

CAPÍTULO 8

Inducción magnética

Índice del capítulo 8

- 8.1 Flujo magnético.
- 8.2 La ley de Faraday.
- 8.3 Ley de Lenz.
- 8.4 Fem de movimiento.
- 8.5 Corrientes de Foucault.
- 8.6 Inductancia.
- 8.7 Energía magnética.
- 8.8 Circuitos RL.
- 8.9 Algunas aplicaciones de la inducción magnética.

8.1 Flujo magnético

El flujo magnético se define por la expresión

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA$$

La unidad de flujo magnético es el **weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

Si la superficie es plana y tiene área A y $\vec{B}$ es constante sobre la superficie:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n} A = BA \cos \theta = B_n A$$

En el caso de una bobina con N vueltas:

$$\phi_m = NBA \cos \theta$$

Ejemplo 8.1: Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de 40 cm de longitud, 2.5 cm de radio y 600 vueltas, cuando transporta una corriente de 7.5 A.

Solución: $1.66 \times 10^{-2} \text{ Wb}$.

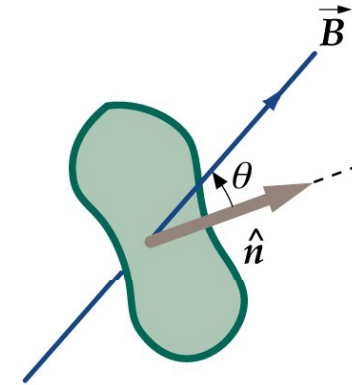


Figura 8.1: Si el campo $\vec{B}$ forma un ángulo con la normal al área de un bucle, el flujo a través del mismo es $\vec{B} \cdot \hat{n} A = BA \cos \theta$.

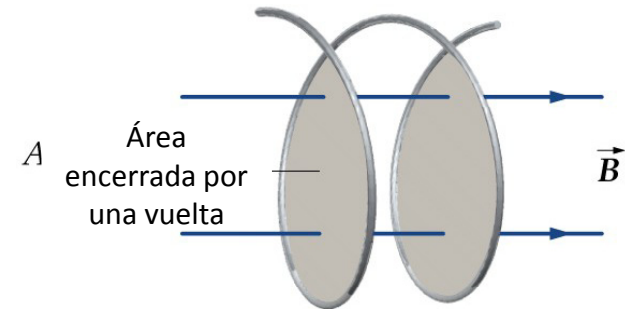


Figura 8.2: El flujo a través de la superficie A encerrada por la bobina con N vueltas es proporcional al número de líneas de campo que penetran en la superficie.

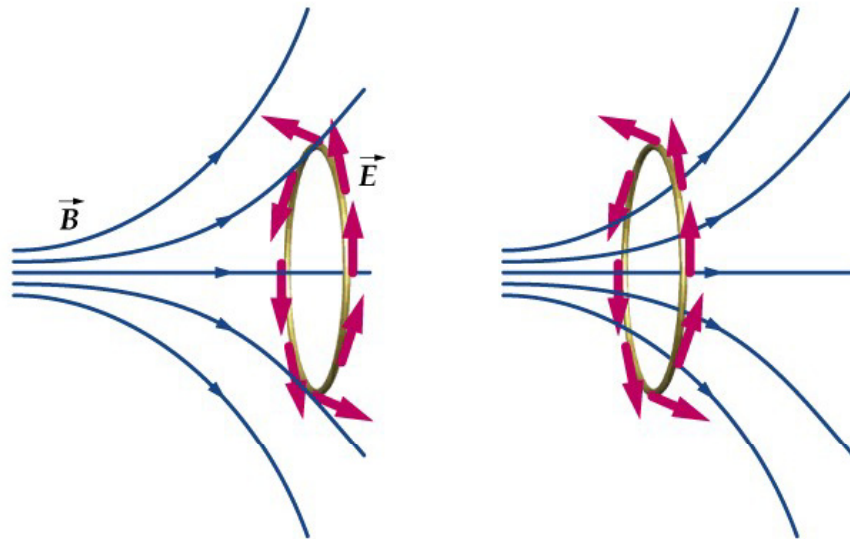
8.2 La ley de Faraday

Los experimentos de Faraday, Henry y otros, demostraron que si el flujo magnético a través de un área rodeada por un circuito varía con el tiempo, se induce una fem que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa el circuito:

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

[La ley de Faraday]

La fem inducida es el trabajo realizado por unidad de carga. Este trabajo sobre las cargas móviles es realizado por un campo eléctrico no conservativo:



$$\xi = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Figura 8.3: Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira de alambre es variable, se induce en la misma una fem. La fem se distribuye a través de toda la espira y equivale a un campo eléctrico no conservativo tangente al alambre.

8.2 La ley de Faraday

Ejemplo 8.2: Un campo magnético uniforme forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 4 cm. El campo varía a razón de 85 T/s, permaneciendo fija su dirección. Determinar el módulo de la fem inducida en la bobina.

Solución: 111 V.

Ejemplo 8.3: Una bobina de 80 vueltas tiene un radio de 5 cm y una resistencia de $30\ \Omega$. Determinar cuál debe ser el módulo de la variación de un campo magnético perpendicular al plano de la bobina para inducir en ésta una corriente de 4 A.

Solución: 191 T/s.

8.3 Ley de Lenz

El signo de negativo en la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio general físico llamado la **ley de Lenz**:

Enunciado 1: La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

Enunciado 2: Cuando se produce una variación de flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación.

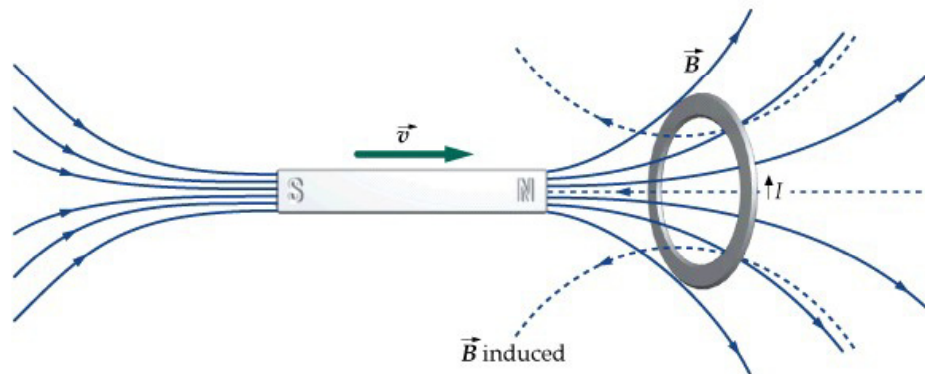


Figura 8.4: Cuando el imán en forma de barra se mueve hacia la espira, la fem inducida en ésta produce una corriente en el sentido indicado.

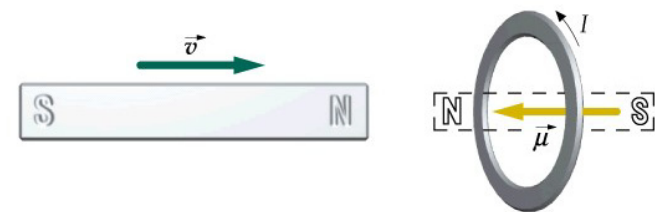


Figura 8.5: El momento magnético de la espira debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barra de imán real. Este imán se mueve hacia la espira y por lo tanto el momento magnético inducido repele la barra imanada.

8.3 Ley de Lenz

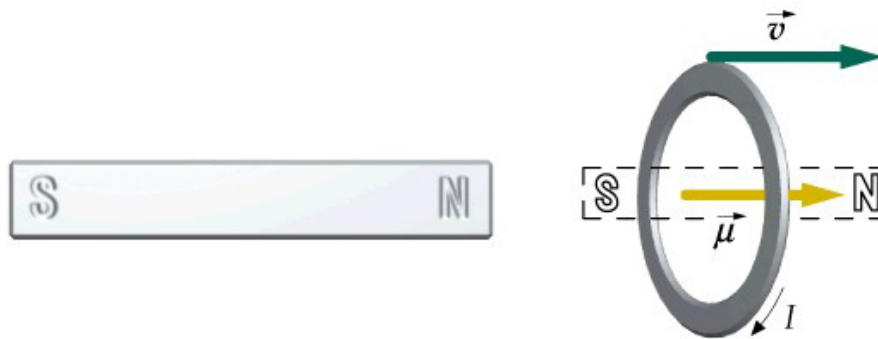


Figura 8.6: Cuando la espira se aleja de la barra magnética estacionaria, el imán atrae a la espira por el momento magnético inducido en ella, oponiéndose de nuevo al movimiento relativo.

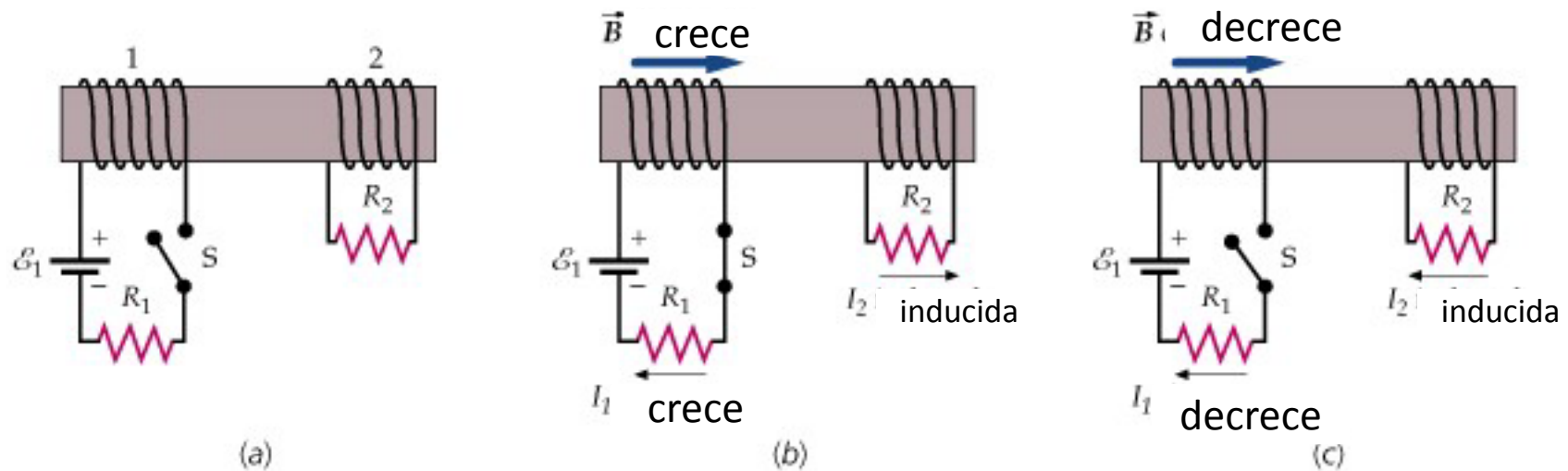


Figura 8.7: (a) Dos circuitos adyacentes. (b) En el momento de cerrar el interruptor, I_1 comienza a crecer en el sentido indicado. El flujo variable que atraviesa el circuito 2 induce una corriente I_2 . El flujo que atraviesa el circuito 2 debido a I_2 se opone al aumento de flujo debido a I_1 . (c) Cuando se abre el interruptor, I_1 disminuye y el flujo que atraviesa el circuito 2 varía. La corriente inducida I_2 tiende a mantener el flujo a través del circuito 2.

8.3 Ley de Lenz

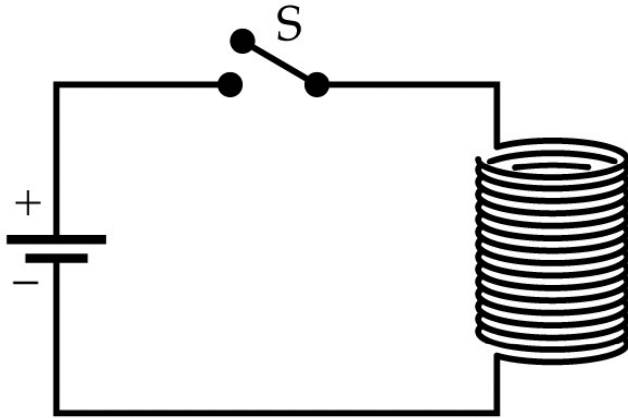


Figura 8.8: La bobina con muchas espiras de conductor origina un flujo grande con una corriente determinada en el circuito. La fem inducida en este circuito cuando la corriente varía se opone a dicha variación.

Ejemplo 8.4: Una bobina rectangular de N vueltas de anchura a y longitud b cada una, donde $N = 80$, $a = 20$ cm y $b = 30$ cm, está situada en un campo magnético $B = 0.8$ T dirigido hacia dentro de la página (ver figura 8.9). Como indica la figura sólo la mitad de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia R de la bobina es de $30\ \Omega$. Determinar la corriente inducida, incluyendo su sentido, al desplazarse la bobina con una velocidad de 2 m/s (a) hacia la derecha, (b) hacia arriba y (c) hacia abajo.

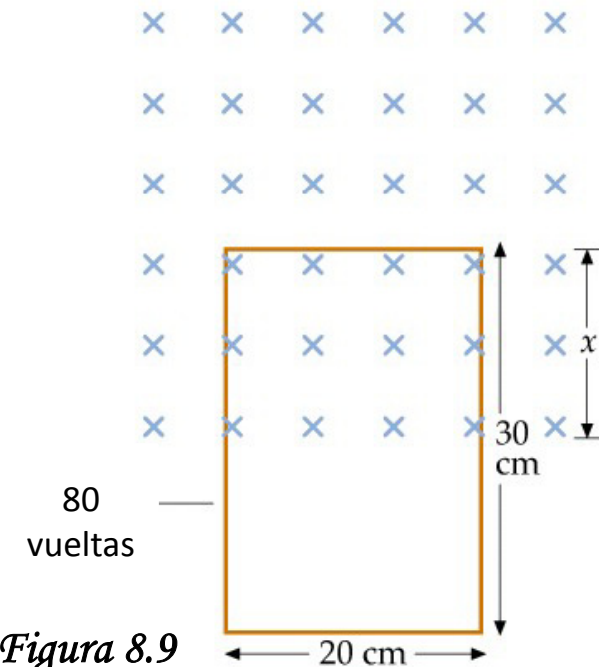


Figura 8.9

8.4 Fem de movimiento

Fem de movimiento es toda fem inducida por el movimiento de un conductor en un campo magnético.

Consideramos la varilla conductora de la figura 8.10 que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia. Existe un campo magnético uniforme y dirigido hacia abajo. La variación de flujo magnético con el tiempo da lugar a una fem inducida en este circuito:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n}A = B_n A = Blx \Rightarrow \xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -Blv$$

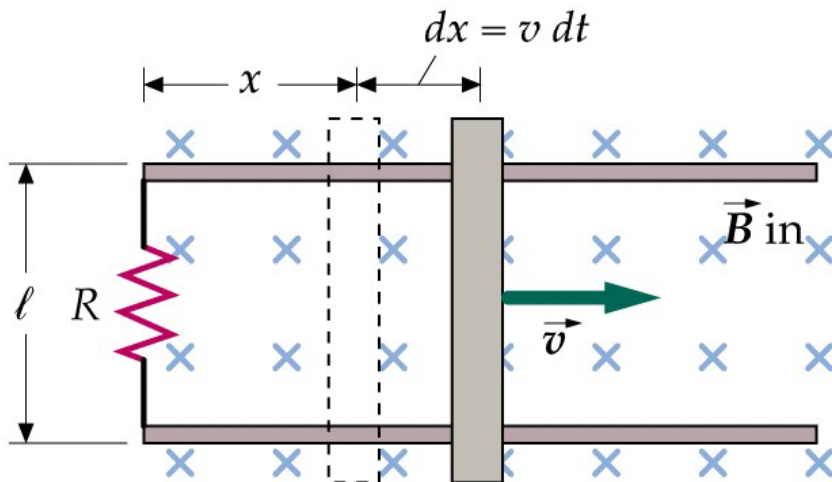


Figura 8.10: Varilla conductora deslizante sobre raíles conductores en el interior de un campo magnético. Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el área de la superficie encerrada por el circuito crece y el flujo magnético entrante se incrementa. En el circuito se induce una fem de magnitud Blv , produciéndose una corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual genera un flujo saliente del papel que se opone al cambio del flujo debido al movimiento de la varilla.

8.4 Fem de movimiento

Ejemplo 8.5: En la figura 8.10, sea $B = 0.6 \text{ T}$, $v = 8 \text{ m/s}$, $l = 15 \text{ cm}$ y $R = 25 \Omega$, y suponer que la resistencia de la barra y los raíles es despreciable. Determinar (a) la fem introducida en el circuito, (b) la intensidad de corriente del circuito, (c) la fuerza necesaria para mover la barra con velocidad constante y (d) la potencia disipada en la resistencia.

Ejemplo 8.6: Una barra de masa m se desliza sin rozamiento sobre unos raíles conductores en una región de campo magnético constante B dirigido hacia la página (ver figura 8.11). Un agente externo empuja la barra manteniéndola a velocidad constante v_0 hacia la derecha. En el tiempo $t = 0$ se suprime súbitamente la fuerza externa y la barra se desacelera debido a la fuerza magnética. Determinar la velocidad v de la barra en función del tiempo.

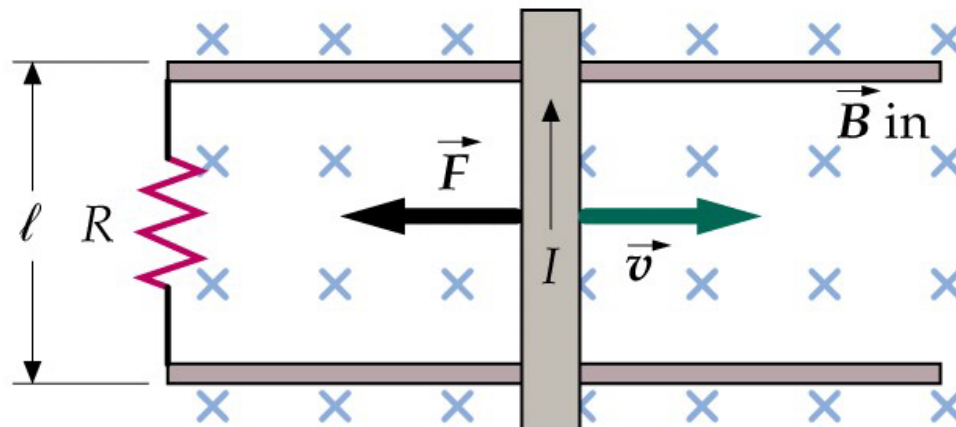


Figura 8.11

8.5 Corrientes de Foucault

Frecuentemente el flujo variable establece unas corrientes circulantes, denominadas **corrientes de Foucault**, en un trozo de metal como el núcleo de un transformador. El calor producido por estas corrientes constituye una pérdida de potencia en el transformador.

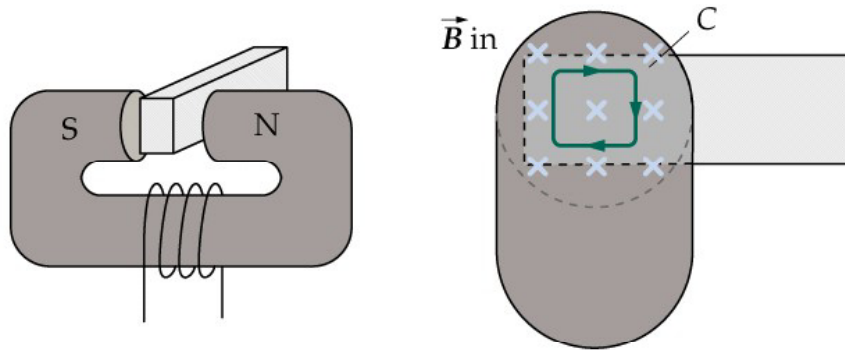


Figura 8.12: Si el campo magnético a través de un metal varía, se induce una fem en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal como la curva C indicada. Las fems producen corrientes llamadas corrientes de Foucault.

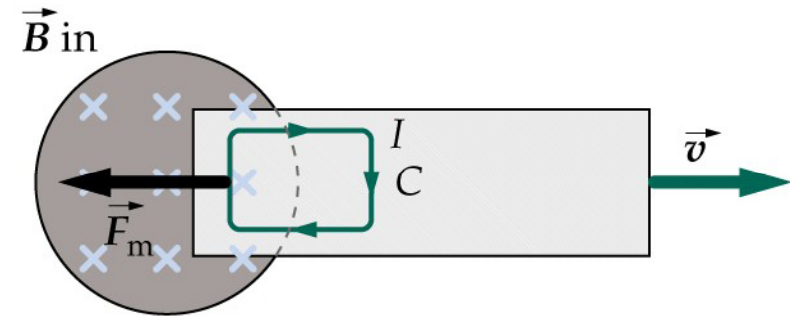


Figura 8.13: Demostración de las corrientes de Foucault. Cuando un bloque metálico se empuja hacia la derecha, existe una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la corriente inducida que se opone al movimiento.

8.6 Inductancia

✚ **Autoinducción:** El flujo magnético que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con la corriente que circulan por circuitos próximos. Consideremos una bobina por la que circula una corriente I . La corriente produce un campo magnético B que varía de un punto a otro, pero en todos los puntos B es proporcional a I . El flujo magnético a través de la bobina es por tanto proporcional a I :

$$\phi_m = LI$$

donde L es una constante llamada **autoinducción** de la bobina. La autoinducción depende de la forma geométrica de la bobina. La unidad del SI de inductancia es el **henrio** (H):

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

En el caso de un **solenoid** de longitud l y N vueltas ($n = N/l$) que transporta una corriente I (ver ejemplo 8.1):

$$\phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I A}{l} = \mu_0 n^2 I A l \Rightarrow L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A l$$

8.6 Inductancia

Ejemplo 8.7: Determinar la autoinducción de un solenoide de longitud 10 cm, área 5 cm² y 100 vueltas.

Solución: 6.28×10^{-5} H.

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica y, por tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, resulta: $\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

Así pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente. Una bobina o solenoide con muchas vueltas posee una gran autoinducción y se denomina **inductor**. La diferencia de potencial entre sus extremos viene dada por

$$\Delta V = \xi - Ir = -L \frac{dI}{dt} - Ir$$

donde r es la resistencia interna del inductor.

8.6 Inductancia

✚ **Inductancia mutua:** Cuando dos o más circuitos están próximos, como indica la figura 8.14, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos. Sea I_1 la corriente en el circuito 1 de la izquierda e I_2 la del circuito 2 de la derecha. El campo magnético $\mathbf{B}$ en un punto P cualquiera dentro del circuito 2 es la suma del campo $\mathbf{B}_1$ debido a I_1 y al campo $\mathbf{B}_2$ debido a I_2 . Por tanto, podemos expresar el flujo de $\mathbf{B}_1$ que atraviesa el circuito 2 como:

$$\phi_{m2,1} = M_{2,1}I_1$$

en donde $M_{2,1}$ es la inductancia mutua de los dos circuitos. Del mismo modo, el flujo de $\mathbf{B}_2$ que atraviesa el circuito 1:

$$\phi_{m1,2} = M_{1,2}I_2$$

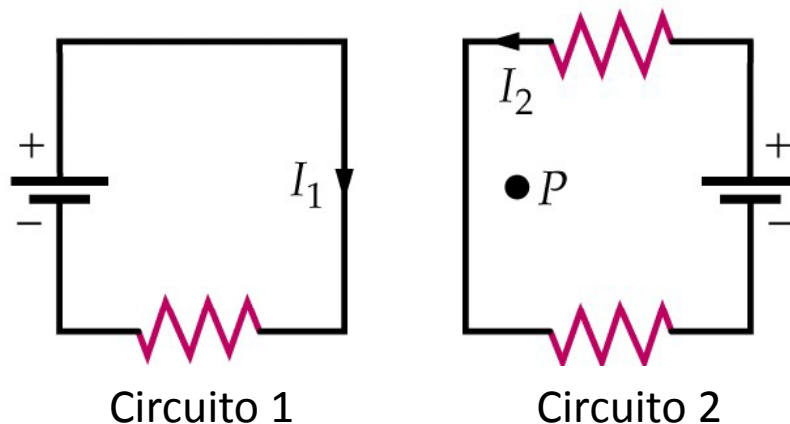


Figura 8.14: Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en P se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a la corriente I_2 . El flujo a través de cualquiera de los dos circuitos es la suma de los dos términos, uno proporcional a I_1 y el otro a I_2 .

8.6 Inductancia

Podemos calcular la inductancia mutua de dos **solenoides concéntricos** de espiras apretadas como los que se muestran en la figura 8.15. El campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente del solenoide interno es:

$$B_1 = \mu_0 (N_1 / l) I_1 = \mu_0 n_1 I_1, \quad r < r_1$$

El flujo que atraviesa el solenoide externo debido a este campo magnético es:

$$\phi_{m2} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 l (\pi r_1^2) I_1$$

La inductancia mutua es por tanto:

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 l \pi r_1^2$$

Ejemplo 8.8: Demostrar que $M_{1,2} = M_{2,1}$.

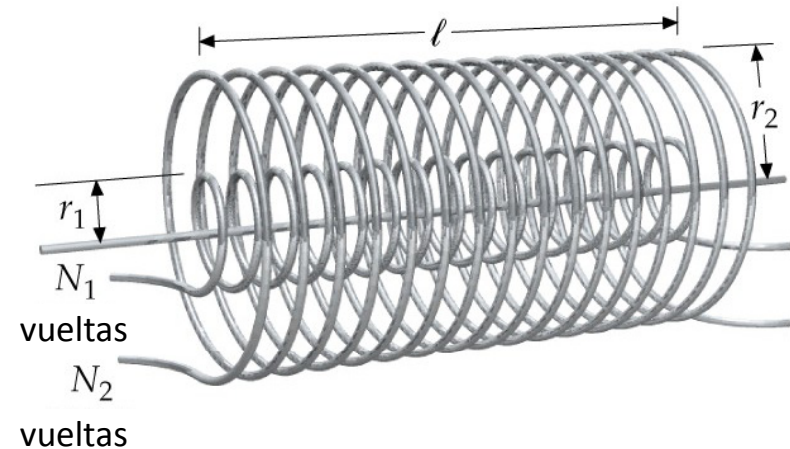


Figura 8.15: Un solenoide largo y estrecho se encuentra dentro de otro más ancho de igual longitud. Una corriente en uno de los solenoides produce flujo magnético en el otro.

8.7 Energía magnética

Un inductor almacena energía magnética. Consideremos el circuito formado por una inductancia L y una resistencia R en serie con una batería de fem ξ_0 y un interruptor S como se muestra en la figura 8.16. Aplicando la ley de las mallas a ese circuito:

$$\xi_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Multiplicando por la intensidad resulta:

$$\xi_0 I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

Por tanto la potencia que incide en el inductor:

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI dI = \frac{1}{2} LI_f^2$$



$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

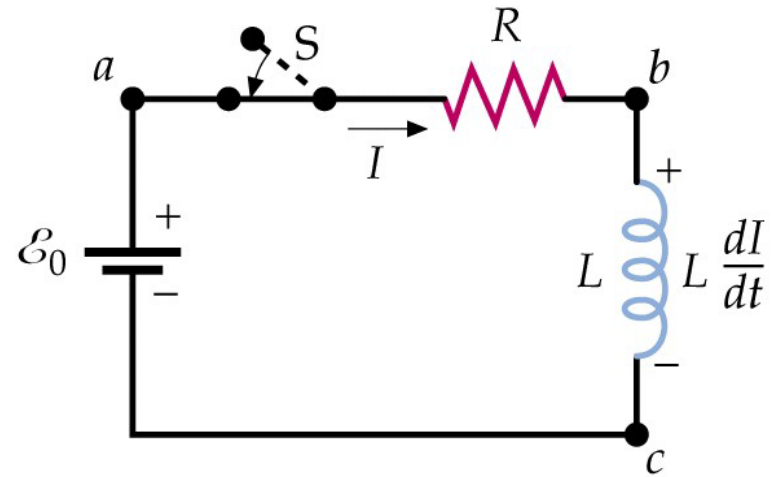


Figura 8.16: Inmediatamente después de cerrar el interruptor S , la corriente comienza a crecer en este circuito y una fuerza contraelectromotriz de módulo $\mathcal{E} = L dI/dt$ se genera en el inductor. La caída de potencial a través de la resistencia IR , más la caída de potencial a través del inductor $\mathcal{E} = L dI/dt$, es igual a la fem de la batería.

8.7 Energía magnética

En el proceso de producir una corriente en un inductor, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina del mismo. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en un inductor es energía almacenada en el campo magnético creado. En el caso de un solenoide largo, el campo magnético viene y la autoinducción vienen dados por:

$$B = \mu_0 n I \quad \text{y} \quad L = \mu_0 n^2 A l$$

De este modo, la energía magnética se puede escribir como:

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A l$$

Así finalmente, la **densidad de energía magnética** viene dada por:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Este resultado es general. Note la semejanza con la densidad de energía eléctrica:

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

8.8 Circuitos RL

Un circuito que contiene una resistencia y un inductor tal como en el indicado en la figura 8.16 se denomina **circuito RL**. Para el circuito de la figura 8.16, la regla de las mallas nos dice:

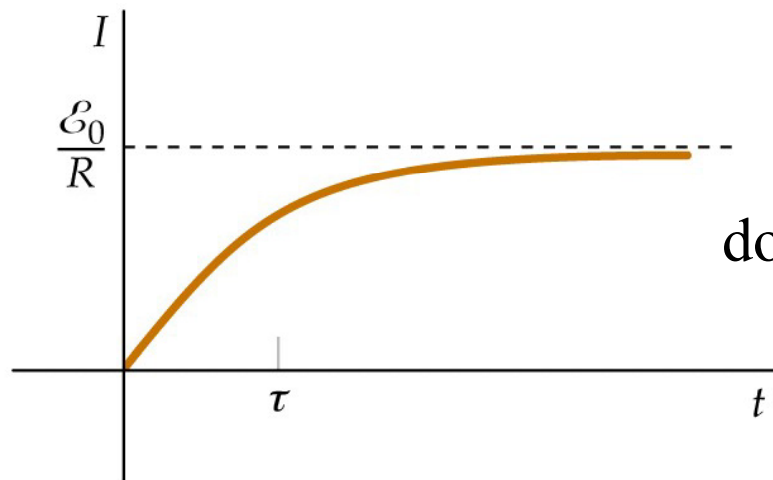
$$\xi_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Podemos entender varias cosas sin necesidad de resolver la ecuación. Así por ejemplo, es fácil determinar cuál es el ritmo inicial de crecimiento de la corriente o su valor después de un largo tiempo (I_f):

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = \frac{\xi_0}{L}; \quad I_f = \frac{\xi_0}{R}$$

Se puede mostrar que la dependencia temporal de la corriente viene dada por:

$$I = \frac{\xi_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = I_f (1 - e^{-t/\tau})$$



donde $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de tiempo del circuito)

Figura 8.17: Corriente como función del tiempo para un circuito RL en el que se cierra el interruptor en el instante $t = 0$.

8.9 Algunas aplicaciones de la inducción magnética

✚ **Generador de corriente alterna:** un generador ac simple está formado por una espira de área A y N vueltas en rotación dentro de un campo magnético uniforme.

$$\phi_m = NBA \cos(\omega t) \Rightarrow \xi(t) = -\frac{d\phi_m}{dt} = NBA \omega \sin(\omega t)$$

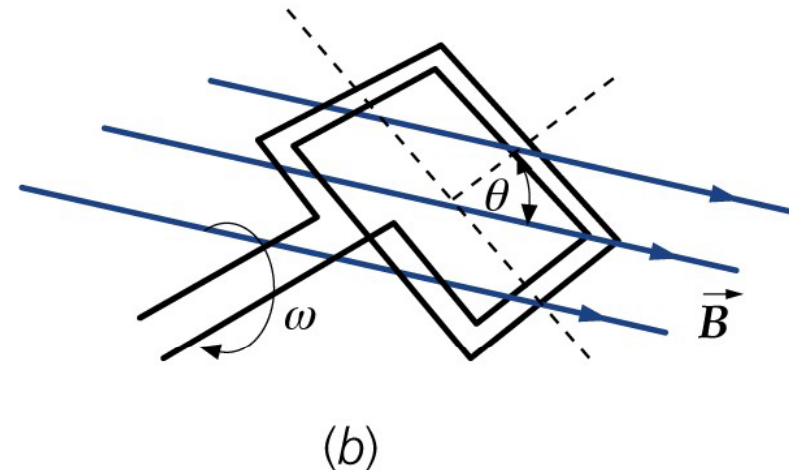
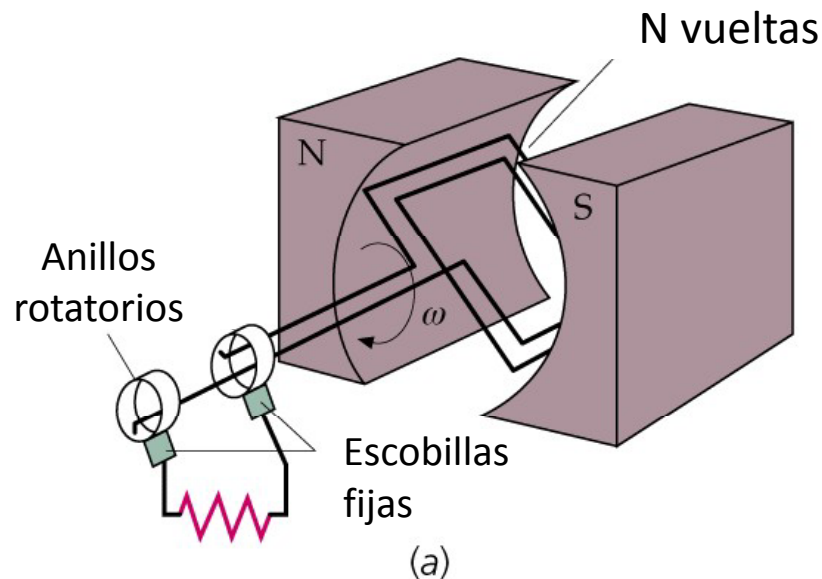


Figura 8.18: a) Generador de corriente alterna. Una bobina que gira con una frecuencia angular constante ω en un campo magnético $\mathbf{B}$ genera una fuerza electromotriz sinusoidal. La energía procedente de un salto de agua o de una turbina de vapor se utiliza para hacer girar la bobina y producir energía eléctrica. La fem se suministra a un circuito externo mediante las escobillas en contacto con los anillos. (b) En este instante la normal al plano de la espira forma un ángulo θ con el campo magnético y el flujo que atraviesa la superficie plana de la espira es $BA \cos \theta$.

8.9 Algunas aplicaciones de la inducción magnética

✚ **Transformador:** dispositivo utilizado para elevar o disminuir el voltaje en un circuito sin una apreciable pérdida de potencia.

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt}$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt}$$

Si no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos:

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

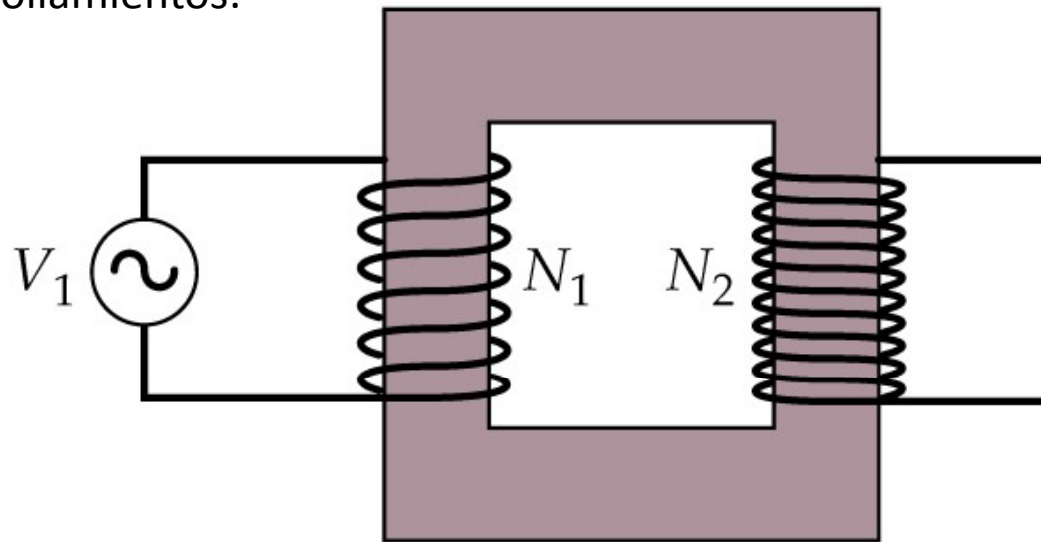


Figura 8.20: Transformador con N_1 vueltas en el primario y N_2 vueltas en el secundario.

8.9 Algunas aplicaciones de la inducción magnética

✚ **El betatrón:** El acelerador de inducción magnética o betatrón, pertenece al grupo de máquinas ideadas para acelerar partículas cargadas hasta elevadas energías. Fue inventado por Donald W. Kerst. El betatrón construido en 1945 aceleraba electrones hasta una energía de 100 MeV.

❑ El acelerador original consistía en un tubo toroidal en el que se hace el vacío y se sitúa entre las piezas polares de un electroimán. Los electrones son acelerados mediante una diferencia de potencial de 50000 voltios por un cañón electrónico, entraban tangencialmente dentro del tubo, donde el campo magnético les hacía dar vueltas en una órbita circular de 5 m de longitud.

❑ Los betatrones se usan para estudiar ciertos tipos de reacciones nucleares y como fuentes de radiación para el tratamiento del cáncer.

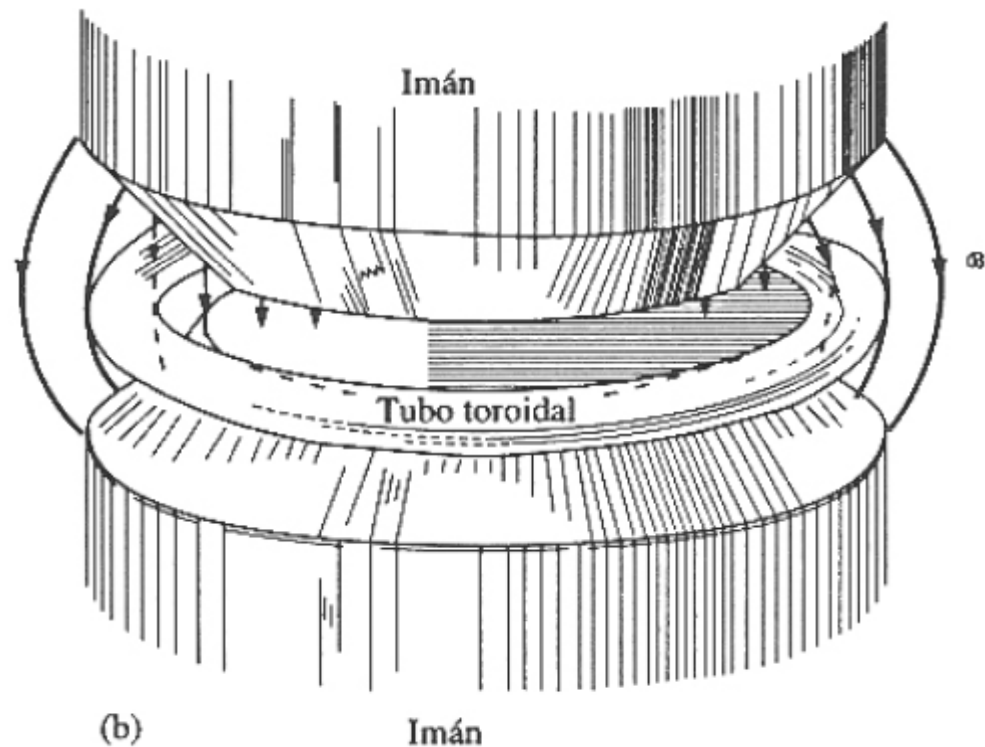


Figura 8.21: Vista del tubo acelerador y las superficies de los polos de un betatrón.

8.9 Algunas aplicaciones de la inducción magnética

Ejemplo 8.9: El fundamento de un **betatrón** se puede entender con este ejemplo. Consideremos una región donde existe un campo magnético paralelo al eje z dependiente del tiempo con simetría axial; esto es, la magnitud del campo varía únicamente con la distancia al eje z (ver figura 8.22). Demostrar que el campo eléctrico en cada punto del espacio viene dado por:

$$E = -\frac{1}{2}r\left(\frac{dB_{medio}}{dt}\right)$$

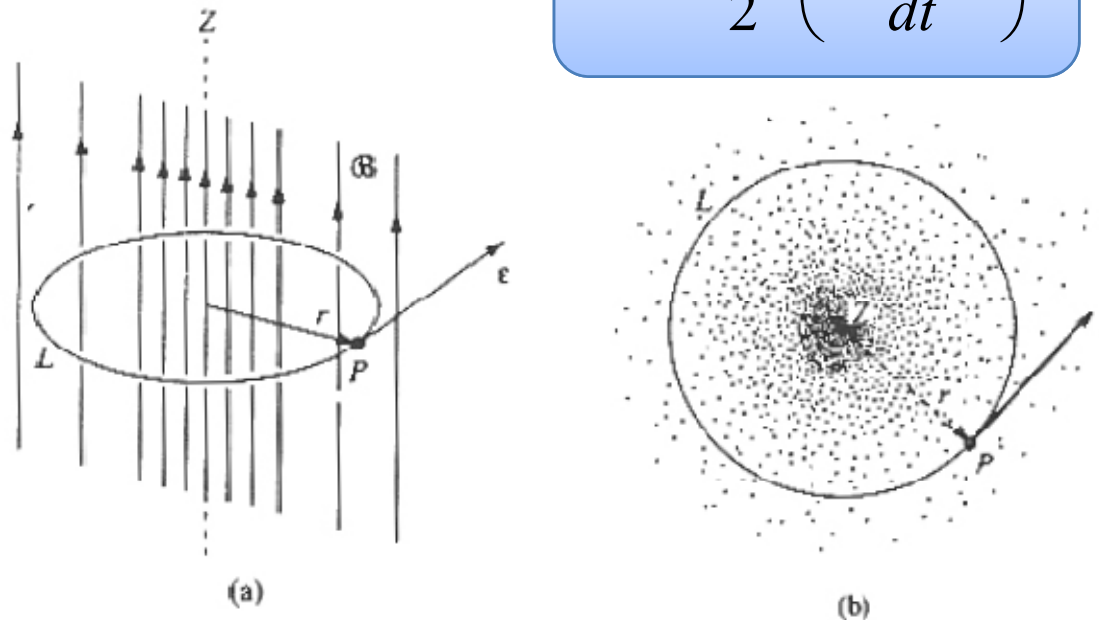


Figura 8.22: Campo eléctrico producido por un campo magnético dependiente del tiempo con simetría cilíndrica; (a) vista lateral, (b) vista superior.