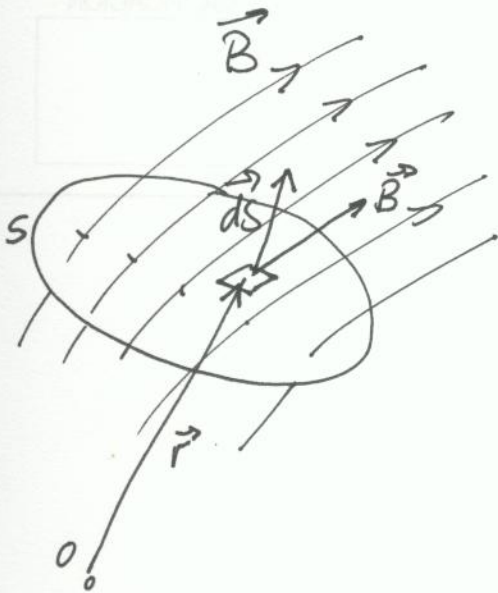


6- ELECTRODINAMICA

(1)

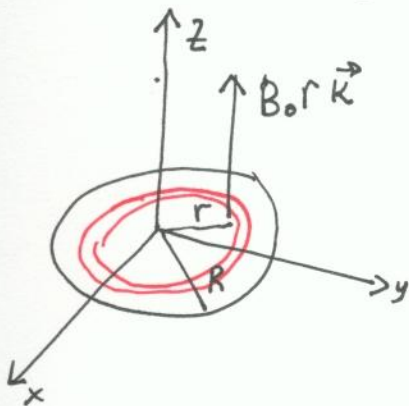
6-1- FLUJO MAGNETICO ATRAPADO POR UNA ESPIRA



$$\Phi_S = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

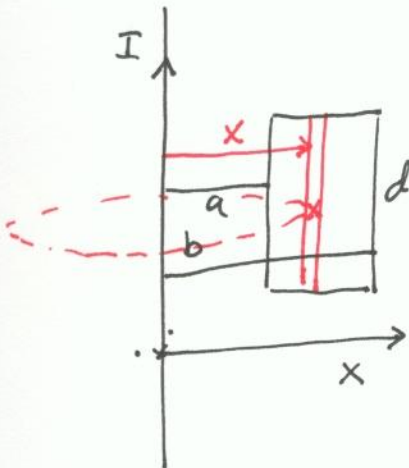
DEPENDE DE {
 - cómo es $\vec{B}(\vec{r})$
 - cómo es S
 - ORIENTACION $\vec{B} \cdot d\vec{S}$

Ejemplo 1: Espira circular centrada en el origen de radio R y en el plano xy. Campo $\vec{B} = B_0 \cdot r \cdot \vec{k}$. Calcular el flujo Φ



$$\Phi = \int_0^R B_0 \cdot r \cdot 2\pi r dr = 2\pi B_0 \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi B_0 R^3$$

Ejemplo 2: Hilos infinito recorrido por I y una espira cuadrada. Flujo atrapado por la espira

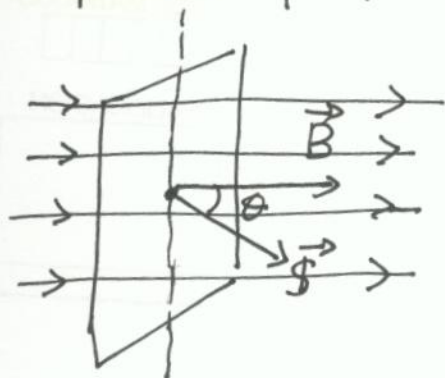


$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot d \cdot dx = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ejemplo 3 Espira en un campo uniforme.

(2)

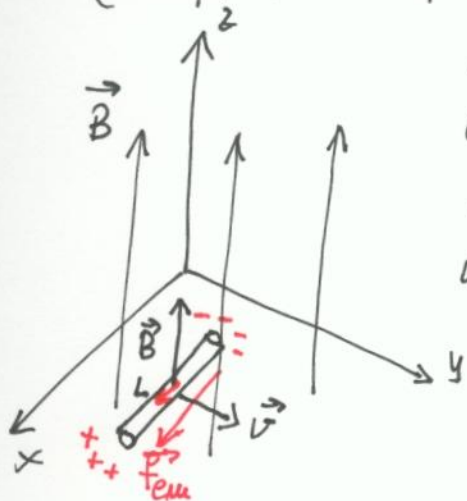


$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \theta$$

6.2. REVISION DEL CONCEPTO DE FUERZA ELECTROMOTRIZ

Una fem es la energía por unidad de carga aportada a los cuerpos eléctricos presentes en un conductor y que obliga a estos a moverse a lo largo de un circuito o de un conductor por la acción de una fuerza ~~seca~~ por unidad de carga $\vec{f}_{em}$. Esta fuerza puede aparecer como consecuencia del movimiento de un conductor en el seno de un campo magnético constante (aunque no uniforme). Por ejemplo, la varilla de la figura

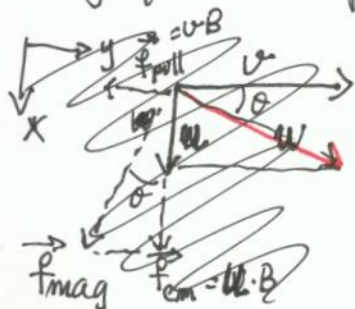
se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo $\vec{B}$ uniforme y constante. Las cargas móviles sufren la fuerza $\vec{f}_{em} = \vec{v} \times \vec{B}$ y eso produce una acumulación de carga en los extremos.



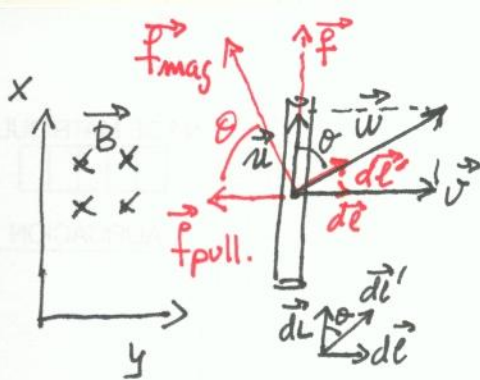
Esto equivale a una batería de fuerza electromotriz

$$\mathcal{E} = \int_L \vec{f}_{em} \cdot d\vec{l} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = BLv$$

Nota: podría pensarse que es la fuerza magnética la que realiza trabajo sobre la carga para producir la fem, pero no es así ya que la trayectoria de la carga (p.ej. positiva) sería



$$\mathcal{E} = \int \vec{f}_{pull} \cdot d\vec{l} =$$



$u \equiv$ velocidad de los corpes en el interior del conductor (3)

$v \equiv$ velocidad del conductor

$w \equiv$ ley de composición de velocidades.

El trabajo hecho por la fuerza magnética es nulo ya que $\vec{f}_{mag} \perp d\vec{l}$. Además $f_{pull} = uB$ y $f = v \cdot B$, esto indica

$$\text{que } \int \vec{f}_{mag} \cdot d\vec{l}' = 0 = \int (\vec{f}_{pull} + \vec{f}) \cdot (d\vec{l} + d\vec{L}) = \int \vec{f}_{pull} \cdot d\vec{l} +$$

$$+ \int \vec{f} \cdot d\vec{L} \Rightarrow \int \vec{f} \cdot d\vec{L} = BLv = - \int \vec{f}_{pull} \cdot d\vec{l}$$

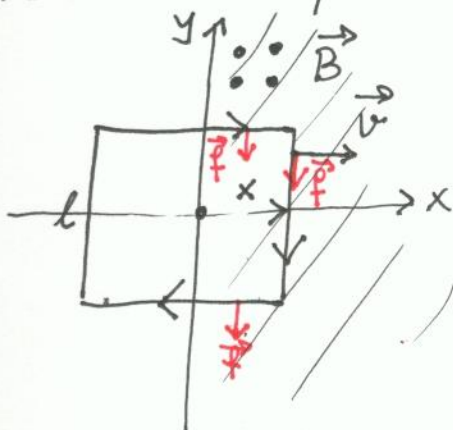
Trabajo por v de
corra para producir
la fem $\mathcal{E}$

trabajo mecánico
para empujar la
barra por el campo
magnético

Por tanto, el campo magnético **NO HACE TRABAJO** para producir la fem. El trabajo mecánico apostado es

$$\mathcal{E} = \int \vec{f}_{pull} \cdot d\vec{l} = \int u \cdot B \cdot dl = \int \frac{vB}{\tan \theta} \cdot dL \cdot \tan \theta = vB \cdot L$$

la fuerza electromotriz descrita es de tipo **movil** producida por el movimiento en el seno de un campo magnético. Esta fem también aparece por ejemplo en el sistema de la figura.



En un cierto instante t cuando el circuito se encuentra en la posición indicada

$$\mathcal{E} = \int \vec{f} \cdot d\vec{l} = v \cdot B \cdot l$$

sólo en el segmento vertical que está en el interior de $\vec{B}$

En este punto, la fem también se puede encontrar usando el flujo magnético.

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B \cdot l x$$

$\uparrow$
 $d\vec{S} = -ds \vec{k}$

y escribiendo que $\frac{d\phi}{dt} = -B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = -B \cdot l v = -\mathcal{E}$

de donde podemos escribir que

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt}$$

Esta forma de evaluar la fem da lugar a una generalización.

6.3 - LEY DE FARADAY (LEY DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA)

la fuerza electromotriz que aparece en un circuito que interacciona con un campo magnético externo se puede escribir como.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt}$$

→ Ley de Lenz: $\mathcal{E}$ genera una corriente en el circuito que crea un campo inducido $\vec{B}$ que se opone a la variación de flujo.

donde $\vec{E}$ campo eléctrico que mueve las cargas en el circuito y que ya no es (solo) de naturaleza electrostática

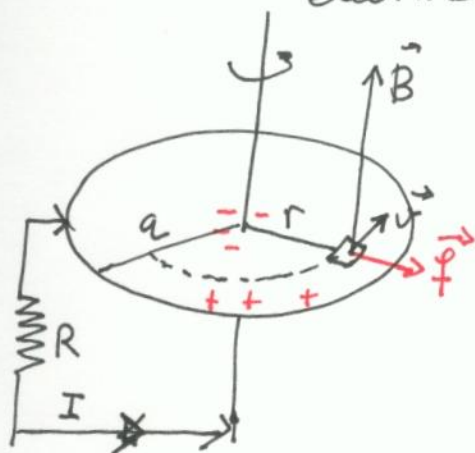
Note: En un circuito pueden existir "campos eléctricos" de diversa naturaleza:

- Campos electrostáticos, que producen una ddp
- Campos electromotores, que mueven las cargas dándoles energía (baterías, de inducción, ...)
- campos contraelectromotores, que gastan energía de las cargas (motores, turbinas, etc)

La ley de Faraday se puede poner en forma diferencial.
asumiendo que el flujo magnético Φ varía con el tiempo
por causa de la variación temporal del campo magnético
que lo causa.

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Ejemplo-1: Un disco que gira a ω en un campo uniforme $\vec{B}$ y se conecta el eje y el borde a un circuito de resistencia eléctrica R , calcula la corriente en la resistencia

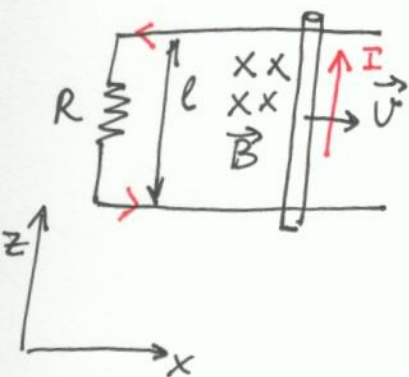


$$\mathcal{E} = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \omega B \int_0^a r dr$$

$\downarrow$
 $d\vec{S} = \vec{u}_r$

$$\mathcal{E} = \frac{\omega B a^2}{2} \quad \text{y} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

Ejemplo-2: Barra metálica que desliza un rozamiento paralelamente (7.7 pag 300) a unos railes. Si se conecta una resistencia R y el campo $\vec{B}$ va hacia dentro, calcula



- Corriente en la barra y su dirección
- Fuerza magnética sobre la barra
- Si $v(0) = v_0$, cual es la velocidad a t
- Si la energía cinética inicial es $\frac{1}{2} m v_0^2$, computar que la energía entregada al resistor es exacto esa.

a) $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$ con $\phi = \ell \times B \Rightarrow \mathcal{E} = -B\ell v$ y genera una corriente tal que $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell v}{R}$

b) la fuerza sobre la barra $\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B}) = -I\ell B \vec{u}_x = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} \vec{u}_x$

c) $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = -\frac{B^2 \ell^2 v}{Rm} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 \ell^2}{Rm} dt \Rightarrow$

$\log \left| \frac{v(t)}{v(0)} \right| = -\frac{B^2 \ell^2}{Rm} t \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 \ell^2}{mR} t}$ va frenando

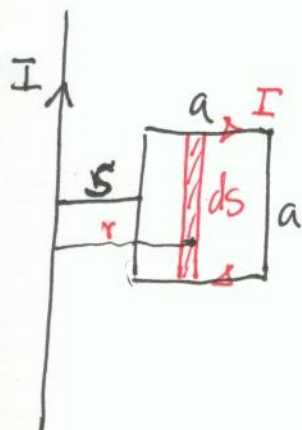
d) la potencia eléctrica entregada a la resistencia

$$\frac{dW}{dt} = I^2 R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R^2} R = \frac{B^2 \ell^2}{R} v_0^2 e^{-\frac{2B^2 \ell^2}{mR} t}$$

de donde

$$W = \frac{B^2 \ell^2}{R} v_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2B^2 \ell^2}{mR} t} dt = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Ejemplo-3: Circuito cuadrado de lado a a distancia s de un hilo infinito con I constante
(7.8 pg 300)



a) Flujo a través del circuito

b) Si se empuja el circuito para alejarlo del hilo a la velocidad v , fem. generada. Sentido de la corriente inducida

c) Si el circuito se empuja hacia arriba o abajo se produce fem inducida?

a) El campo magnético a la distancia r vale $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ y el flujo $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_s^{s+a} \frac{a \cdot dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log\left(\frac{s+a}{s}\right)$

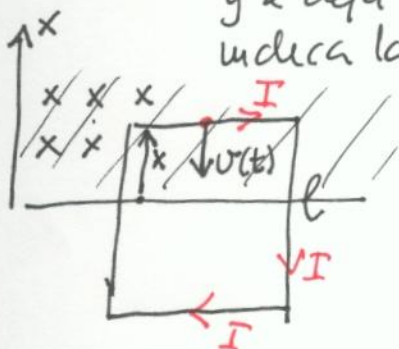
b) al moverse hacia la derecha $s = s(t) = v \cdot t$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{s}{s+a} \cdot \frac{v \cdot s - (s+a) \cdot v}{s^2} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}$$

Como al alejarse disminuye el flujo atrapado, la corriente ira en sentido horario para reforzar el flujo atrapado

c) No hay variación del flujo atrapado y por tanto $\mathcal{E} = 0$

Ejemplo 4: Se construye una espira cuadrada con una varilla de aluminio de sección A y lado l , densidad del aluminio ρ_{Al} , y se deja caer verticalmente en un campo magnético como indica la figura (solo la parte superior) por la gravedad.



Calcular cual será la velocidad terminal de la espira y la velocidad en función del tiempo. ¿Cuanto tiempo se tarda en alcanzar el 90% de la velocidad terminal.

N: Supongase que parte del reposo

$$\phi = B \cdot l \cdot x \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = Bl \cdot v \text{ y } I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

con lo que la fuerza sobre el circuito no compensada se aplica sobre la varilla l superior horizontal $\vec{F} = I \cdot l \cdot B \cdot \vec{l} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \vec{l}$

la ec. del mov. de la espira es $m \cdot g - \frac{B^2 l^2 v}{R} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad v(0) = 0$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2 l^2 v}{mR}$$

llamando $\alpha = \frac{B^2 l^2}{mR}$ la ec. del mov. queda $\frac{dv}{dt} = g - \alpha v$

$$\frac{dv}{g - \alpha v} = dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - \alpha v} = t \Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \log(g - \alpha v) \Big|_0^v = t$$

$$\log \frac{g - \alpha v}{g} = -\alpha t \Rightarrow g - \alpha v = g e^{-\alpha t} \Rightarrow \boxed{v = \frac{g}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})}$$

la velocidad terminal es $\boxed{v(t \rightarrow \infty) = \frac{g}{\alpha} = \frac{mgR}{B^2 l^2}} = v_{ter}$

para alcanzar el 90% de la velocidad terminal. se requiere un tiempo que viene dado por

$$\frac{v}{v_{ter}} = 0,9 = 1 - e^{-\alpha t} \Rightarrow e^{-\alpha t} = 0,1 \Rightarrow \alpha \cdot t = \log 10$$

$$\boxed{t_{90\%} = \frac{v_{ter}}{g} \log 10}$$

Si hacemos unos números: $m = 4 \cdot Al \cdot \rho_{al}$ $R = \frac{4 \cdot l \cdot \rho}{\sigma \cdot A}$

conductiv.
del Al

$$v_t = \frac{4 \cancel{Al} \cdot \rho_{al} \cdot g \cdot 4 \cancel{l}}{B^2 \cancel{l}^2 \cdot \sigma \cdot \cancel{A}} = \frac{16 g \rho_{al}}{B^2 \sigma} \approx 1,2 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} B &= 1 \text{ T} \\ \frac{1}{\sigma} &= 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \\ \rho_{al} &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$t_{90\%} = \frac{1,2}{9,8} \cdot \log 10 = 2,8 \text{ ms}$$

Nota: Que ocurre si el circuito se encuentra completamente inmerso en el campo magnético? . Que al no variar el flujo cae con mov libre.

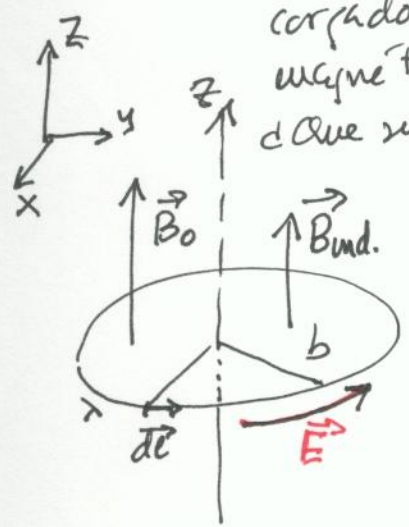
la ley de Faraday escrita en forma diferencial $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ se parece a la ley de Ampere $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ en el sentido que en esta ley $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (no hay cargas magnéticas). y respecto de $\vec{E}$ que aparece en Faraday, también $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (si no hay cargas eléctricas netas presentes). El campo $\vec{E}$ de Faraday es solenoidal sin fuentes ni sumideros y está presente en todo el espacio (a diferencia del campo motor de las cargas en una pila) o en todo el circuito que atrapa flujo variable.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{atrapada}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{atrapado}}$$

Nota: Para aplicar la ley de Faraday necesitamos el flujo de $\vec{B}$, ¿cómo se calcula $\vec{B}$? En general usando magnetostática (Biot-Savart) etc $\rightarrow$ QUASISTATIC

Ejemplo - 5 Un anillo ~~metálico~~ ^{de masa m y} de radio b se suspende horizontalmente pudiendo rotar alrededor de su eje vertical. El anillo está cargado con densidad λ y está inmerso en un campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ (el anillo está en el plano xy) ¿Qué sucede si de repente el campo $\vec{B}_0$ se anula? (¿cuánto ω ?)



Al cambiar bruscamente el campo de B_0 a $B_0 = 0$ hay una variación temporal de $\vec{B}_0$ que hace aparecer un campo motor de las cargas $\vec{E}$ que cuyas líneas de campo son circulares $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y empujan a las cargas a moverse. Si el anillo es conductor se genera una corriente pero si no lo es el anillo comienza a girar. El campo $\vec{E}$ debido produce una corriente que genera un campo $\vec{B}_{\text{ind}}$ inducido que compensa la desaparición de $\vec{B}_0$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -nb^2 \frac{dB}{dt} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi b \Rightarrow$$
$$E = -\frac{b}{2} \frac{dB}{dt}$$

Cada segmento suporta una fuerza

$$d\vec{F} = -\lambda dl \frac{b}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\varphi \Rightarrow$$

cuya suma total es nula pero produce un momento (torque)

$$\vec{M} = \int d\vec{r} \vec{r} \times d\vec{F} = \int b \cdot dF \cdot \vec{u}_z = -\lambda \pi b \frac{b^2}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_z$$

$$= -\lambda \pi b^3 \frac{dB}{dt} \vec{u}_z$$

que produce un giro del anillo

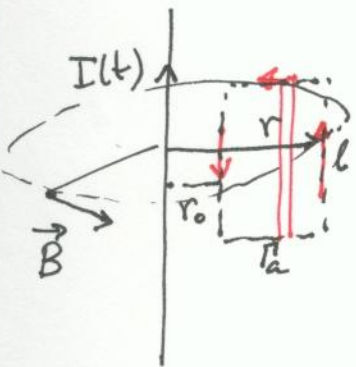
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow dL = -\lambda \pi b^3 dB \Rightarrow \int_{L_i}^{L_f} dL = -\lambda \pi b^3 \int_{B_i}^{B_f} dB$$

$$L_f = \lambda \pi b^3 B_0 \Rightarrow \left[W = \frac{\lambda \pi b^3 B_0}{I_{\text{inercia}}} = \frac{\lambda \pi b^3 B_0}{m b^2} = \frac{\lambda \pi b B_0}{m} \right]$$

Ejemplo-6

Para un hilo infinito por el que circula $I(t)$, calcular el campo eléctrico inducido en función de la distancia al hilo

Si se considera la curva de amper Γ_a , aplicando la aproximación cuasiestática, esto es, calculando el campo $\vec{B}$ y el flujo como si se tratara de un problema magnetostático,



$$B(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$$

$$\oint_{\Gamma_a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r_0) \cdot l - E(r) \cdot l = -\frac{d}{dt} \oint_{S_a} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} =$$

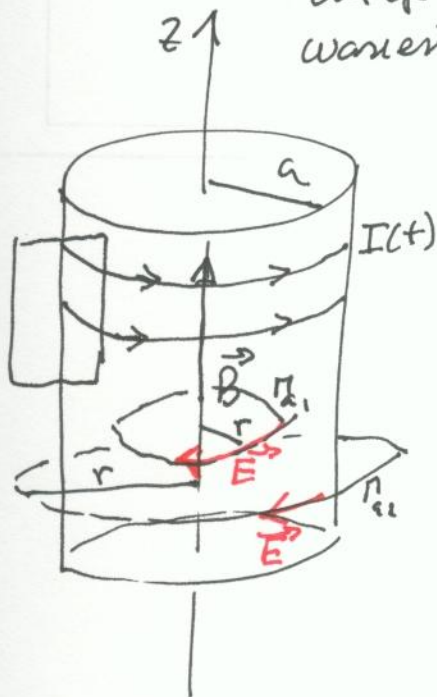
$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} [l \ln r - l \ln r_0] \Rightarrow \vec{E}(r) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln r + K \right) \cdot \vec{u}_z$$

↓
puede depender de t pero no de r

Notemos que si $r \rightarrow \infty$ $E(r) \rightarrow \infty$. ¿Por qué? . Porque a grandes distancias B depende del valor de I en tiempos anteriores. En realidad $B(r)$ ya no se puede calcular así ya que en diferentes puntos del hilo tienen diferentes distancias y por lo tanto diferentes tiempos de retardo. La conclusión para que los cálculos anteriores valgan es que $r \ll c \cdot \tau$ ← tiempo para que I cambie sustancialmente

Ejemplo - 7:
(7.15 p.309)

Solenoides muy largos de radio a y n vueltas por unidad, por el que circula una $I(t)$ en la dirección $\hat{u}_z$. Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) a la distancia r del eje, tanto dentro como fuera. Emplee la aproximación *quasiestática*. (11)



El campo del solenoide

$$\vec{B}(r) = \mu_0 n I \hat{u}_z \quad r < a$$

$$\vec{B}(r) = 0 \quad r > a$$

Por tanto, dentro del solenoide, para $r < a$ usando la curva de Ampere $\vec{u}_\phi$,

$$\Phi = \mu_0 n I \cdot \pi r^2$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r) \cdot 2\pi r \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dI}{dt} \hat{u}_\phi \\ -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{dI}{dt} \end{array} \right.$$

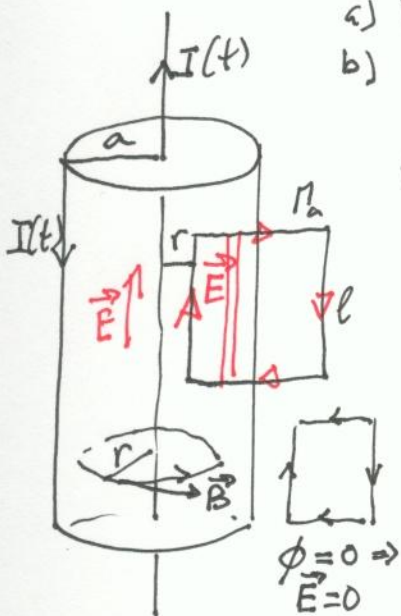
En cambio, fuera del solenoide para $r > a$ $\Phi = \mu_0 n I \cdot \pi a^2$ de donde

$$\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 n \pi a^2}{2\pi r} \frac{dI}{dt} \hat{u}_\phi$$

Ejemplo - 8:
(7.16 p.309)

de corriente alterna $I = I_0 \cos \omega t$ fluye por un hilo recto largo y retorna por un tubo cilíndrico coaxial de radio a .

- a) En qué dirección apunta el campo eléctrico inducido?
b) Suponiendo que el campo se anula en $r \rightarrow \infty$, encuentre $\vec{E}(r, t)$
se ha usado la aprox. quasiestática



Para $r < a$ $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ y para $r > a$ $B = 0$ (y $E = 0$)

El campo eléctrico inducido solo se da para $r < a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{con} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_r^a \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \frac{a}{r}$$

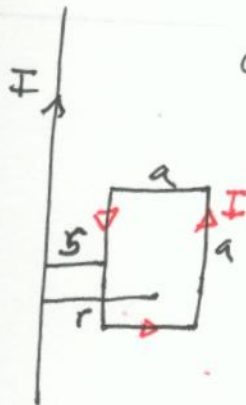
$$E(r) \cdot l = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \log \frac{a}{r} \Rightarrow \vec{E}(r) = +\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin \omega t \cdot \log \frac{a}{r} \hat{u}_z$$

$$I = -I_0 \omega \sin \omega t$$

Ejemplo - 9

(7.18 P.310)

Una espira cuadrada de lado a y resistencia R está a distancia s de un hilo infinito recto por el que circula la corriente constante I . En un instante dado, se corta el hilo, con lo que $I=0$. En qué dirección fluye la corriente en la espira y qué carga total pasa por un punto de la espira mientras fluye esta corriente inducida?



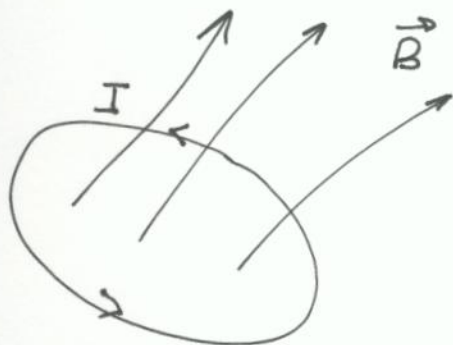
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_s^{s+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{s+a}{s}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = I \cdot R = - \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log \frac{s+a}{s} \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\text{pero } I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = - \frac{\mu_0 a}{2\pi R} \log \frac{s+a}{s} dI$$

$$\int_0^Q dQ = - \frac{\mu_0 a}{2\pi R} \log \frac{s+a}{s} \int_I^0 dI \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \log \frac{s+a}{s}}$$

6.4 - INDUCTANCIA MUTUA Y AUTOINDUCCION



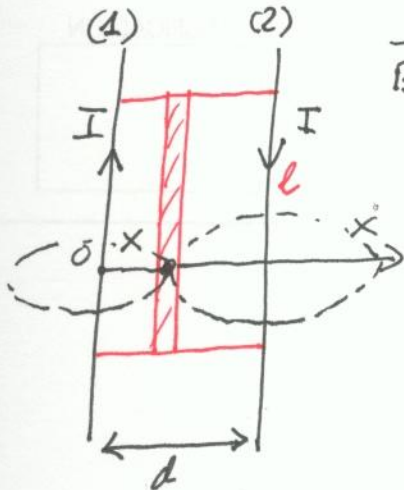
Un circuito recorrido por la corriente I atrapa su propio flujo magnético, con lo que al variar I (y no cambia la forma o la orientación u otra cosa) también se induce un campo eléctrico y por tanto una fuerza electromotriz AUTOINDUCIDA

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \underbrace{\frac{d\phi}{dI}}_L \cdot \frac{dI}{dt} \quad \text{siendo } L \equiv \text{coeficiente de autoinducción}$$

L depende de la disposición geométrica de los conductores que transportan la corriente. y en el caso de que L sea constante

$$\frac{d\phi}{dI} = L \text{ cte} \Rightarrow \phi = L \cdot I \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{\phi}{I}}$$

Ejemplo - 1 Dos hilos infinitos uno de ida y otro de vuelta. Calcular la autoinducción por u. de long. (13)



$$\vec{B}(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} \right] \vec{u}_\phi$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_0^d \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\log x + \log(d-x) \right]_0^d =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\log \frac{x}{d-x} \right]_0^d$$

En realidad los hilos tienen un radio, por ejemplo ε con lo que

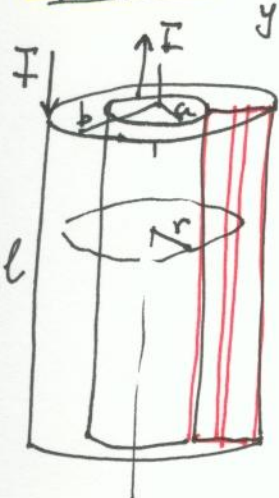
$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\log \frac{x}{d-x} \right]_\varepsilon^{d-\varepsilon} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \left(\frac{d-\varepsilon}{\varepsilon} / \frac{\varepsilon}{d-\varepsilon} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \left(\frac{d-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \log \left(\frac{d-\varepsilon}{\varepsilon} \right)$$

por lo que la inductancia por u. de longitud es

$$L_\ell = L/l = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu_0}{\pi} \log \left(\frac{d-\varepsilon}{\varepsilon} \right)$$

Ejemplo - 2 Cable coaxial de radios a y b con corrientes de ida y vuelta.



para $a < r < b$ $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

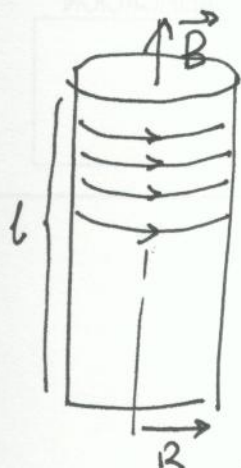
$$L_\ell = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

Ejemplo - 3

7.22 p. 316

Autoinductancia por u de l. de un solenoide largo con n vueltas por u. de l.
ya me hay vueltas en la longitud l

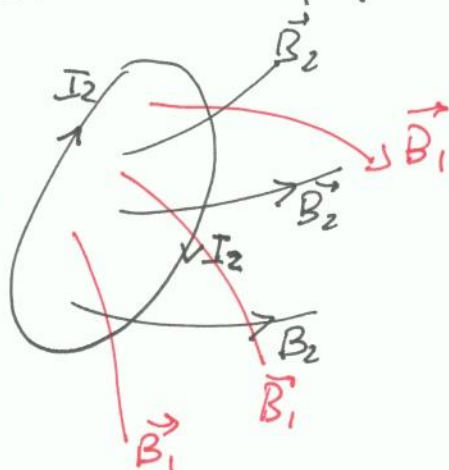
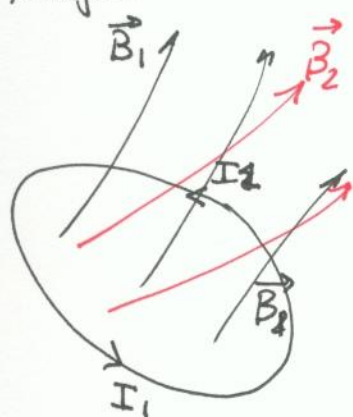
14



$$\phi_l = \mu_0 n I \cdot \pi R^2 \cdot l = L \cdot I$$

$$L = \frac{\phi}{I \cdot l} = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$$

Cuando tenemos dos circuitos, estos pueden interactuar magnéticamente a través de sus flujos.



$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

Por ejemplo, el flujo atrapado por el circuito 1 creado por el 2 es

$$\phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{l_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 = \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi r} d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1$$

definiendo el coeficiente de inductancia mutua M_{12} por la relación $\phi_{12} = M_{12} I_2 \Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$

De análoga manera $\phi_{21} = M_{21} I_1$ con $M_{21} = M_{12}$

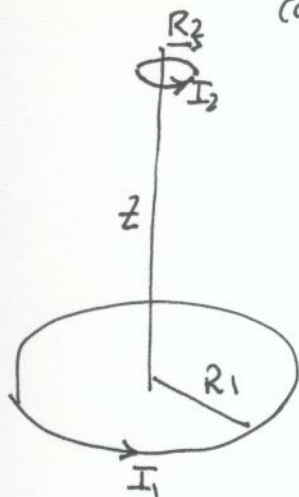
N: M_{12} o M_{21} es una cantidad puramente geométrica que depende de la disposición de los dos circuitos.

N: da fem inducida en un circuito que interacciona con otro

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d\phi_{11}}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{dt} = \underbrace{-L_1 \frac{dI_1}{dt}}_{\mathcal{E}_{11}} - \underbrace{M_{12} \frac{dI_2}{dt}}_{\mathcal{E}_{12}}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{d\phi_{21}}{dt} - \frac{d\phi_{22}}{dt} = \underbrace{-M_{21} \frac{dI_1}{dt}}_{\mathcal{E}_{21}} - \underbrace{L_2 \frac{dI_2}{dt}}_{\mathcal{E}_{22}}$$

Ejemplo-4: Calcular la inductancia mutua entre dos esferas con el mismo eje común y radios $R_1 \gg R_2$

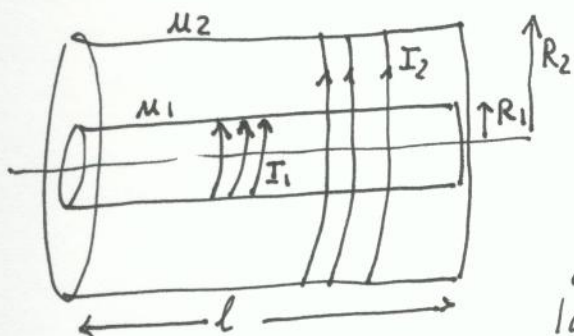


Como $M_{12} = M_{21}$ podemos calcular M_{21} que es más fácil pues puede usarse el campo $\vec{B}_1$ que en un punto z de su eje, su vale.

$$B_1(z) = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{B_1(z) \cdot \pi R_2^2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ejemplo-5: Inductancia mutua entre los dos solenoides de la figura



$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 n_2 I_2 \cdot n_1 l \cdot \pi R_1^2}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 l$$

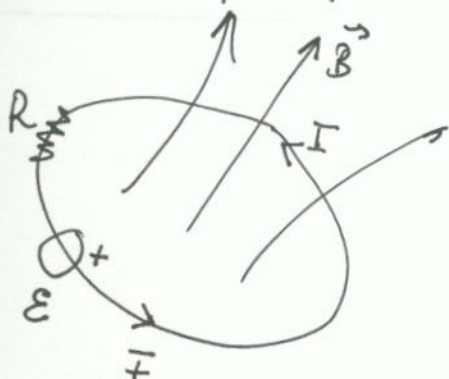
de modo que la inductancia mutua por u de longitud es $M_{12}/l = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2$

Es fácil comprobar en este caso que $M_{12} = M_{21}$

6-5. ENERGIA MAGNETICA

(16)

La energía que se gasta en establecer la corriente en un circuito se emplea en vencer a la fem. autoinducida, que a fin de cuentas es el establecimiento del campo magnético que cruza el circuito, y en calor por efecto Joule en las resistencias.



$$I \cdot R = \varepsilon + \varepsilon_{\text{ind.}} = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$

esta ecuación es el trabajo por u de carga eléctrica. Para una carga dq

$$\underbrace{dq \cdot \varepsilon}_{dW_{\text{bat}}} = \underbrace{I dq \cdot R}_{dW_{\text{Joule}}} + \underbrace{L \frac{dI}{dt} \cdot dq}_{dW_{\text{mag}}}$$

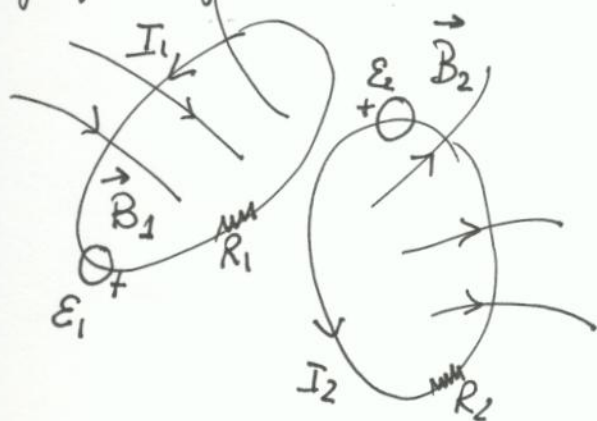
la parte correspondiente a la energía magnética es

$$dW_{\text{mag}} = L \frac{dI}{dt} \cdot dq = L \frac{dq}{dt} \cdot dI = L \cdot I \cdot dI$$

$$W_{\text{mag}} = \int_{I=0}^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} LI^2$$

para un circuito aislado.

Si hay varios circuitos que interactúan entre si intercambiando flujo magnético



$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

$$I_1 R_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{1\text{ind.}}$$

$$I_2 R_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_{2\text{ind.}}$$

(17)

donde $\mathcal{E}_{1\text{ind}} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$

$$\mathcal{E}_{2\text{ind}} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

por tanto el balance de energía para ambos circuitos es

$$I_1 R_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E}_1$$

$$I_2 R_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_{21} \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}_2$$

y la energía magnética para una carga dq

$$dW_1 = L_1 \cdot I_1 dI_1 + M_{12} I_1 \cdot dI_2$$

$$dW_2 = L_2 I_2 dI_2 + M_{21} I_2 \cdot dI_1$$

Si ~~en~~ el proceso de establecimiento de las corrientes finales es tal que en un cierto instante, las corrientes se escriben $I_K(t) = \lambda \cdot I_K$ donde I_K es la corriente final y $\lambda \in (0, 1)$, entonces $dI_K = I_K \cdot d\lambda$

$$W_i = L_i I_i^2 \int_0^1 \lambda d\lambda + M_{12} I_1 I_2 \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2$$

y la energía magnética total es

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ L_i \neq L_j}} M_{ij} I_i I_j$$

y ya que $M_{ij} = M_{ji}$ podemos poner

$$W_T = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i < j \\ i \neq j}} M_{ij} I_i I_j$$

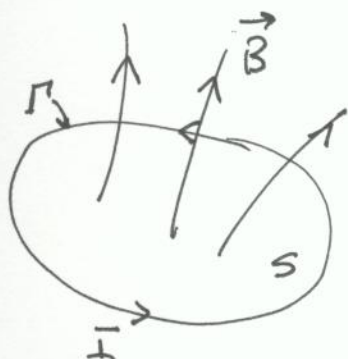
$\mathcal{E}_j$: para dos circuitos

$$W_T = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

La energía magnética también se puede expresar en función de la densidad de energía magnética en todo el espacio donde exista campo magnético mediante.

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{B}^2 \cdot d\text{vol.}$$

En efecto: $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = L \cdot I$



$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} I \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot (I d\vec{\ell})$$

la expresión anterior se puede generalizar a una densidad de corrientes espaciales.

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) \cdot d\text{vol.} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{vol.}} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\text{vol.}$$

empleando que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{J}}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_{\text{vol.}} [\vec{B}^2 - \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] d\text{vol.} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{vol.}} \vec{B}^2 d\text{vol.} - \frac{1}{2\mu_0} \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \right]$$

Los dominios vol y S se refieren al volumen ocupado por las corrientes y la superficie que limita dicho volumen. Si tomamos regiones más grandes, en rigor $\text{vol} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $S \rightarrow S(\mathbb{R}^3)$, la integral de superficie se hace nula ya que el producto $\vec{A} \cdot \vec{B} \sim \frac{1}{r^3}$ mientras que $d\vec{s} \sim r^2$ de modo que

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{B}^2 d\text{vol.}$$

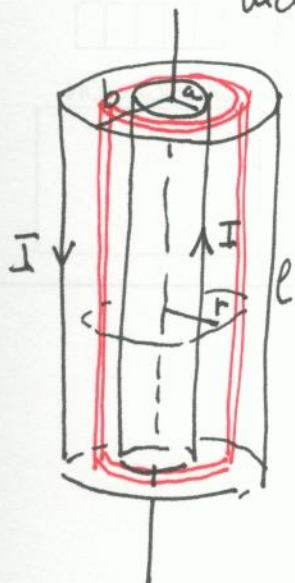
$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot d\text{vol.} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d\text{vol.}$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} \cdot d\text{vol.} = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 d\text{vol.}$$

CA P

La energía se almacena en el campo magnético con densidad $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

Ejemplo-1: Un cable coaxial de radios a y b transporta corriente como indica la figura. Calcular la energía almacenada en una longitud l (19)



$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \quad a < r < b$$

$$\vec{B}(r) = 0 \quad r > b$$

$$W_{\text{MAG}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} \cdot d\text{vol} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \int_a^b \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr \cdot l$$

$$= \frac{2\pi l \mu_0 I^2}{2\mu_0 \cdot 4\pi^2} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \log \frac{b}{a}$$

Teniendo en cuenta que debe ser igual a $W_{\text{MAG}} = \frac{1}{2} L I^2$, podemos deducir lo que vale L

$$L = \frac{2 W_{\text{MAG}}}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ejemplo-2
(7.26 p.320)

Energía almacenada en una sección de longitud l de un solenoide largo (radio R , corriente I y n espiras por u del.) mediante varios métodos

a) $W = \frac{1}{2} L I^2$ con $L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l \Rightarrow W = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$

b) $W = \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot I d\vec{l}$ con $\vec{A} = \frac{\mu_0 n I R}{2} \vec{u}_\phi$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 n I \cdot \pi R^2 = \oint \vec{A} d\vec{l} = A \cdot 2\pi R$$

$$A = \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi R}$$

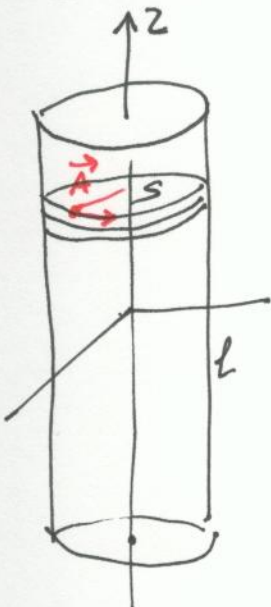
$$\hat{W} = \frac{1}{2} I A \oint d\vec{l} = \frac{1}{2} I \cdot \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \frac{1}{2} \mu_0 n \pi R^2 I^2$$

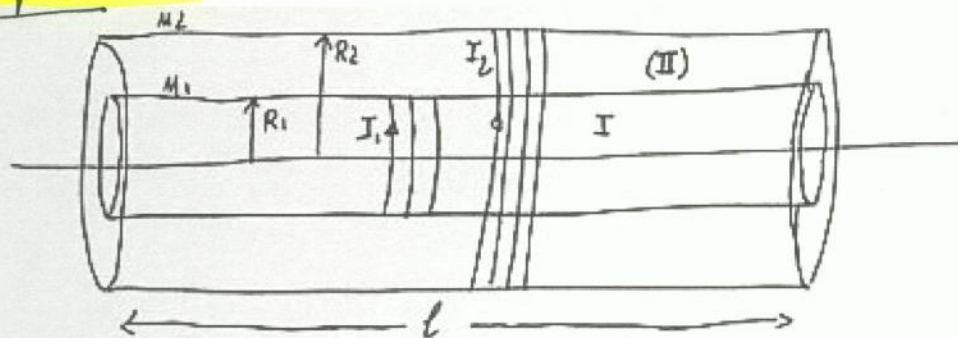
hay que considerar los vueltas que hay en la longitud l por tanto

$$W = \hat{W} \cdot n \cdot l$$

con lo que finalmente $W = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$

ojo: en el flujo hay que considerar las $n \cdot l$ espiras y en la integral $\oint d\vec{l}$ hay que recorrer las $n \cdot l$ espiras también. $\vec{A}$ igual que $\vec{B}$ ha de ser independiente de l





$$W_{MAG} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{R^3} \vec{B}^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_{I} B_I^2 dv + \iiint_{II} B_{II}^2 dv \right]$$

$$B_I = \mu_0 M_1 I_1 + \mu_0 M_2 I_2$$

$$B_{II} = \mu_0 M_2 I_2$$

$$\begin{aligned} W_{MAG} &= \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 M_1 I_1 + \mu_0 M_2 I_2)^2 \pi R_1^2 l + \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 M_2 I_2)^2 \pi (R_2^2 - R_1^2) = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 M_1^2 I_1^2 \pi R_1^2 l + \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 M_2^2 I_2^2 \pi R_2^2 + \frac{1}{\mu_0} \mu_0^2 M_1 M_2 I_1 I_2 \pi R_1^2 l = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M_1^2 I_1^2 \pi R_1^2 l + \frac{1}{2} \mu_0 M_2^2 I_2^2 \pi R_2^2 + \mu_0 M_1 M_2 I_1 I_2 \pi R_1^2 l \end{aligned}$$

Por la formula $W_{MAG} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$

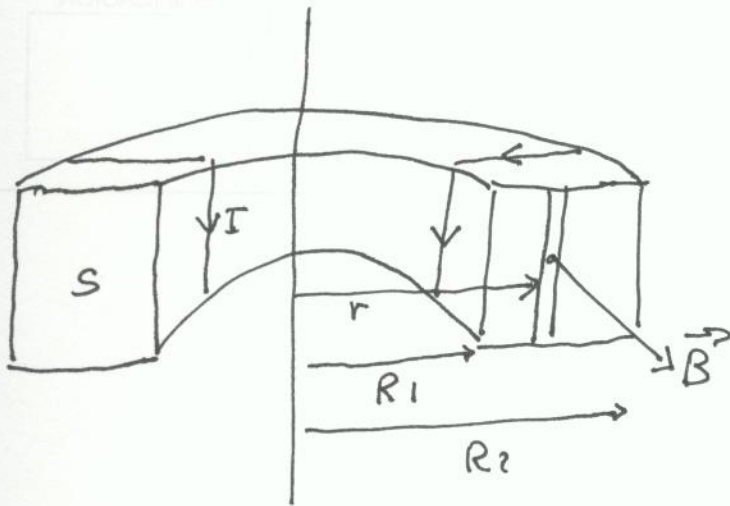
$$L_1 = \frac{\phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot \mu_0 M_1 I_1 \cdot \pi R_1^2}{I_1} = \mu_0 M_1^2 \pi R_1^2 l$$

$$L_2 = \frac{\phi_{22}}{I_2} = \mu_0 M_2^2 \pi R_2^2 l$$

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \mu_0 M_2 I_2 \cdot \pi R_1^2}{I_2} = \mu_0 M_1 M_2 \pi R_1^2 l$$

Ejemplo-4 Energía almacenada en la bobina toroidal de sección cuadrada de la figura. con N espiras ~~por vuelta~~ en total.

21



$$W_{MAG} = \frac{1}{2} L I^2 \text{ con } L = \frac{\Phi}{I}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Phi = N \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{(R_2 - R_1) dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} (R_2 - R_1) \cdot \log \frac{R_2}{R_1}$$

por tanto $L = \frac{\mu_0 N^2 (R_2 - R_1)}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1}$ y la energía magnética es

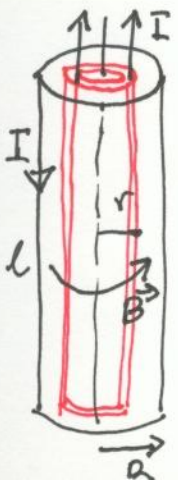
$$W_{MAG} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1}$$

Si lo hacemos por la fórmula directa $W_{MAG} = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 d\text{vol}$, como el campo magnético solo está dentro de la bobina, entonces

$$W_{MAG} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right)^2 \cdot \underbrace{(2\pi r)(R_2 - R_1) dr}_{\text{capa toroidal de sección cuadrada}} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{igual que la anterior})$$

Ejemplo-5: Cable que transporta en volumen la corriente I repartida uniformemente y que retorna por la superficie (por su el campo es nulo en el exterior). Calcule la inductancia por unidad de longitud



$$B(r) = \frac{\mu_0 I r^2 / R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad \text{''} \quad W_{MAG} = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\text{vol} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^R \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right)^2 \cdot r^2 \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\text{de donde } L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \Rightarrow \boxed{L_e = \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

6.6. ECUACIONES DE MAXWELL

(22)

Sabemos que para cualquier campo escalar $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = 0$ siempre y que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ siempre. Si aplicamos esto a la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

se cumple sin problema. Pero se hacen lo mismo con la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \begin{cases} 0 & \text{si solo se } \vec{J} \text{ estacionaria} \\ \neq 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

por tanto la ley de Ampère está incompleta. Recordemos que la ley de Ampère se deriva de la ley de Biot-Savart, que solo se aplica en magnetostática, y por ello no hay que esperar que sea de validez a todas las situaciones.

$$\begin{aligned} \text{En una situación no estacionaria} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

con lo cual la ley de Ampère puede ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

con lo que ahora sí se cumple en cualquier circunstancia que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$. Hay también una consecuencia inmediata. Los fuentes de $\vec{B}$ no son solo los corrientes $\vec{J}$ sino también los campos eléctricos variables. Suele llamarse $\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ corriente de desplazamiento aunque no es una corriente de portadores como lo es $\vec{J}$.

Con estas correcciones, las ecuaciones de Maxwell en el espacio vacío o de materia quedan:

$$i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ley de Gauss})$$

$$ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{sin monopolos})$$

$$iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{ley de Faraday})$$

$$iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{ley de Ampère-Maxwell})$$

Hay que añadir además la ley de fuerza $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

N: la ecuación de continuidad se deriva de las ecuaciones de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cuando estamos en presencia de materia polarizable e imantable, las ecs de Maxwell deben ser modificadas

$$i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \underbrace{\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\vec{J}_d}$$

junto a las ecuaciones constitutivas

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \\ \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \end{array}$$

Respecto a la polarización, un cambio en la polarización de un dieléctrico da lugar a una corriente de carga ligada $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

$$\text{de manera que } \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$$

N: Una variación en la magnetización $\vec{M}$ no da lugar a una acumulación de carga o corriente ya que $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ y $\vec{J}_b$ varía cuando $\vec{M}$ varía.

Por tanto la densidad de carga total y la corriente

$$\rho = \underbrace{\rho_f}_{\text{libre}} + \underbrace{\rho_b}_{\text{ligada}} = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

por tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho_f \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \Rightarrow$$

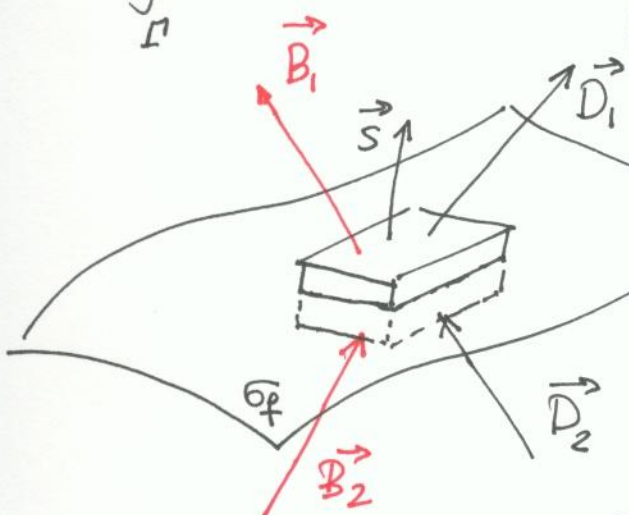
$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)}_{\vec{H}} = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

6.7. CONDICIONES DE CONTORNO PARA LOS CAMPOS

En general $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ y $\vec{H}$ serán discontinuas en la frontera entre dos medios diferentes o en una superficie que transporte una densidad de carga σ o una densidad de corriente $\vec{K}$.
Las ecuaciones de Maxwell en forma integral son

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_e(s) \\ \text{ii)} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sobre cualquier superficie cerrada } S$$

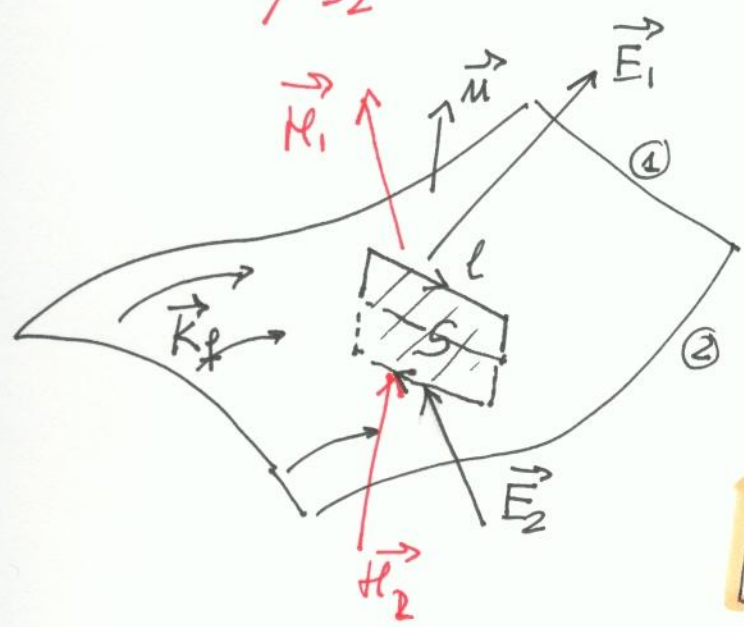
$$\left. \begin{aligned} \text{iii)} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \text{vi)} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_f(\Gamma) + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \text{ para cualquier superficie } S \text{ limitada por la curva cerrada } \Gamma$$



$$\vec{D}_1 \cdot \vec{S} - \vec{D}_2 \cdot \vec{S} = \sigma_f \cdot S$$

$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0$$



$$\vec{E}_1 \cdot \vec{l} - \vec{E}_2 \cdot \vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

pero tal en el límite cuando el lazo se estrecha, el flujo cae a cero y

$$E_1'' - E_2'' = 0$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l} - \vec{H}_2 \cdot \vec{l} = I_f = (\vec{K}_f \times \vec{n}) \cdot \vec{l}$$

$$\vec{H}_1'' - \vec{H}_2'' = \vec{K}_f \times \vec{n}$$

componentes paralelas a la superficie de separación

$$i) \quad \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f \quad (\text{si no hay carga } \sigma_f = 0)$$

$$ii) \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$iii) \quad E_1'' - E_2'' = 0$$

$$iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1'' - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2'' = \vec{K}_f \times \vec{u} \quad (\text{si no hay corriente superficial } \vec{K}_f = 0)$$
