

Campos magnéticos caóticos creados por cables de corriente continua

Jacobo Aguirre¹ y Daniel Peralta-Salas²

¹ Centro de Astrobiología, CSIC-INTA.
Ctra. de Ajalvir km 4, 28850 Torrejón de Ardoz,
Madrid, España

² Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM.
C/ Nicolás Cabrera 13-15, 28049 Cantoblanco,
Madrid, España

La existencia de campos magnéticos caóticos es un fenómeno bien conocido en la física de sistemas complejos tales como los reactores de fusión nuclear o las atmósferas estelares. En este artículo mostramos que los cables de corriente continua también pueden dar lugar a campos magnéticos caóticos, incluso en configuraciones muy sencillas, refutando así la creencia ampliamente extendida de que las líneas magnéticas asociadas a filamentos de corriente son siempre curvas cerradas. Este fenómeno, lejos de ser una rareza académica, está asociado a circuitos genéricos de corriente, por lo que está ubicuamente presente en el mundo tecnológico moderno.

1. Introducción

Es bien conocido desde principios del siglo XIX, gracias al trabajo experimental de Oersted y a la formulación matemática de Ampère, que el flujo de corrientes eléctricas genera campos magnéticos. Cuando las corrientes son continuas y están confinadas en cables eléctricos muy delgados (que denominaremos *hilos de corriente* en lo que sigue), los campos magnéticos generados se describen mediante la *ley de Biot-Savart*, descubierta empíricamente en 1820.

Los campos magnéticos creados por hilos de corriente son de gran utilidad en muy diversas disciplinas científicas, tales como ingeniería eléctrica, espectroscopía, biomedicina y física nuclear, y se podría afirmar que son omnipresentes en el mundo tecnológico. Una de las formas más extendidas de visualizar un campo magnético, que matemáticamente se describe mediante un campo vectorial, fue introducida por Faraday alrededor de 1850, y consiste en representar las líneas u órbitas (curvas integrales) de dicho campo. Esto define lo que se denominan *líneas magnéticas* (con menos precisión a veces se habla de

líneas de fuerza), que son curvas tales que el campo magnético es tangente a ellas. A diferencia de lo que ocurre cuando trabajamos con campos eléctricos, la fuerza creada sobre una partícula cargada que se mueve con velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético no es paralela a las líneas de campo, sino perpendicular a ellas y a \vec{v} , como queda plasmado en la expresión matemática de la *fuerza de Lorentz*. Por este motivo, las trayectorias de cargas en un campo magnético son en general totalmente distintas y mucho más complejas que las líneas magnéticas asociadas a dicho campo, siendo estas últimas las protagonistas fundamentales de este artículo.

En muchos libros de texto se explica que las líneas magnéticas forman siempre lazos cerrados, por ejemplo en clásicos del electromagnetismo y la física general como Stratton [1, capítulo 4.1, página 225], Reitz & Milford [2, sección 10-7, página 201], Jefimenko [3, capítulo 10-4, página 328], Sadiku [4, capítulo 7.5, página 311] y Tipler [5, sección 29-3, página 897]. Esta falsa creencia se plasma incluso en varias referencias online muy actuales [6,7] (aunque hay honrosas excepciones, como la web del Departamento de Física Aplicada III de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla [8]), y de hecho, sigue muy extendida entre físicos e ingenieros, como hemos podido comprobar en múltiples conversaciones con diversos colegas. El argumento que se esgrime habitualmente para justificar que toda línea magnética debe ser cerrada es que los campos magnéticos son campos vectoriales *solenoidales*, y por tanto el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada y sin borde es nulo. Esto equivale a decir que todo el flujo entrante se compensa por flujo saliente, de lo cual se concluye directamente que las líneas magnéticas no tienen inicio ni final y son cerradas. Un análisis detallado de esta demostración revela que no es concluyente y que, como veremos a continuación, está lejos de ser correcta.

Recientemente, los autores hemos probado [9] usando circuitos de corriente muy sencillos que las líneas magnéticas no son necesariamente cerradas y que pueden ser *cuasiperiódicas* e incluso *caóticas* en regiones grandes del espacio, refutando de esta manera la extendida creencia de que los hilos de corriente únicamente producen campos magnéticos simples. La existencia de campos magnéticos caóticos está bien establecida desde hace décadas en otras disciplinas de la física, como la magnetohidrodinámica, el confinamiento de plasmas y las atmósferas estelares. Este hecho suele justificarse argumentando que las fuentes del campo son complejas y presentan en sí mismas cierto tipo de no linealidad. Lo sorprendente de los ejemplos que mostraremos en las próximas secciones es que los campos están generados por circuitos eléctricos, por lo que la única ecuación relevante es la ley de Biot-Savart, que es lineal. El objetivo de este artículo es describir los modelos caóticos introducidos en [9,10] y mostrar a los lectores la complejidad, todavía poco entendida, que pueden presentar los

campos magnéticos creados por hilos de corriente. Lejos de tratarse de modelos puramente académicos, investigaciones recientes siguiendo esta línea de trabajo por parte del grupo de M. Hosoda en Osaka [11,12], han mostrado la ubicuidad del caos magnético en los circuitos eléctricos modernos. Este llamativo fenómeno ha sido recogido en publicaciones tan diversas como Physical Review Focus [13], CERN Courier [14], American Journal of Physics [15] y la revista de divulgación científica francesa Pour la Science [16].

La distribución de este artículo es la siguiente. En la sección 2 recordaremos las ecuaciones fundamentales de los campos magnéticos creados por hilos de corriente e introduciremos un primer modelo que presenta líneas magnéticas cuasiperiódicas. Perturbando este modelo mostraremos cómo es posible generar campos caóticos, y haremos un estudio detallado de las líneas del campo en la sección 3. Finalmente, en la sección 4 discutiremos la conexión entre las líneas de campo y el movimiento de partículas cargadas y plantearemos posibles líneas futuras de investigación en este contexto.

2. La ley de Biot-Savart y un modelo sencillo de cables de corriente

Los campos magnéticos creados por hilos de corriente eléctrica se pueden describir matemáticamente de forma sencilla mediante la ley de Biot-Savart. En efecto, si L representa un filamento que conduce una corriente eléctrica constante de intensidad J , el campo magnético creado por esta configuración en el punto \vec{q} está dado por:

$$\vec{B}(\vec{q}) = \frac{\mu J}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{q} - \vec{l})}{|\vec{q} - \vec{l}|^3} \quad (1)$$

donde μ es la constante de permeabilidad magnética, que en el vacío vale $4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$, y \vec{l} es un vector tangente al filamento L que apunta en la dirección de la corriente eléctrica. El principio de superposición (linealidad) establece que el campo magnético \vec{B} creado por N filamentos eléctricos (L_i, J_i) está dado por la suma de los N campos magnéticos individuales \vec{B}_i , esto es $\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$.

En los cursos básicos de electromagnetismo se prueba que la Ec. (1) define un campo vectorial suave en todo el espacio excepto sobre el filamento, donde es divergente, y que dicho campo es solenoidal, esto es, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Si denotamos por (B_x, B_y, B_z) las componentes del campo \vec{B} , entonces las líneas magnéticas se describen matemáticamente mediante las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{ds} = B_x \quad (2)$$

$$\frac{dy}{ds} = B_y \quad (3)$$

$$\frac{dz}{ds} = B_z \quad (4)$$

donde s es la variable que parametriza las líneas del campo magnético \vec{B} . En general estas ecuaciones son muy difíciles de integrar y hay que recurrir a métodos numéricos para describir las líneas magnéticas.

Introducimos a continuación un modelo básico de hilos de corriente en el cual pueden describirse completamente las líneas magnéticas, pero que es lo suficientemente complicado como para exhibir propiedades no triviales. La configuración C que consideramos consta de dos filamentos L_1 y L_2 , donde el cable L_1 es rectilíneo e infinito y el cable L_2 es una espira circular de radio unidad sobre un plano perpendicular a L_1 y cuyo centro está en L_1 (véase figura 1(a)). Es conveniente elegir el sistema de coordenadas de tal forma que $L_1 = \{x=y=0\}$ y $L_2 = \{x^2+y^2=1, z=0\}$. Asumimos que ambos cables conducen la misma corriente J , el hilo L_1 en la dirección del vector unitario \vec{u}_z y el hilo L_2 en la dirección del vector unitario axial \vec{u}_ϕ . La ley de Biot-Savart puede integrarse tanto para L_1 como para L_2 , dando sendos campos \vec{B}_1 y \vec{B}_2 , lo cual permite calcular mediante el principio de superposición el campo total de la configuración C [9], que expresado en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) tiene la forma (módulo un factor $\mu J/4\pi$):

$$\vec{B}_C(r, \phi, z) = \vec{B}_1(r, \phi, z) + \vec{B}_2(r, \phi, z) \quad (5)$$

$$= \frac{2\vec{u}_\phi}{r} + r^{-1} \left[\frac{\partial I(r, z)}{\partial z} \vec{u}_r - \frac{\partial I(r, z)}{\partial r} \vec{u}_z \right] \quad (6)$$

donde $I(r, z)$ es cierta función que se puede escribir explícitamente en términos de integrales elípticas de primera y segunda especie, pero cuya expresión omitiremos por sencillez.

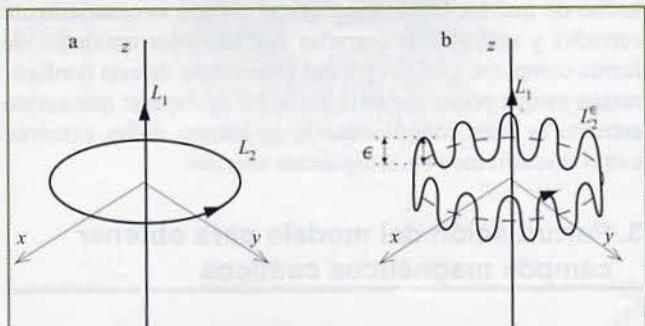


Figura 1. Representaciones pictóricas de las configuraciones de hilos C (a) y su versión perturbada C_ϵ (b). Las direcciones de las corrientes se marcan con flechas. Por claridad, el valor de la perturbación ϵ se ha magnificado en la figura.

Un primer resultado importante que se sigue de la Ec. (6) es que las líneas magnéticas están confinadas en las superficies de nivel $I(r, z)=\text{constante}$, las cuales son toros de revolución como muestra un análisis más detallado [9]. Las líneas magnéticas del campo creado por L_1 son círculos alrededor del eje z , mientras que las líneas creadas por la espira son curvas cerradas alrededor de L_2 sobre las superficies de nivel de $I(r, z)$. La suma de ambas contribuciones da lugar a las líneas magnéticas de la configuración total C , las cuales resultan ser mucho más complejas como veremos a continuación.

Es conveniente trabajar con el campo $\vec{X} := \frac{r^2}{2} \vec{B}_C$, que es proporcional a \vec{B}_C y por tanto define las mismas líneas magnéticas. Si denotamos por T_1 y T_2 los periodos (en el parámetro s) de las líneas magnéticas de $\frac{r^2}{2} \vec{B}_1$ y $\frac{r^2}{2} \vec{B}_2$ respectivamente, se puede ver fácilmente que $T_1 = 2\pi$ y $T_2 = F(I)$ para cierta función no constante F que depende de $I(r, z)$, y cuya expresión explícita no es relevante. El número de rotación ω de \vec{X} se define como

$$\omega := \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{F(I)},$$

y proporciona la información de cuándo las líneas magnéticas son cerradas (si ω es un número racional), y cuándo no se cierran nunca (si ω es un número irracional). Como este número sólo depende de I , concluimos que sobre las superficies magnéticas para las cuales $F(I) = \frac{2\pi q}{p}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$, todas las líneas magnéticas son cerradas, pero el resto de superficies magnéticas son recorridas por las líneas magnéticas densamente, definiendo lo que se denominan curvas cuasiperiódicas. Además, en las superficies magnéticas en las que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, las líneas magnéticas dan p vueltas alrededor de la espira circular y q vueltas alrededor del eje z hasta que se cierran, y por tanto definen curvas cerradas no triviales de tipo nudos tóricos $p-q$.

La configuración C , a pesar de ser muy sencilla, ilustra el hecho de que las líneas magnéticas no son necesariamente cerradas y que siendo cerradas pueden estar anudadas de forma compleja. Una propiedad importante de esta configuración es que posee simetría axial. Es de esperar que surjan estructuras más complicadas si se rompe dicha simetría, como discutiremos en la siguiente sección.

3. Perturbación del modelo para obtener campos magnéticos caóticos

Basándonos en el modelo descrito en la sección anterior, es relativamente sencillo construir nuevas configuraciones que den lugar a campos magnéticos caóticos. Conviene especificar qué se entiende por caos en este contexto. Dado que los

campos magnéticos son solenoidales, no presentan regiones de atracción o repulsión de líneas magnéticas, por lo que no existen atractores caóticos como el célebre atractor de Lorenz. El caos al que nos referimos es lo que técnicamente se denomina *caos hamiltoniano* [17] y está asociado al comportamiento errático de las líneas magnéticas, esto es, a líneas confinadas en un conjunto compacto, que no son ni cerradas ni cuasiperiódicas, y que pasan arbitrariamente cerca de todos los puntos de dicho conjunto. Estas líneas, además, exhiben una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales que se manifiesta en que su máximo exponente de Lyapunov es positivo. En este tipo de caos, las líneas caóticas conviven típicamente con regiones de estabilidad y con líneas cuasiperiódicas, como veremos en los sistemas que se describen en esta sección.

Consideremos un filamento L_2^ϵ que conduce una intensidad de corriente J y que se obtiene perturbando la espira L_2 para romper la simetría axial. Con esta notación y sin ser demasiado precisos, el parámetro ϵ representa la magnitud de la perturbación. Nótese que por el momento no especificamos la forma en que se perturba el hilo L_2 . La nueva configuración C_ϵ formada por L_1 y L_2^ϵ origina un campo magnético \vec{B}_C que en general no puede calcularse analíticamente, pero que se puede estudiar muy bien numéricamente.

Si ϵ es suficientemente pequeño, es fácil ver usando la ley de Biot-Savart [9] que el campo magnético no varía demasiado, esto es, $\vec{B}_C = \vec{B}_C + O(\epsilon)$. La propiedad interesante es que esta pequeña variación es suficiente para destruir las líneas magnéticas cerradas de \vec{B}_C y muchas de las líneas cuasiperiódicas, lo cual genera líneas caóticas para perturbaciones genéricas. La justificación rigurosa de este fenómeno hace uso de la teoría KAM y el teorema de Birkhoff-Smale [18], lo cual excede los objetivos de este trabajo,

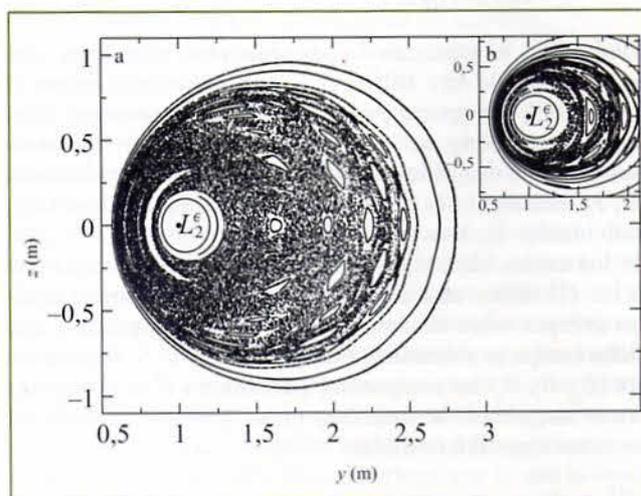


Figura 2. Secciones de Poincaré sobre el plano $\{x=0\}$ del campo magnético creado por la configuración perturbada C_ϵ con $\epsilon=0.05$ (a) y $\epsilon=0.02$ (b). En ambas figuras se indica el punto de intersección del cable circular perturbado L_2^ϵ con el plano $\{x=0\}$.

por lo que sugerimos al lector interesado que consulte la referencia [9]. En su lugar, ilustraremos la aparición del caos mediante simulaciones numéricas sobre perturbaciones concretas, aunque enfatizamos que se observan fenómenos similares para cualesquiera otras perturbaciones que rompan la axisimetría.

En primer lugar, consideremos una perturbación particularmente sencilla en la que L_2^ϵ se deforma mediante k oscilaciones sinusoidales de amplitud ϵ en la dirección del eje z (véase figura 1(b)). Para realizar las simulaciones numéricas hemos tomado $k=10$ y $\epsilon=0.05$ y 0.02 , y la corriente $J=1$ aunque desde un punto de vista cualitativo, los resultados son independientes de la elección de J . El cálculo numérico de las líneas magnéticas requiere una doble integración, por un lado el cálculo de la integral (1) de la ley de Biot-Savart para el hilo L_2^ϵ (que no se puede obtener de forma analítica explícita) y por otro lado la integración de las ecuaciones diferenciales que definen las líneas magnéticas, véanse las Ecs. (2)-(4).

En las figuras 2(a) ($\epsilon=0.05$) y 2(b) ($\epsilon=0.02$) mostramos los puntos de intersección con el plano $\{x=0\}$ de varias líneas magnéticas integradas numéricamente mediante el procedimiento anteriormente descrito (estas representaciones, muy útiles en dinámica no lineal, se conocen como secciones de Poincaré [17]). Se observa una región caótica alrededor de L_2^ϵ (zona punteada) que contiene varias islas KAM (regiones de estabilidad que contienen líneas magnéticas cerradas) y varios toros KAM en el exterior de la zona caótica. Hemos realizado todos los cálculos en sistema internacional, por lo que la unidad con la que están representados los ejes y y z en la figura es el metro. Puede apreciarse que, sorprendentemente, el volumen ocupado por la zona caótica es muy extenso teniendo en cuenta que la perturbación aplicada es muy pequeña. El volumen de esta región disminuye a medida que la perturbación ϵ decrece (compárense las figuras 2(a) y 2(b)), de tal forma que en el límite $\epsilon=0$, recuperamos el modelo no perturbado, que no es caótico. La diversa tipología de líneas magnéticas presentes en este sistema se ilustra en la figura 3, que representa respectivamente una línea cerrada estable del interior de una isla KAM, una línea cuasiperiódica también contenida en dicha región, y una línea caótica.

Es importante observar que los campos magnéticos caóticos no están asociados únicamente a hilos eléctricos con curvatura (como es el caso del cable L_2^ϵ), sino que pueden crearse usando configuraciones de corrientes rectilíneas. El ejemplo más sencillo consiste en sustituir el hilo circular perturbado L_2^ϵ de la configuración C_ϵ por una espira cuadrada. Dicho sistema, que denotaremos mediante el símbolo C_ϵ^* , puede verse como una perturbación (no pequeña) del modelo C que rompe la simetría axial, y ha sido estudiado en detalle en [10]. El campo magnético \vec{B}_C creado por esta configuración puede escribirse de forma explícita (la integral de Biot-Savart puede expresarse en términos de funciones elementales), lo cual

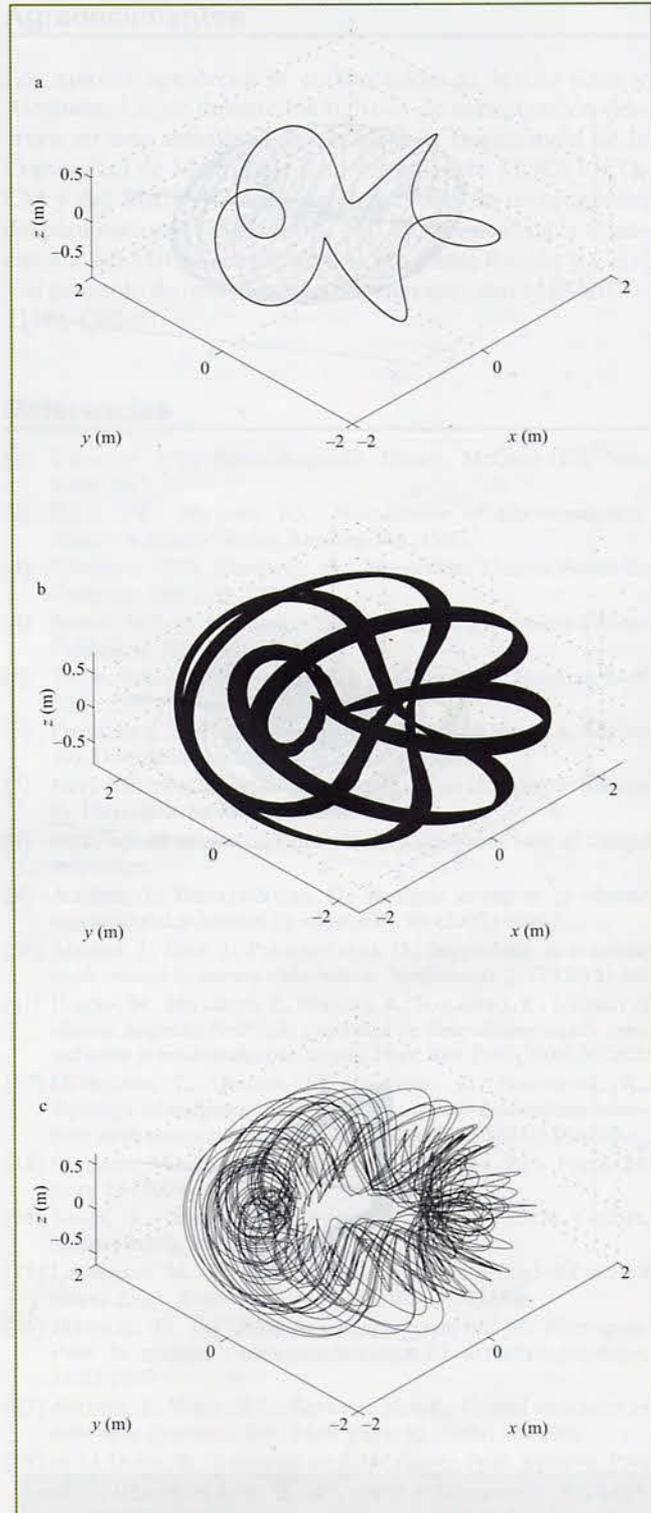


Figura 3. Representación de tres tipos de líneas magnéticas presentes en el sistema perturbado C_ϵ (véase la figura 1(b)) para $\epsilon=0.05$. De arriba abajo: una línea periódica estable, una línea cuasiperiódica y una línea caótica.

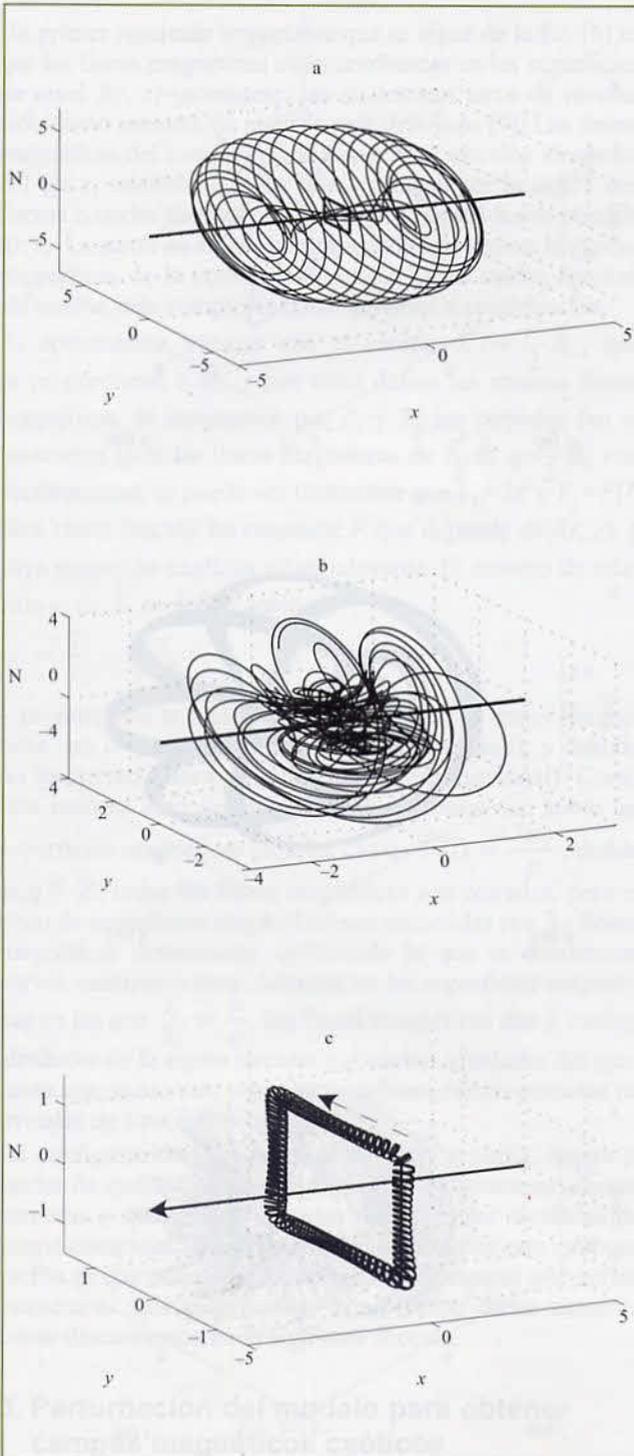


Figura 4. Representación de tres tipos de líneas magnéticas presentes en el sistema C^* (a) línea cuasiperiódica de gran amplitud; (b) línea caótica; (c) línea cuasiperiódica pegada a la espira cuadrada. Por claridad, se han dibujado todos los cables así como la dirección de las corrientes que conducen (ver (c)).

simplifica el cálculo numérico de las líneas magnéticas. En la figura 4 mostramos distintos tipos de líneas magnéticas que exhibe el campo \vec{B}_C : la línea que aparece en (a) es cuasiperiódica y está fundamentalmente influenciada por el hilo infinito; las líneas magnéticas que están influenciadas por los dos cables de forma comparable son de tipo caótico, véase (b), mientras que cerca de la espira cuadrada las líneas son cuasiperiódicas (c). El caos en este sistema es muy intenso, ya que en las regiones caóticas no se aprecian islas de estabilidad y el exponente de Lyapunov máximo es muy alto.

Otras configuraciones de cables que dan lugar a campos magnéticos caóticos han sido recientemente estudiadas numéricamente por el equipo de M. Hosoda en Osaka [11,12], incluyendo circuitos eléctricos que aparecen en aplicaciones realistas, tales como televisores, teléfonos móviles u ordenadores [13]. Estos estudios tienen en cuenta los tamaños e intensidades reales de los circuitos que suelen encontrarse en los aparatos electrónicos, así como la pequeña pero inevitable contribución del campo magnético terrestre, lo cual permite concluir que los campos magnéticos caóticos ya forman parte indisoluble del mundo tecnológico actual.

4. Conclusiones, complejidad en el movimiento y futuras líneas de investigación

En este artículo se han presentado configuraciones de corriente muy sencillas que dan lugar a campos magnéticos caóticos, en el sentido de que poseen líneas magnéticas no cerradas que están confinadas en regiones compactas y que se comportan de forma errática conviviendo con líneas periódicas y cuasiperiódicas. Estos resultados son puramente teóricos, por lo que se plantea la necesidad de detectar experimentalmente las líneas magnéticas cuasiperiódicas y caóticas descritas en las secciones anteriores. La construcción experimental de circuitos de corriente que generan campos caóticos no es problemática, ya que son configuraciones bastante elementales y no tienen por qué ser como las descritas en este trabajo (por ejemplo, el cable infinito puede sustituirse por una espira circular de radio mucho mayor que la espira horizontal y el campo resultante sigue siendo caótico). El principal problema consiste en diseñar un instrumento, similar a un magnetómetro o brújula tridimensional, que sea lo suficientemente preciso como para poder seguir líneas magnéticas individuales en el espacio y detectar si su comportamiento es regular o caótico. Por el momento ésta es una línea de investigación completamente abierta, por lo que cualquier contribución sería bienvenida. Una forma natural y quizás más factible experimentalmente de intentar detectar la complejidad de las líneas magnéticas es introducir una partícula cargada en el campo magnético creado por la configuración de estudio, y analizar el movimiento de dicha carga. Lamentablemente se sabe muy poco de la

conexión entre la complejidad del campo y la complejidad del movimiento, por lo que no es claro que campos altamente caóticos (como el de la configuración C^* descrita en la sección 3) generen movimientos especialmente complejos. De hecho, tal conexión, de existir, es necesariamente sutil, como muestra nuestro estudio llevado a cabo en [19]. En dicha referencia se analiza el movimiento de una carga en presencia de tres sistemas distintos: L_1 , L_2 y C (en la notación de la sección 2). El movimiento en presencia del hilo infinito L_1 es integrable (aparte de la energía, posee otras dos cantidades conservadas), pero los movimientos resultan ser mucho más complejos en los otros dos casos. La simetría axial de la espira L_2 y del sistema C (unión de L_1 y L_2) implica la existencia de una cantidad conservada del movimiento adicional (momento angular generalizado) en ambos sistemas, pero esto no es suficiente para garantizar la integrabilidad. De hecho, los estudios numéricos en [19] revelan que el movimiento en L_2 y C es extraordinariamente complicado, exhibiendo las típicas secciones de Poincaré de sistemas caóticos, la existencia de exponentes de Lyapunov máximos positivos y las habituales cuencas fractales asociadas al scattering caótico. En particular, no se observan diferencias muy significativas en la caoticidad de ambos sistemas, a pesar de que las líneas magnéticas del sistema C –cuasiperiódicas– son más complejas que las del sistema L_2 –periódicas– (aunque en ninguno de los dos casos las líneas son caóticas). La conclusión preliminar es que campos magnéticos con líneas magnéticas muy sencillas ya son capaces de originar movimientos caóticos, por lo que no es claro cómo el movimiento de cargas podría discernir la naturaleza simple o compleja del campo magnético subyacente. A pesar de las dificultades mencionadas en el párrafo anterior, es fundamental comprender la acción de campos caóticos sobre partículas cargadas para poder vislumbrar posibles aplicaciones prácticas de estos fenómenos. La comprensión de cómo afectan las líneas magnéticas caóticas a la materia podría tener consecuencias relevantes en áreas como la ingeniería eléctrica o la magnetobiología, aunque por el momento no podemos concluir nada en esta dirección, que requiere estudios experimentales interdisciplinarios muy elaborados. El Dr. Nakamura, coautor de [11,12], afirma en [13] que “el caos robusto podría ser bueno. Los campos magnéticos no caóticos podrían ser tan fuertes que interrumpieran el flujo de corriente en algunos puntos del filamento. Por el contrario, el caos dispersaría el campo magnético macroscópico garantizando la operatividad estable de instrumentos tecnológicos modernos”. Atendiendo a lo que hemos expuesto anteriormente, nuestros resultados preliminares apuntan a que no hay suficiente fundamento para este tipo de afirmaciones, ya que estamos lejos de entender en profundidad la influencia de la naturaleza de las líneas sobre la naturaleza de las trayectorias. Por todo esto, animamos desde aquí a los lectores a estudiar un tema con fructíferas ramificaciones en física teórica, computacional y aplicada.

Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración de Jaume Giné y Alejandro Luque durante los trabajos de investigación descritos en este artículo. J.A. agradece la financiación de la Comunidad de Madrid mediante el proyecto MODELICO-CM y del MICINN mediante el proyecto de investigación del plan nacional FIS2008-05273. D.P.-S. agradece la financiación del MICINN mediante el programa Ramón y Cajal y el proyecto de investigación del plan nacional MTM2010-21186-C02-01.

Referencias

- [1] STRATTON, J.A., *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.
- [2] REITZ, J.R., MILFORD, F.J., *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley, Reading-MA, 1967.
- [3] JEFIMENKO, O.D. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific Company, Star City, 1989.
- [4] SADIKU, M.N.O. *Elements of Electromagnetics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1994.
- [5] TIPLER, P.A. *Physics for Scientists and Engineers*. Freeman, New York, 1999.
- [6] FITZPATRICK, R. *Electromagnetism and Optics* (Chapter 8, Section 10). Disponible en <http://farside.ph.utexas.edu>.
- [7] Navy Electrical Engineering Training Series (Chapter 1, Section 8). Disponible en www.tpub.com/neets.
- [8] [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley de Gauss para el campo magnético](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ley_de_Gauss_para_el_campo_magnetico).
- [9] AGUIRRE, J., PERALTA-SALAS, D., *Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires*. EPL 80 (2007) 60007.
- [10] AGUIRRE, J., GINÉ, J., PERALTA-SALAS, D., *Integrability of magnetic fields created by current distributions*. Nonlinearity 21 (2008) 51-69.
- [11] HOSODA, M., MIYAGUCHI, T., IMAGAWA, K., NAKAMURA, K., *Ubiquity of chaotic magnetic-field lines generated by three-dimensionally crossed wires in modern electric circuits*. Phys. Rev. E 80 (2009) 067202.
- [12] MIYAGUCHI, T., HOSODA, M., IMAGAWA, K., NAKAMURA, K., *Topology of magnetic field lines: chaos and bifurcations emerging from two-action systems*. Phys. Rev. E 83 (2011) 016205.
- [13] SCHIRBER, M., *Magnetic fields in chaos*. Phys. Rev. Focus 24, story 24 (2009).
- [14] SWAIN, J., *Simple circuits create chaos*. CERN Courier, Sciencewatch, 20/01/2010.
- [15] LIEBERHERR, M., *The magnetic field lines of a helical coil are not simple loops*. Amer. J. Phys. 78 (2010) 1117-1119.
- [16] MASHAAL, M. *Du chaos magnétique avec des fils électriques*. Pour la science (www.pourlascience.fr) actualités-physique, 13/01/2010.
- [17] AGUIRRE, J., VIANA, R.L., SANJUÁN, M.A.F., *Fractal structures in nonlinear dynamics*. Rev. Mod. Phys. 81 (2009) 333-386.
- [18] DE LA LLAVE, R., *A tutorial on KAM theory*. Proc. Sympos. Pure Math. 69 (2001) 175-292. Available at <ftp://ftp.ma.utexas.edu/pub/papers/llave/tutorial.pdf>
- [19] AGUIRRE, J., LUQUE, A., PERALTA-SALAS, D., *Motion of charged particles in magnetic fields created by symmetric configurations of wires*. Phys. D 239 (2010) 654-674.