (0 < M_L < 1)$$

Las imágenes producidas por los espejos convexos son siempre virtuales, directas y de menor tamaño que el objeto.

Utilidad de los espejos convexos

Como las imágenes producidas por los espejos convexos son virtuales, directas y de menor tamaño, estos espejos poseen un campo de visión muy amplio, por lo que se emplean como espejos retrovisores de automóviles, así como en cruces de calles, grandes almacenes, etc.

La obtención gráfica de estas imágenes se lleva a cabo hallando la intersección de las prolongaciones de dos rayos procedentes del extremo del objeto y reflejados en el espejo, y elegidos teniendo en cuenta que:

- ✓ Un rayo paralelo al eje óptico se refleja de manera que su prolongación pasa por el foco.
- ✓ Un rayo que incida perpendicularmente al espejo dirigiéndose hacia el centro de curvatura se refleja sin desviarse.
- ✓ Un rayo que se dirija hacia el foco se refleja paralelamente al eje óptico.

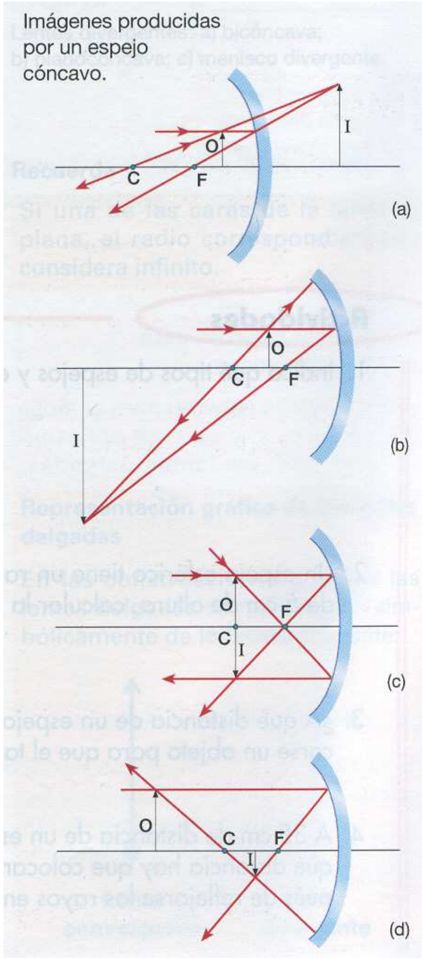
<u>2.1.2. Espejos esféricos cóncavos</u>

En estos espejos la superficie reflectante es la interior; por lo tanto, el radio de curvatura será negativo (R < 0), y el foco estará situado a la izquierda del vértice del espejo. Las imágenes producidas por los espejos cóncavos se obtienen gráficamente de una manera análoga alas de los espejos convexos. Conviene tener presente que en este caso:

- ✓ Un rayo paralelo al eje óptico se refleja pasando por el foco.
- ✓ Un rayo que incida perpendicularmente al espejo pasando por el centro de curvatura se refleja sin desviarse.
- ✓ Un rayo que pasa por el foco se refleja paralelamente al eje óptico.

Según la posición del objeto, siempre a la izquierda del espejo (s < 0), pueden presentarse los cuatro casos siguientes:

- ✓ Si el objeto está situado entre el foco y el espejo, la imagen es virtual (s' > 0), derecha y de mayor tamaño que el objeto (M_L>O) (Fig. a).
- ✓ Si el objeto está entre el foco y el centro de curvatura, la imagen es real (s' < 0) invertida y de mayor tamaño que el objeto (M_L < -1} (Fig. b).
- ✓ Si el objeto está en el centro de curvatura (s = -R), la imagen es real, está situada en la misma posición que el objeto y es del mismo tamaño que éste, pero invertida (M_L= -1) (Fig. c).
- ✓ Si el objeto está más lejos del espejo que el centro de curvatura, la imagen es real (s' < 0), invertida y de menor tamaño que el objeto (0>M_L> -1) (Fig. d).



Imágenes producidas por un espejo cóncavo.

2.2 <u>Espejos planos</u>

Los espejos planos pueden considerarse como un caso particular de los espejos esféricos de radio infinito. Teniendo en cuenta esta condición:, la ecuación: $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$, se convierte en: $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=0$. Es decir:

$$\boxed{s = -s'}$$ (imagen virtual)

El aumento lateral de los espejos planos es: $M_L = \frac{s'}{-s} = 1$

La imagen producida por un espejo plano es virtual, dista del espejo lo mismo que el objeto, tiene su mismo tamaño y es directa.

EJEMPLO

Un objeto de 5 cm de altura se coloca delante de un espejo plano y a 60 cm de distancia de él.
a) ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?
b) ¿Cuál es el tamaño de la imagen?

<u>Solución:</u>

a) Como s = - 60 cm, resulta: s' = -s = -(-60 cm) =60 cm. b) y' = y = 5 cm.

3 LENTES

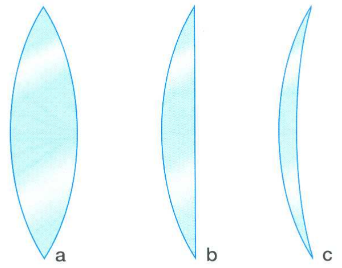
Una lente es un sistema óptico formado por dos dioptrios, de los que uno, al menos, suele ser esférico.

Si su espesor es pequeño comparado con los radios de curvatura, se denomina **lente delgada**, recibiendo el nombre de **lente gruesa** en caso contrario.

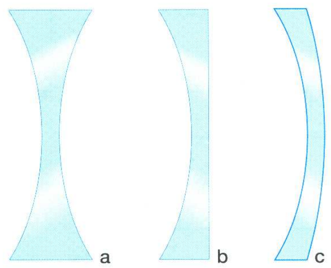
Eje principal de la lente es la recta que une los centros de curvatura de los dos dioptrios que la constituyen.

Las lentes pueden ser convergentes y divergentes.

- ✓ **Lentes convergentes**: un haz de rayos luminosos paralelos, después de atravesarlas, converge para formar una imagen real. Son más anchas por el centro que por los extremos y pueden ser biconvexas, planoconvexas y menisco convergentes.
- ✓ **Lentes divergentes**: un haz de rayos luminosos paralelos, después de atravesarlas, diverge para formar una imagen virtual. Son más anchas por los extremos que por el centro y pueden ser bicóncavas, planocóncavas y menisco divergentes.

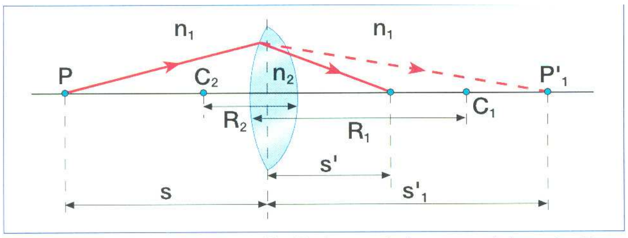


Lentes convergentes: a) biconvexa; b) plano convexa; c) menisco convergente



Lentes divergentes: a) bicóncava; b) planocóncava; c) menisco divergente

3.1 Ecuación fundamental de las lentes delgadas.



El primer dioptrio, de radio R₁ forma la imagen del punto P en P₁' y este punto sirve de objeto para el segundo dioptrio, de radio R₂, que forma su imagen en P'.

Supongamos una lente delgada biconvexa constituida por dos dioptrios de radios de curvatura $R_1>0$ y $R_2<0$. Designemos por n_2 el índice de refracción de la lente, la cual se encuentra en el interior de un medio de índice de refracción n_1. El proceso total de formación de imágenes se puede analizar considerando que la imagen que forma el primer dioptrio sirve de objeto para el segundo. Aplicando a cada uno de ellos la fórmula fundamental obtenida en el apartado 1.1, se tiene:

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s_1'} = \frac{n_1 - n_2}{R_1} \qquad \frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_1}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R_2}$$

y sumando ambas ecuaciones resulta finalmente:

$$\boxed{\frac{n_1}{s} - \frac{n_1}{s'} = (n_1 - n_2)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)}$$

que es la llamada **ecuación fundamental de las lentes delgadas**.

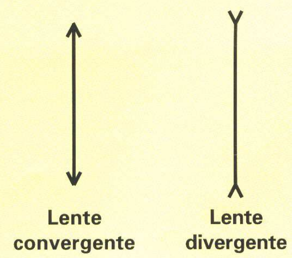
En el caso particular -y sumamente frecuente- de que la lente se encuentre en el aire ($n_1 = 1$), la ecuación anterior se convierte en:

$$\boxed{\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1 - n)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)}$$

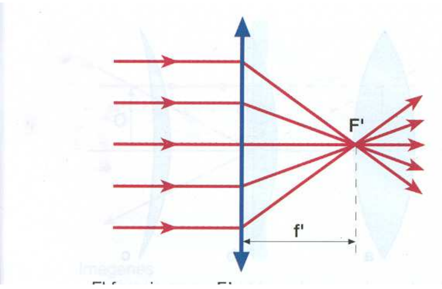
siendo n el índice de refracción de la lente.

Representación gráfica de las lentes delgadas

En las construcciones gráficas las lentes delgadas se representan simbólicamente de la forma siguiente:



3.2 Focos y distancias focales



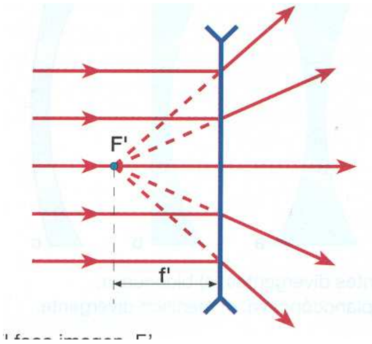
El foco imagen, F', de una lente convergente es un foco real (f' > 0)

La imagen de un punto situado en el infinito ($s \to \infty$) se forma en el **foco imagen** de la lente, **F'**, situado a una distancia **f'** de ésta que recibe el nombre de **distancia focal imagen**, y cuyo valor se obtiene inmediatamente a partir de la ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)$$

Análogamente, el **foco objeto** de la lente, **F**, corresponde a un punto tal que si en él se sitúa un objeto, su imagen se forma en el infinito ($s' \to \infty$). La distancia focal objeto, **f**, valdrá:

$$\frac{1}{f} = (1-n)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)$$



El foco imagen, F', de una lente convergente es un foco real (f' > 0)

Comparando las expresiones correspondientes a las dos distancias focales se aprecia que ambas son iguales y de signo contrario:

$$\boxed{f = -f'}$$

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, la ecuación fundamental de las lentes delgadas se puede escribir así:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{-1}{f'}$$

O también:

$$\boxed{\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1}$$

que coincide con la fórmula general del dioptrio esférico.

3.3 Aumento lateral

El aumento lateral de una lente delgada es igual al producto de los aumentos laterales de los dos dioptrios que la componen, y que son respectivamente:

$$M_{L,1} = \frac{y_1'}{y} = \frac{n_1 s_1'}{n_2 s} \qquad M_{L,2} = \frac{y'}{y_1'} = \frac{n_2 s'}{n_1 s_1'}$$

Por tanto, el aumento lateral de la lente será:

$$M_L = \frac{y'}{y} = M_{L,1} \cdot M_{L,2} = \frac{n_1 s_1'}{n_2 s} \cdot \frac{n_2 s'}{n_1 s_1'} = \frac{s'}{s}$$

3.4 Potencia de una lente

Potencia o **convergencia** de una lente, **C**, es la inversa de su distancia focal imagen:

$$C = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)$$

Si la distancia focal imagen se mide en metros, la potencia o convergencia se expresan en **dioptrías**. El signo de la potencia es el mismo que el de la distancia focal imagen; por tanto, la potencia de las lentes convergentes (f' > 0) es positiva y la de las divergentes (f' < 0), negativa.

EJEMPLOS

1. Un objeto de 5 cm de altura está situado a 60 cm de distancia de una lente convergente de 40 cm de distancia focal. Calcular:
a) potencia de la lente;
b) posición de la imagen;
c) tamaño de la imagen.

Solución:

a) La potencia de la lente es: C = 1 / f' = 2,5 dioptrías.

b) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas: $\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{-1}{f'}$ y teniendo en cuenta que en este caso: s = -60 cm y f = -40 cm, resulta:

$$\frac{1}{-60\,\text{cm}} - \frac{1}{s'} = \frac{-1}{-40\,\text{cm}}$$, de donde s' = 120 cm

c) De acuerdo con la fórmula del aumento lateral de la lente: $M_L = y'/y = s'/s$ se puede escribir:

$$\frac{y'}{5\,\text{cm}} = \frac{120\,\text{cm}}{-60\,\text{cm}}$$ de donde y' = -10 cm

Por lo tanto, la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

2. La potencia de una lente es de 5 dioptrías.
a) Si a 10 cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.
b) Si dicha lente es de vidrio (n = 1,5) y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra?

Solución:

a) Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas: $\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{-1}{f'} = -C$, tenemos:

$$\frac{1}{-0{,}1\,\text{m}} - \frac{1}{s'} = -5 \text{ dioptrias}$$, de donde resulta: s' = -0,2 m

La fórmula del aumento lateral permite escribir: $\frac{y'}{2\,\text{mm}} = \frac{-20\,\text{cm}}{-10\,\text{cm}}$ obteniéndose: y' = 4 mm.
La imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

b) Aplicando la expresión correspondiente a la potencia de la lente:

$C = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(1/R_1 - 1/R_2\right)$ y sustituyendo los datos numéricos del enunciado del problema, tenemos:

5 dioptrías =(1,5 -1)(1/ 0,1 – 1/R_2), de donde resulta: $R_2 \rightarrow \infty$. Se trata, por consiguiente, de una lente planoconvexa.

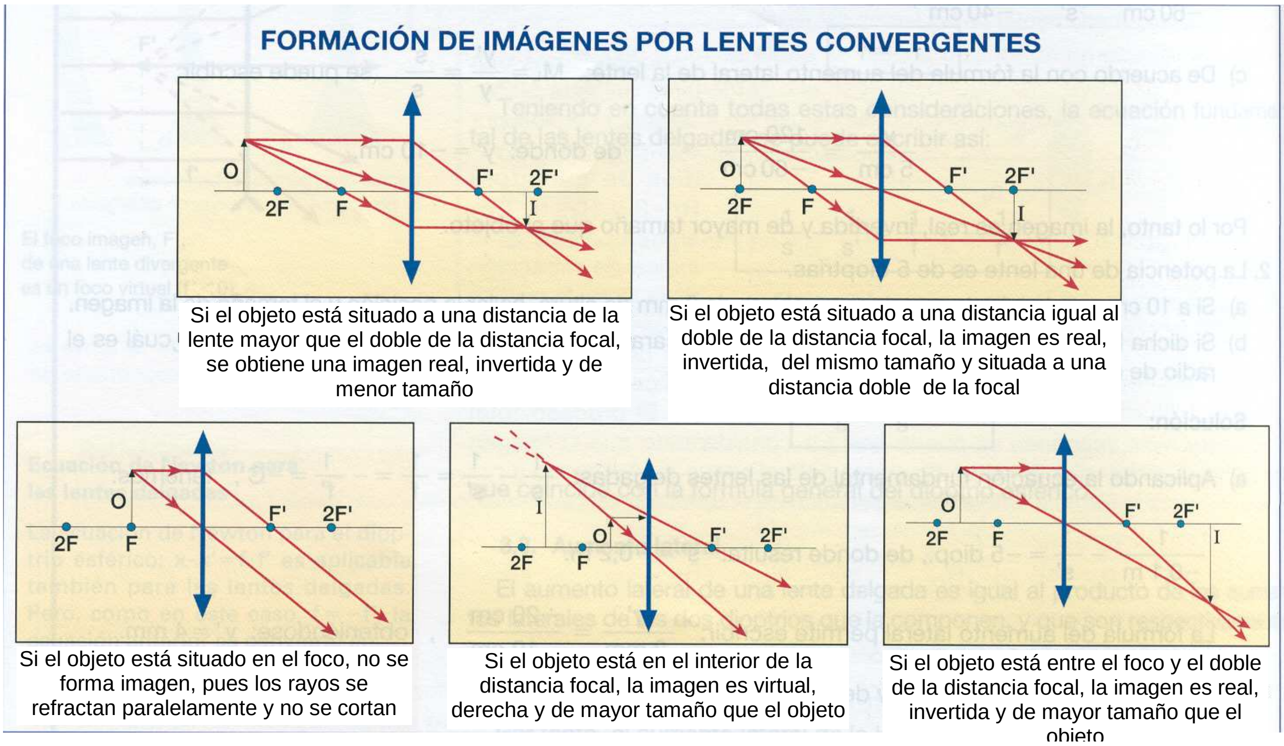
3.5 Obtención gráfica de las imágenes producidas por una lente delgada

En el eje óptico de las lentes gruesas existen dos puntos conjugados, N y N', que reciben el nombre de nodos y que poseen la propiedad de que todo rayo incidente que pase por el primero de ellos origina un rayo refractado paralelo a él y que pasa por el segundo. En el caso de las lentes delgadas puede considerarse que los dos nodos se confunden en un solo punto, llamado **centro óptico**, tal que todo rayo que pase por él no experimenta desviación alguna.

Para la construcción gráfica de las imágenes producidas por una lente delgada, basta trazar dos rayos cuya trayectoria se conozca y hallar el punto de intersección de ellos o de sus prolongaciones. Los rayos se eligen entre los tres siguientes:

- ✓ Un rayo paralelo al eje óptico se refracta pasando por el foco imagen.
- ✓ Un rayo que pase por el foco objeto se refracta paralelamente al eje óptico.
- ✓ Un rayo que pase por el centro óptico de la lente no experimenta desviación.

A continuación se muestran los distintos casos que se pueden presentar en la práctica cuando se utiliza una lente convergente.



FORMACIÓN DE IMÁGENES POR LENTES CONVERGENTES

Si el objeto está situado a una distancia de la lente mayor que el doble de la distancia focal, se obtiene una imagen real, invertida y de menor tamaño

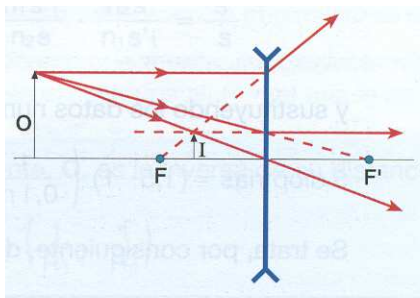
Si el objeto está situado a una distancia igual al doble de la distancia focal, la imagen es real, invertida, del mismo tamaño y situada a una distancia doble de la focal

Si el objeto está situado en el foco, no se forma imagen, pues los rayos se refractan paralelamente y no se cortan

Si el objeto está en el interior de la distancia focal, la imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto

Si el objeto está entre el foco y el doble de la distancia focal, la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto

Las imágenes son siempre reales, salvo cuando el objeto está situado en el interior de la distancia focal. Por el contrario, las lentes divergentes siempre dan origen a imágenes virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.



Una lente divergente siempre forma una imagen virtual, derecha y de menor tamaño.

4 ABERRACIONES DE LAS LENTES

Las ecuaciones que se han deducido para las lentes son aplicables para rayos paraxiales, lentes delgadas y luz monocromática. Como estas condiciones no se suelen cumplir en la práctica, las imágenes siempre presentan una serie de defectos, que se conocen con el nombre de aberraciones.

Aberraciones son las discrepancias existentes entre la imagen real y la predicha por la teoría sencilla.

Las aberraciones pueden ser:

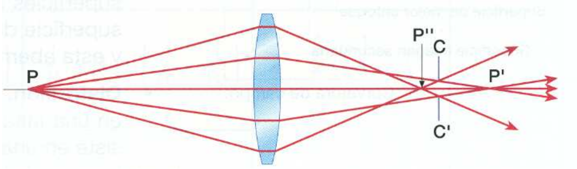
- ✓ **Geométricas**, que se deben a que los rayos luminosos procedentes de un punto, tras atravesar la lente, no se reúnen en otro punto para formar la imagen.
- ✓ **Cromáticas**, si son producidas por la variación del índice de refracción de la lente con la longitud de onda de la luz.

Las aberraciones de las lentes no se deben a defectos de construcción de las mismas, sino que son consecuencia de las leyes de la refracción.

4.1 Aberraciones geométricas

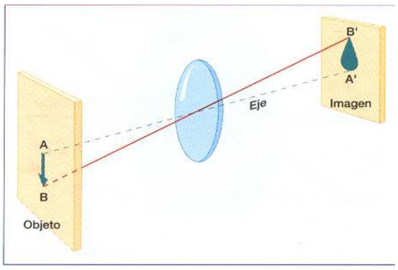
Se pueden mencionar las siguientes:

- ✓ **Aberración esférica**. Se origina al refractarse la luz cuando el ángulo de incidencia es grande. Los rayos más próximos al eje óptico de la lente dan lugar a una imagen (punto P') más alejada que aquellos que inciden próximos a sus bordes (punto P''). De esta manera no se producen imágenes nítidas, pues si se coloca, por ejemplo, una pantalla perpendicular al eje en P', la imagen proyectada consiste en un disco circular cuyo contorno es la intersección con la pantalla del cono exterior de rayos refractados por la lente. El haz refractado tiene en todas partes sección circular, y se puede observar en la figura que existe un plano CC' en el que la sección transversal del haz es mínima: esta sección transversal se denomina círculo de máxima nitidez, y si se coloca la pantalla en esta posición la imagen obtenida es la más perfecta posible.

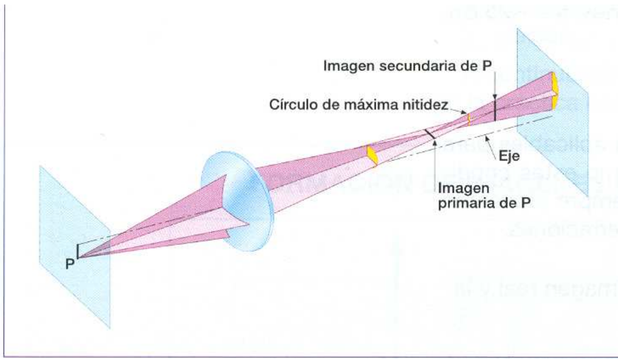


  Para corregir la aberración esférica se utilizan diafragmas que detienen los rayos alejados del eje, aunque esto se traduce en una disminución de la iluminación. También se pueden utilizar lentes que no sean rigurosamente esféricas, sino que posean mayor curvatura en el centro que en los bordes. Y, de manera especial, empleando combinaciones adecuadas de lentes.

- ✓ **Coma**. Los rayos que atraviesan una lente procedentes de un punto situado fuera del eje dan lugar a un tipo de aberración similar a la esférica, con la diferencia de que en este caso la sección transversal del haz refractado no es circular, sino alargada en forma de cometa (de ahí la denominación de coma).
  La coma puede evitarse interponiendo un diafragma que elimine los rayos no paraxiales.

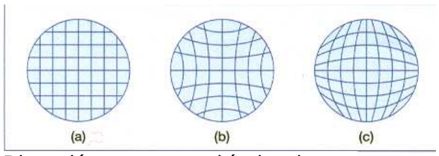


- ✓ **Astigmatismo y curvatura de campo**. Estas dos aberraciones se consideran conjuntamente, puesto que constituyen dos aspectos inseparables de un mismo fenómeno.El astigmatismo trae como consecuencia que la Imagen de un punto P no es un solo punto, sino dos rectas perpendiculares entre sí: una horizontal -imagen primaria- y otra vertical -imagen secundaria-. El haz refractado posee una sección elíptica, que degenera en dos segmentos rectilíneos en las imágenes primaria y secundaria y en un círculo -círculo de máxima nitidez- en una zona situada entre ellas. El



astigmatismo consiste precisamente en la falta de coincidencia de las imágenes primaria y secundaria.
La causa del astigmatismo hay que buscarla en que la lente posee distinta curvatura en los diferentes planos axiales; su corrección se lleva acabo combinando lentes esféricas y cilíndricas. Pero incluso si las superficies de la lente son perfectamente esféricas se produce astigmatismo cuando el punto objeto se encuentra situado lejos del eje óptico de la lente; en este caso se corrige combinando lentes de diferentes tipos de vidrio.
Si se consideran todos los puntos de un objeto plano, sus imágenes primarias estarán situadas sobre una superficie de revolución alrededor del eje óptico de la lente denominada superficie imagen primaria; y del mismo modo, las imágenes secundarias dan lugar a la superficie imagen secundaria. Asimismo, el lugar geométrico de los círculos de máxima nitidez es la llamada superficie de mejor enfoque. Todas estas superficies son tangentes entre sí en el eje de la lente. En general, la superficie de mejor enfoque no es un plano, sino una superficie curva, y esta aberración se conoce como curvatura de campo.

✓ **Distorsión.** A diferencia de las anteriores, esta aberración no se refleja en una falta de nitidez o en imprecisiones de la imagen, sino que consiste en una variación del aumento con la distancia de los puntos objeto al eje óptico de la lente, lo que da lugar a que las rectas que no cortan a dicho eje tengan una imagen curva. Según que el aumento crezca o disminuya al aumentar la distancia al eje, se habla de *distorsión en corsé* o *distorsión en tonel*.



Distorsión en una cuadrícula: a) en corsé; b) en tonel.

Si bien una ligera distorsión resulta perfectamente admisible si se trata de un instrumento para uso visual, en el caso de los objetivos fotográficos utilizados en fotogrametría aérea conviene reducirla al máximo para lograr la exactitud requerida.

4.2 Aberraciones cromáticas

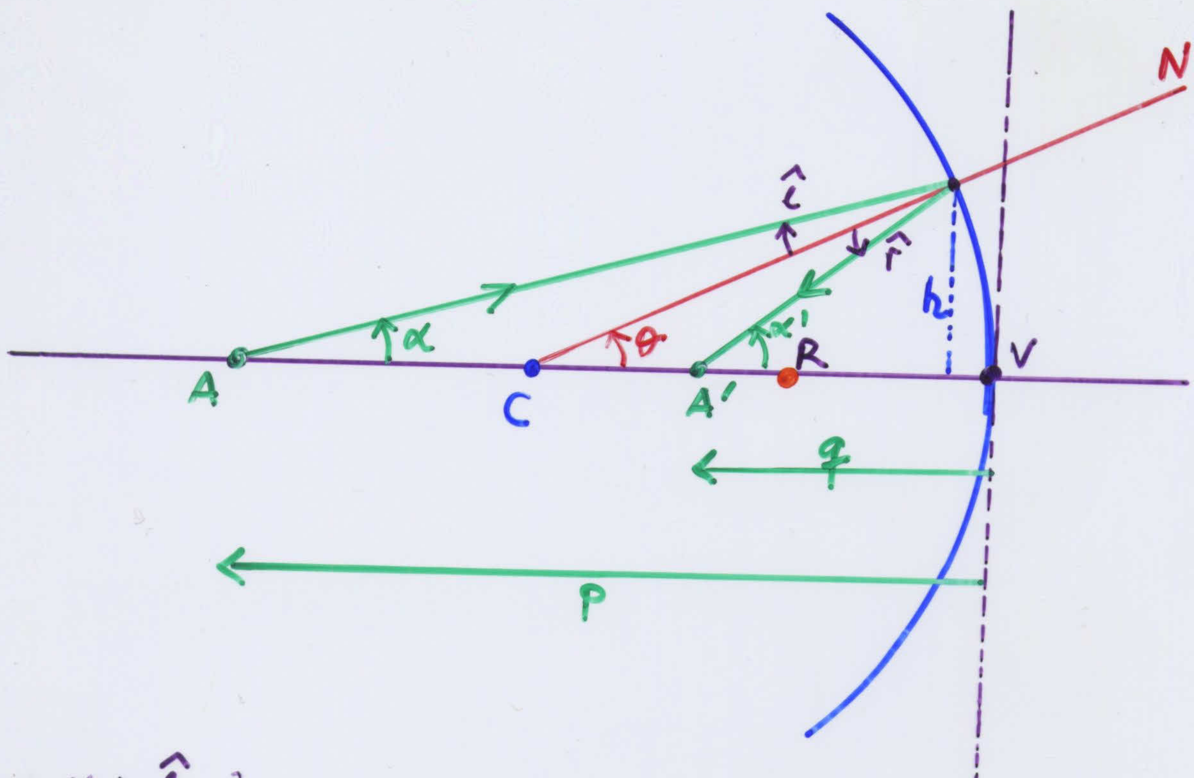
Son defectos que surgen como consecuencia de la dispersión producida por las sustancias que constituyen las lentes. El índice de refracción varía para cada rayo de luz en función de su longitud de onda; por tanto, la distancia focal será diferente para los diversos colores. En consecuencia, una lente única no forma simplemente una imagen de un objeto, sino una serie de imágenes a distintas distancias de la lente, una para cada color presente en la luz incidente. Además, como el aumento depende de la distancia focal, estas imágenes son de diferente tamaño. La variación de la distancia imagen con el índice de refracción se conoce como aberración cromática longitudinal o axial, y la variación de tamaño de la imagen recibe el nombre de aberración cromática lateral.

La aberración cromática puede corregirse mediante un doblete acromátíco, consistente en dos lentes delgadas de distinto poder dispersivo puestas en contacto, una convergente y otra divergente, de manera que sus aberraciones cromáticas se compensen entre sí.

RESUMEN DE LAS RELACIONES MÁS IMPORTANTES DE DIOPTRIOS, ESPEJOS Y LENTES

	Fórmula fundamental	Foco objeto	Foco imagen	Fórmula general	Aumento lateral
Dioptrios esféricos	$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$	$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R$	$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R$	$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$	$M_L = -\frac{f \cdot s'}{f' \cdot s}$
		$f + f' = R$			
Dioptrios planos	$\frac{n_1}{s} = \frac{n_2}{s'}$	$f \to \infty$	$f' \to \infty$		$M_L = 1$
Espejos esféricos	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$	$f = \frac{R}{2}$	$f' = \frac{R}{2}$	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$	$M_L = -\frac{s'}{s}$
		$f = f'$			
Espejos planos	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0$	$f \to \infty$	$f' \to \infty$	$s' = -s$	$M_L = 1$
Lentes	$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{f} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'}$ $\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$	$M_L = \frac{s'}{s}$
		$f = -f'$			

ESPEJO ESFÉRICO

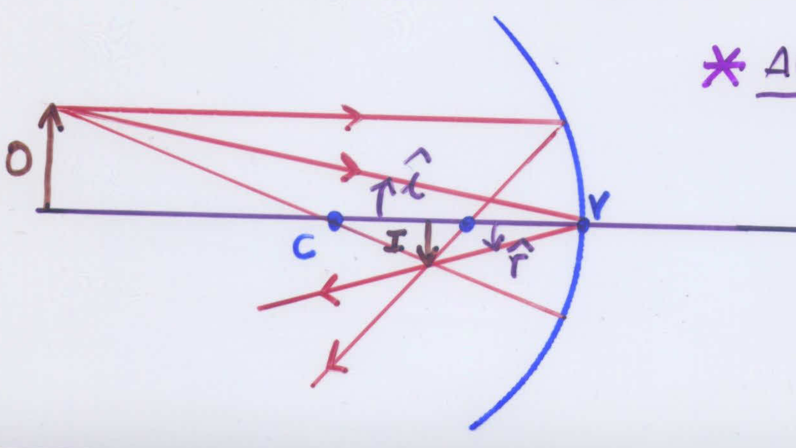


$$\left.\begin{array}{l}\theta = \alpha + \hat{i} \\ \alpha' = \theta + \hat{r}\end{array}\right\} \quad \alpha + \alpha' = 2\theta \quad (\hat{i} = \hat{r})$$

Ya que suponemos rayos paraxiales

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha = \dfrac{h}{p} & \\ & \theta = \dfrac{h}{R} \\ \alpha' = \dfrac{h}{q} & \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}}$$

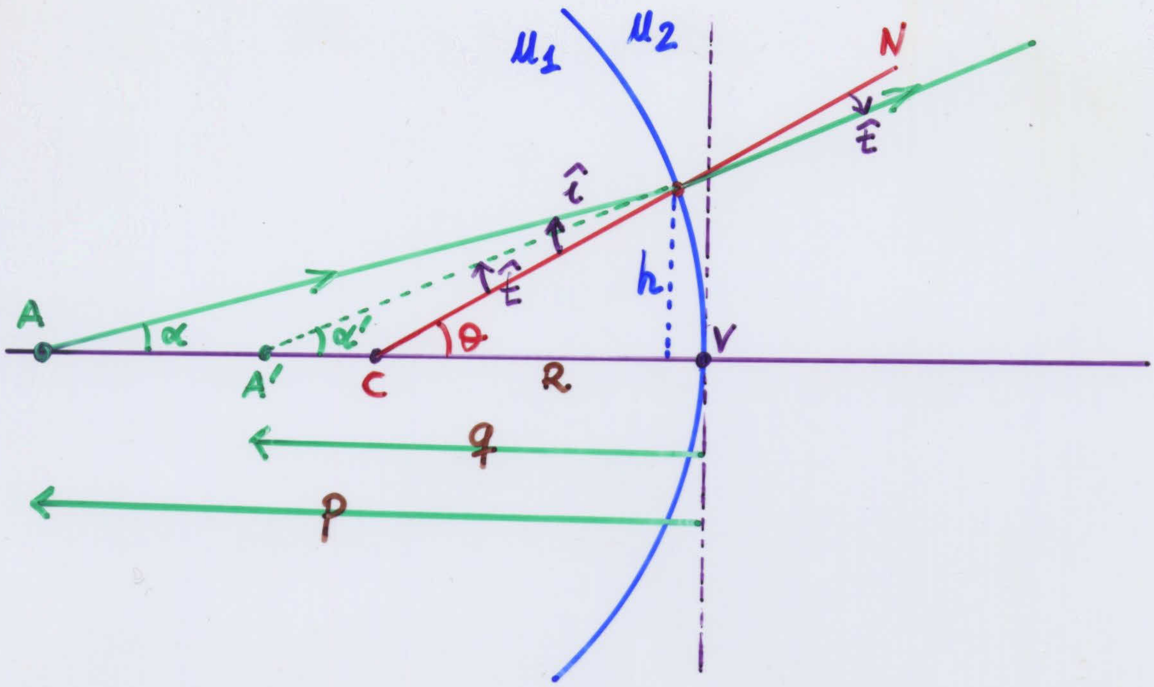
* FOCO : $p \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{q_\infty} = \dfrac{2}{R} \Rightarrow \boxed{f_o = f_i = \dfrac{R}{2}}$



* AUMENTO LINEAL $\quad m = \dfrac{I}{O}$

$$\left[m = \frac{-q \operatorname{tg} \hat{r}}{p \operatorname{tg} \hat{i}} = -\frac{q}{p} \right]$$

DIOPTRIO ESFÉRICO



Ley de Snell para rayos paraxiales

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{t} \Rightarrow n_1 \cdot \hat{i} = n_2 \cdot \hat{t}$$

De la figura

$$\hat{i} = \theta - \alpha \qquad \text{con} \qquad \alpha \simeq \frac{h}{p} \qquad \text{y} \qquad \theta \simeq \frac{h}{R}$$

$$\hat{t} = \theta - \alpha' \qquad \qquad \alpha' \simeq \frac{h}{q}$$

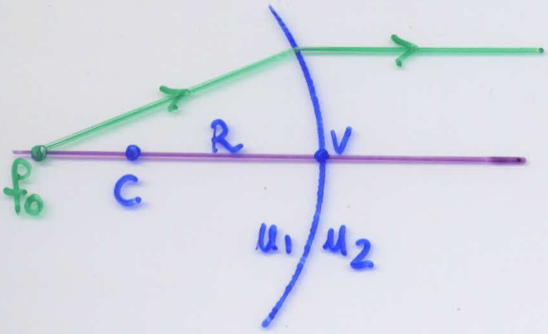
de lo que se deduce que :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R}}$$

ECUACIÓN DEL DIOPTRIO ESFÉRICO

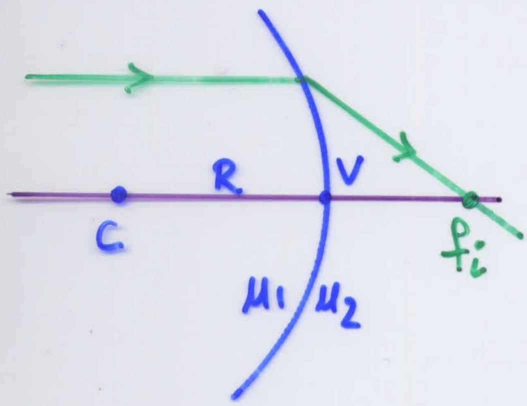
MAS SOBRE EL DIOPTRIO ESFERICO...

FOCO OBJETO (PRIMER PUNTO FOCAL)



$$f_o = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot R \begin{cases} < 0 & \text{CONVERG.} \\ > 0 & \text{DIVERGE.} \end{cases}$$

FOCO IMAGEN (SEGUNDO PUNTO FOCAL)



$$f_i = -\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} R$$

FORMULA DEL DIOPTRIO EN FUNCION DE LOS FOCOS

$$\frac{\mu_1}{p} - \frac{\mu_2}{q} = \frac{\mu_1}{f_o} = -\frac{\mu_2}{f_i}$$

OTRAS PROPIEDADES:

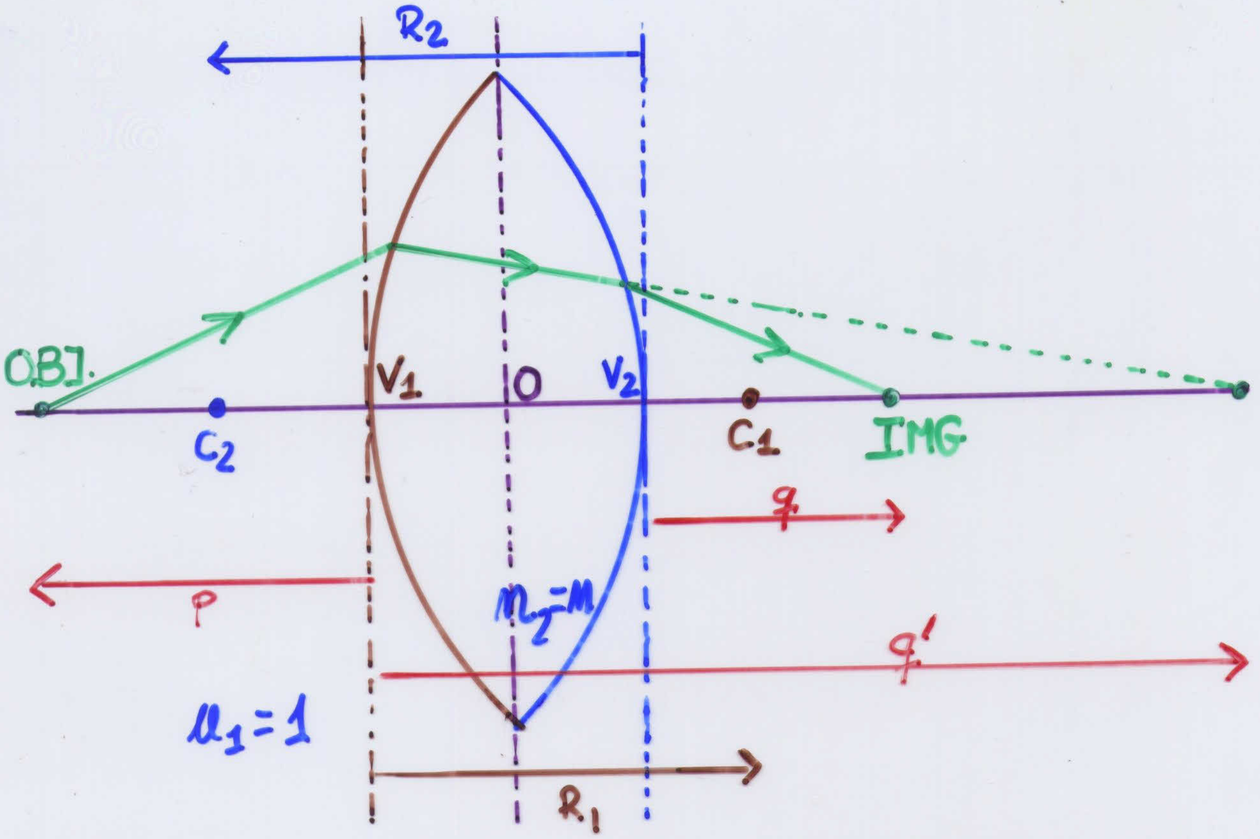
1- $\frac{f_o}{f_i} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \Rightarrow$ f_o y f_i están a ambos lados del vértice V del dioptrio

2- $f_i + f_o = R$

3- $\frac{f_o}{p} + \frac{f_i}{q} = 1$

4- $f_o \cdot f_i = x \cdot x'$ (Fórmula de Newton)

LENTES DELGADAS



1^{er} DIOPTRIO : $\dfrac{1}{p} - \dfrac{n}{q'} = \dfrac{1-n}{R_1}$

2^{o} DIOPTRIO : $\dfrac{n}{q'+t} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{n-1}{R_2}$ con $|t| = \overline{V_1V_2}$

Lente delgada $\Rightarrow$ t despreciable frente a q'

$$\boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Nota : $n = \dfrac{n_2}{n_1}$ índice relativo.

MÁS SOBRE LENTES DELGADAS ...

FOCO OBJETO

$$\frac{1}{f_o} - \frac{1}{\infty} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{f_o} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

fórmula del constructor de lentes

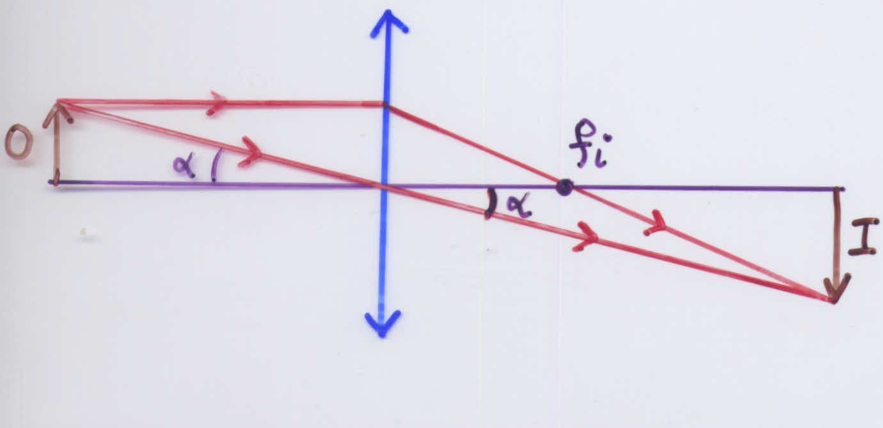
ECUACIÓN DE LAS LENTES DELGADAS

$$\boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_o}}$$

FOCO IMAGEN

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{f_i} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_i} = -\frac{1}{f_o} = -\frac{1}{f}$$

AUMENTO LATERAL



$$m = \frac{I}{O} = \frac{q\,\mathrm{tg}\,\alpha}{p\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{q}{p}$$

POTENCIA DE UNA LENTE

$$P = \frac{n_1}{f_i}$$

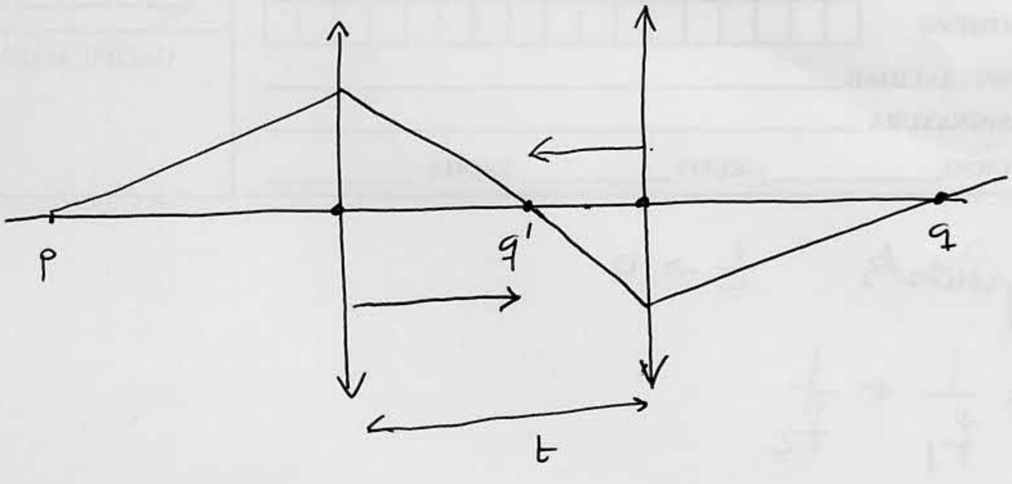
CLASIFICACIÓN DE LAS LENTES

Se dice que una lente es convergente cuando su distancia focal imagen, f', es positiva, llamándose divergente cuando es negativa. Todos los casos posibles se recogen en la siguiente tabla

Tipo de lente	Radios de sus dióptricos	f'	Convergencia
Biconvexa	$R_1 > 0, R_2 < 0$	>0	Convergente
Biconcava	$R_1 < 0, R_2 > 0$	<0	Divergente
Concavo-convexas	$R_1 > 0, R_2 > 0, R_1 > R_2$	<0	Divergente
	$R_1 > 0, R_2 > 0, R_1 < R_2$	>0	Convergente
	$R_1 < 0, R_2 < 0, R_1 > R_2$	>0	Convergente
	$R_1 < 0, R_2 < 0, R_1 < R_2$	<0	Divergente
Plano-convexas	$R_1 > 0, R_2 \to \infty$	>0	Convergente
	$R_1 \to \infty, R_2 < 0$	>0	Convergente
Plano-concavas	$R_1 < 0, R_2 \to \infty$	<0	Divergente
	$R_1 \to \infty, R_2 > 0$	<0	Divergente

En las lentes convergentes el foco imagen, F', es real, en él se cortan los rayos emergentes que han incidido en la lente paralelos al eje. En las lentes divergentes el foco imagen, F', es virtual, en él se cortan las prolongaciones de los rayos emergentes que han incidido en la lente paralelos al eje.

Sistemas de lentes



$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}=\frac{1}{f_1} \quad\rightarrow\quad q'=\frac{pf_1}{f_1-p}$$

$$\frac{1}{q'-t}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2} \qquad \frac{1}{\frac{pf_1}{f_1-p}-t}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{f_1-p}{pf_1-t(f_1-p)}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2}$$

foco objeto: $q\to\infty \Rightarrow \dfrac{f_1-F_0}{F_0f_1-t(f_1-F_0)}=\dfrac{1}{f_2} \Rightarrow$

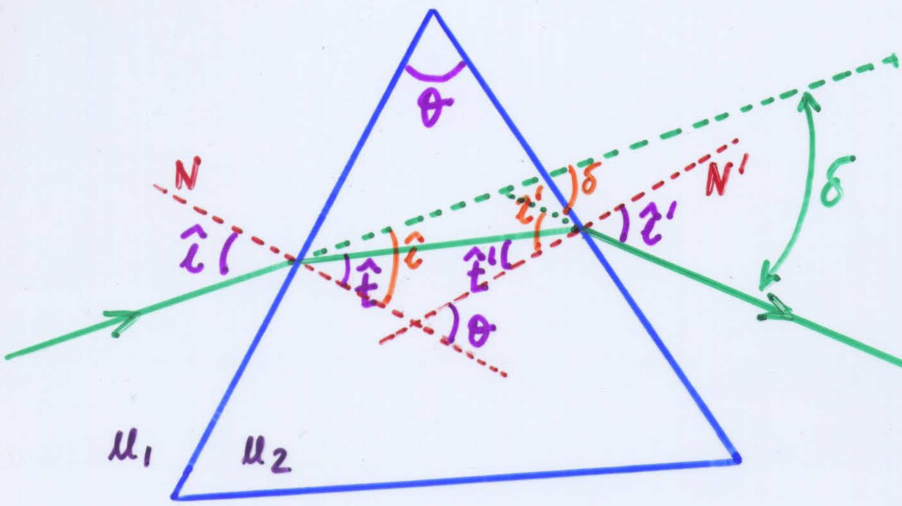
$$f_1f_2-F_0f_2=F_0f_1-tf_1+tF_0$$

$$f_1f_2+tf_1=F_0(f_1+f_2+t) \Rightarrow F_0=\frac{f_1(f_2+t)}{f_1+f_2+t}$$

Foco imagen: $p\to\infty$

$$\frac{-1}{f_1+t}-\frac{1}{F_i}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{F_i}=-\left[\frac{1}{f_1+t}+\frac{1}{f_2}\right]$$

EL PRISMA OPTICO



$$\left\{\begin{array}{l} n_1 \sin \hat{\imath} = n_2 \sin \hat{t} \\ n_1 \sin \hat{\imath}' = n_2 \sin \hat{t}' \\ \hat{t} + \hat{t}' = \theta \\ \delta = \hat{\imath} + \hat{\imath}' - \theta \end{array}\right.$$

$$n = n_2 / n_1$$

$\delta = \delta(\hat{\imath})$ con lo que el mínimo se obtiene:

$$\frac{d\delta}{d\hat{\imath}} = 1 + \frac{d\hat{\imath}'}{d\hat{\imath}} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{\imath}'}{d\hat{\imath}} = -1$$

pero de las ecuaciones con la ley de Snell

$$\left.\begin{array}{l} \cos \hat{\imath}\, d\hat{\imath} = n \cos \hat{t}\, d\hat{t} \\ \cos \hat{\imath}'\, d\hat{\imath}' = n \cos \hat{t}'\, d\hat{t}' \\ d\hat{t} = -d\hat{t}' \end{array}\right\} \quad \frac{d\hat{\imath}'}{d\hat{\imath}} = -\frac{\cos \hat{\imath} \cos \hat{t}'}{\cos \hat{\imath}' \cos \hat{t}}$$

para que puedan ser ciertas las relaciones anteriores $\hat{\imath} = \hat{\imath}'$ y $\hat{t} = \hat{t}'$ (para obtener el extremo)

luego se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\imath} = \frac{1}{2}(\delta_{MIN} + \theta) \\ \hat{t} = \frac{1}{2}\theta \end{array}\right\} \quad \boxed{n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{MIN} + \theta)}{\sin \frac{1}{2}\theta}}$$

N: Si $\theta = 0$ y n finito $\Rightarrow \delta_{MIN} = 0 \Rightarrow$ rayo sale paralelo al atravesar un medio cristalino de caras paralelas.

DISPERSIÓN DE UN PRISMA : D

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \underbrace{\frac{d\delta}{dn}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{dn}{d\lambda}}_{(2)}$$

(1) DERIVANDO RESPECTO A n LAS FORMULAS ANGULARES DEL PRISMA

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{sen} \hat{t} + n \cos \hat{t} \cdot \dfrac{d\hat{t}}{dn} \\ \cos \hat{i}' \cdot \dfrac{d\hat{i}'}{dn} = \operatorname{sen} \hat{t}' + n \cos \hat{t}' \cdot \dfrac{d\hat{t}'}{dn} \\ \dfrac{d\hat{t}}{dn} + \dfrac{d\hat{t}'}{dn} = 0 \\ \dfrac{d\delta}{dn} = \dfrac{d\hat{i}'}{dn} \end{cases}$$

combinando estos resultados se obtiene

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \hat{i}' \cos \hat{t}} \underset{\delta_{MIN}}{=} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{MIN} + \theta)}$$

(2) USANDO LA FORMULA DE CAUCHY

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{MIN} + \theta)} \cdot \left(-\frac{2B}{\lambda^3}\right)$$

Si $\lambda \nearrow$ $\delta \searrow$ (por el signo −) [EL ROJO SE DESVIA MENOS QUE EL VIOLETA.]