

5- CAMPO MAGNETICO EN LA MATERIA

20

Los constituyentes de la materia, átomos y moléculas, pueden ser considerados como pequeños dipolos magnéticos los cuals están en principio orientados al azar por la agitación térmica. Por aplicación de un campo magnético externo pueden sufrir un torque que los obligue a orientarse bien en la dirección del campo (paramagnetismo) o bien en dirección opuesta al campo (diamagnetismo). Existen otros materiales, los ferromagnéticos, que tienen la propiedad de retener la magnetización cuando cesa el campo exterior magnetizante.

Recordemos que $\vec{m}$ es un dipolo magnético (pequeño circuito plano de área S) $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ (regla mano derecha), y $\vec{B}$ es un campo

excitador externo, la fuerza y el torque sobre $\vec{m}$ debido a $\vec{B}$ son

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \\ \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \end{cases}$$

Si $\vec{B}$ es uniforme. $\vec{F} = 0$ pero $\vec{\tau} \neq 0$.

En el caso de que $\vec{B}$ no sea dado que el dipolo es una pequeña espira se puede desarrollar por Taylor para escribir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}_0) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} + O(r^2)$$

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times (\vec{B}(\vec{r}_0) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0}) =$$

$$= \int I d\vec{l} \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0))$$

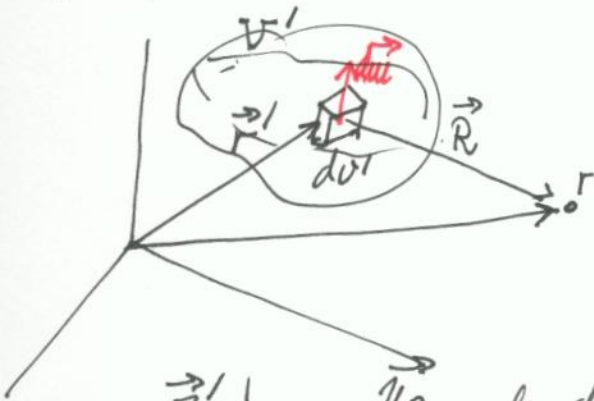
Algunos materiales adquieren una magnetización, que es la capacidad de producir un campo magnético.

En presencia de un campo magnético, la materia se MAGNETIZA, es decir los dipolos se alinean. El estado de magnetización se mide por el vector $\vec{M}$ que es el momento dipolar magnético por u. de vol. $\vec{M}$ es el vector IMANACION (o magnetización) y tiene el mismo papel que el vector polarización $\vec{P}$ de los dieléctricos. Un cuerpo imanado produce un campo magnético. Para un dipolo simple

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

pero para una distribución de dipolos $\vec{M}(\vec{r}')$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{u}_R}{R^2} dV'$$



pero $\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{u}_R}{R^2}$ de donde

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{V'} \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')) dV' - \right. \\ &\quad \left. - \int_{V'} \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{R} \right) dV' \right] \end{aligned}$$

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

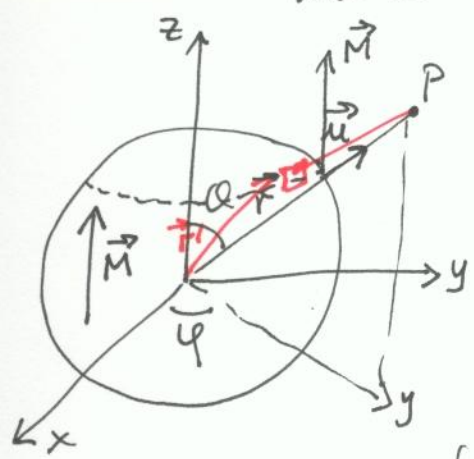
$$\vec{K}_b = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{u}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{1}{R} (\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{R} dS'$$

$\vec{J}_b$ se interpreta como corrientes ligadas equivalentes en el volumen considerado, mientras que $\vec{K}_b$ son corrientes en la superficie del volumen. Son corrientes NO LIBRES o LIGADAS sobre las que tenemos poco control en el sentido de que no las podemos anular, solo si son producidas por campos externos las podemos controlar a partir del campo externo.

Ejemplo 1: Campo magnético creado por una esfera uniformemente magnetizada en la dirección z



$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \text{ porque uniforme}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = M \sin \theta \vec{u}_\phi$$

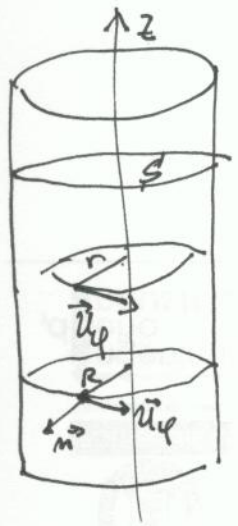
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{M \sin \theta}{R} \vec{u}_\phi ds' \quad \left(\text{No es fácil de calcular.} \right)$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \text{ dentro de la esfera} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{u} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{u}) \text{ fuera de la esfera} \end{cases}$$

(campo de un dipolo con $m = \frac{4}{3} \pi R^3 M$)

Ejemplo 2 (prob. 6.8 pag 265)

Un cilindro largo de radio R lleva la magnetización $\vec{M} = k r^2 \vec{u}_\phi$ con k cte. Calcular el campo magnético dentro y fuera del cilindro



$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_b = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k r^3) \vec{u}_z = \frac{1}{r} 3k r^2 \vec{u}_z = 3k r \vec{u}_z$$

$$\text{y } \vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = k R^2 \vec{u}_\phi \times \vec{u}_r = -k R^2 \vec{u}_z$$

$$\text{Nota: } \left. \begin{aligned} \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{s} &= \int_0^R 3k r \cdot 2\pi r dr = 2\pi k R^3 \\ \int_L \vec{K}_b \cdot d\vec{l} &= -k R^2 \cdot 2\pi R = -2\pi k R^3 \end{aligned} \right\} \text{ suma cero}$$

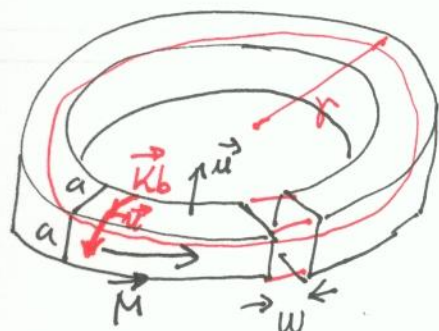
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r \vec{J}_b \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot 2\pi k r^3 \Rightarrow \vec{B}(r) = \mu_0 k r^2 \vec{u}_\phi = \mu_0 \vec{M} \quad r < R$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[\int_0^R \vec{J}_b \cdot d\vec{s} + \int_L \vec{K}_b \cdot d\vec{l} \right] = 0 \Rightarrow \vec{B}(r) = 0 \quad r > R$$

Ejemplo 3: (probl. 6.10 pag 266)

(23)

Una varilla cuadrada de lado a se dobla en forma de conillo con un gap de ancho w como indica la figura. Si esta varilla $\vec{M}$ con una magnetización uniforme a lo largo de la varilla, calcula el campo magnético en el gap.



= ANILLO COMPLETO SIN GAP $\vec{M}$ + TROZO DEL GAP CON $-\vec{M}$

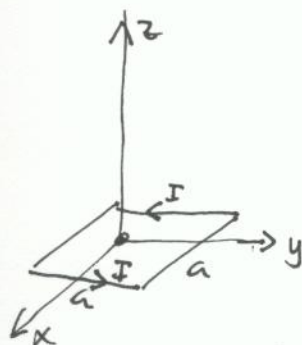
luego el campo en el gap sera el campo del anillo completo en el gap - campo creado por una espira en su centro con corriente causada por magnetización $-\vec{M}$

$\vec{J}_b = 0$ y $\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = M \vec{u}$
el campo en el interior se halla por el teorema de ampere aplicado a la curva de la figura (as como un solenoide toroidal)

$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 I_a = \mu_0 M \cdot 2\pi r \quad \text{ya que } K_b = M \text{ corriente por u. de longitud normal a la direccion de } \vec{K}_b$$

$B(r) = \mu_0 M$ en el interior del material (campo uniforme, como $\vec{H}$)

Por otro lado, el campo producido por una espira cuadrada en su centro y recorrida por una corriente $I = M \cdot w$ en sentido contrario, vale



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a/2} \cdot 2 \sin \theta \quad \left. \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{a/2}{\sqrt{2(a/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} B = \frac{\mu_0 I}{\pi a \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 M w}{\pi a}$$

Por tanto el campo en el gap vale

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{M} - \frac{2\sqrt{2}\mu_0 \vec{M} w}{\pi a} = \mu_0 \vec{M} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}w}{\pi a}\right)}$$

5.1 - EL TEOREMA DE AMPERE EN PRESENCIA DE MATERIA

24

Recordemos que en el vacío $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ donde I_{enc} es la intensidad atrapada en $\oint$ por la ley de Ampere I_{enc} . Ya que $I_{enc} = \iint_{S_a} \vec{J} \cdot d\vec{S}$ se sigue que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. El campo espacial de corrientes se refiere a corrientes LIBRES. Sin embargo ahora hay otra clase de corrientes, las LIGADAS $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ siendo $\vec{M}$ la magnetización de la materia circundante. Así $\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_b$

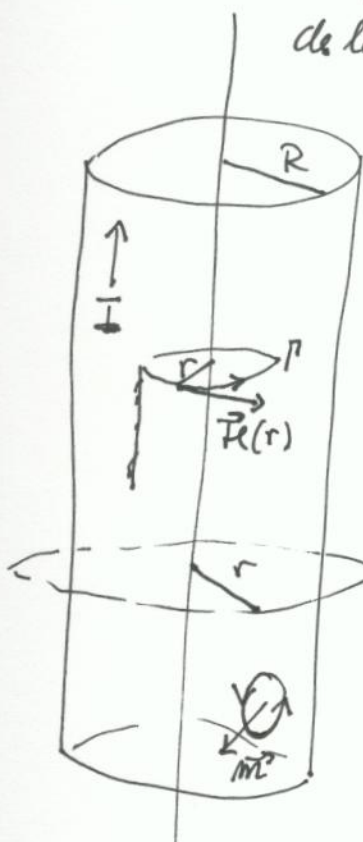
$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{J}_l + \vec{J}_b = \vec{J}_l + \vec{\nabla} \times \vec{M} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_l$$

Si definimos un nuevo campo vectorial $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ la ley de Ampere en presencia de materia magnetizada resulta

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_l \Leftrightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{l, enc}$$

Nota: Así como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ no lo es $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$

Ejemplo-1, Una varilla cilíndrica de cobre transporta una corriente I uniformemente distribuida. Encontrar $\vec{H}$ dentro y fuera de la varilla.



$$\left. \begin{aligned} \frac{I}{\pi R^2} &= \frac{I(r)}{\pi r^2} & \oint \vec{H} d\vec{l} &= I_r = \frac{I \cdot r^2}{R^2} \end{aligned} \right\} \vec{H}(r) = \frac{I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\varphi \quad r < R$$

pero $\oint \vec{H} d\vec{l} = H(r) \cdot 2\pi r$

En la parte exterior $I_{r'} = I$

$$\vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad r > R$$

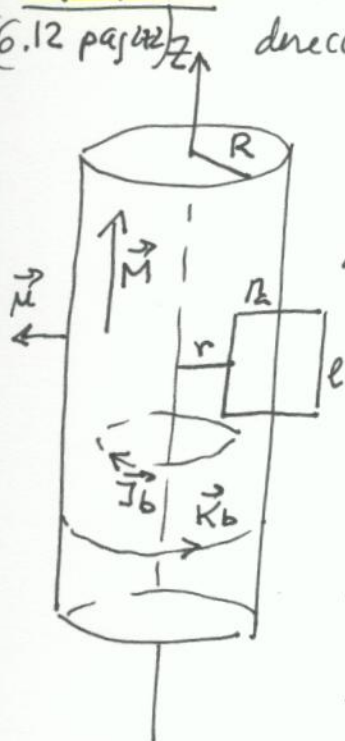
En esta región, donde $\vec{M} = 0$ se puede afirmar que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

Nota: $\vec{M}$ no se sabe como es dentro del cobre pues es debilmente diamagnético y por ello $\vec{M}$ va en contra de $\vec{B}$, que es todo cuanto se puede esperar

Nota: En magnetismo $\vec{H}$ es más útil que $\vec{B}$ ya que $\vec{B}$ depende del Tipo de material y $\vec{H}$ está controlado por la corriente que uno aplica mediante baterías o generadores. En cambio en electrostática $\vec{E}$ es más importante que $\vec{D}$ aunque $\vec{D}$ solo le afectan las cargas libres, por que para un experimento eléctrico con materiales necesito aplicar una batería que suministra una ddp, la cual está en relación con $\vec{E}$ y no con $\vec{D}$ (que no depende de un potencial.)

Ejemplo - 2: Un cilindro muy largo de radio R está magnetizado en la dirección del eje con la ley $\vec{M} = Kr \vec{u}_z$ con K cte. No hay corrientes libres. Calcular el campo magnético $\vec{B}$ dentro y fuera del cilindro.



a) mediante las corrientes ligadas

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = - \frac{\partial M_z}{\partial r} \vec{u}_\phi = -K \vec{u}_\phi$$

alindr.

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = KR \vec{u}_\phi$$

Es la superposición de 2 solenoides $\vec{B} = 0$ fuera y

$$\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\Gamma_a} = \mu_0 \left[\int_{S_a} \vec{J}_b \cdot d\vec{S} + \int_{S_a} \vec{K}_b \cdot d\vec{\ell} \right] =$$

$$= \mu_0 \left[-K \cdot l(R-r) + K R l \right] = \mu_0 K l r$$

con lo que $\vec{B}(r < R) = \mu_0 K r \vec{u}_z \Rightarrow \vec{B}(r < R) = \mu_0 K r \vec{u}_z$

b) Otro método. Usando la misma curva de Ampere.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot l = \mu_0 I_c = 0 \Rightarrow H \equiv 0 \text{ de donde } \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

Ya que $\vec{M} = 0$ fuera $\vec{B}(r > R) = 0$ y $\boxed{\vec{B} = \mu_0 K r \vec{u}_z} \quad r < R$

5.2 - CONDICIONES DE CONTORNO CON MATERIA IMANADA

Ya que $\vec{\nabla} \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \vec{M}$, aplicado esto a los
 ejuntos de la página 15 (4-7)

$$H_{1\perp} - H_{2\perp} = -(M_{1\perp} - M_{2\perp})$$

Mientras que

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{K}_e \times \vec{n}$$

Note: Si no existen corrientes libres, solo material imanado,
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ en todos puntos, lo cual implica que $\vec{H} = -\vec{\nabla} W$
 donde W es un potencial escalar, por lo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$
 se transforma en

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} W) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 W = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}} \quad \text{lo que nos permite}$$

encontrar $\vec{W}(\vec{r})$ y por tanto $\vec{H}$ y $\vec{B}$

5.3 - MEDIOS MAGNETICOS LINEALES

En materiales diamagnéticos y paramagnéticos, $\vec{M}$ es producido
 por $\vec{B}$. Si $\vec{B}$ desaparece también lo hace $\vec{M}$. Para estos
 materiales y otros surge que el campo excitador no sea muy
 intenso

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$$

con χ_m = susceptibilidad magnética. Con esta propiedad.
 se definen los materiales magnéticamente **LINEALES**.

N: $\chi_m < 0$ para diamagnéticos y $\chi_m > 0$ para paramagnéticos

Para los materiales lineales

(27)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

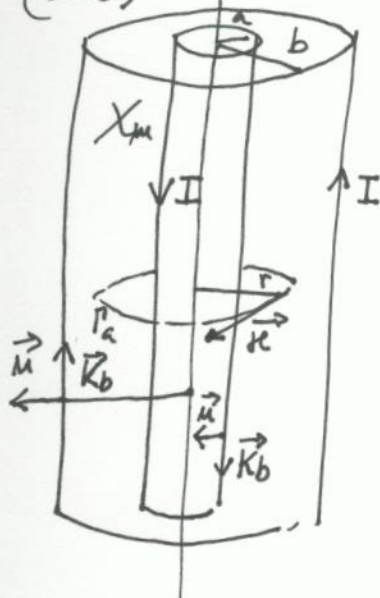
μ es la permeabilidad magnética del material.

Nota: las corrientes ligadas en el volumen de un material lineal son proporcionales a las corrientes libres presentes.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \vec{J}_f$$

por lo que a menos que haya corrientes libres fluyendo a través del material, toda la corriente ligada irá POR LA SUPERFICIE

Ejemplo 1. Para el interior de la figura encontrar $\vec{B}$ para $a < r < b$
 Si el material entre los cilindros es lineal con χ_m



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f = I \Rightarrow 2\pi r H(r) = I \Rightarrow \vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} (-\vec{u}_\phi)$$

$$\text{por tanto } \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = -\frac{\mu_0 (1 + \chi_m) I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \quad a < r < b$$

$$\text{la magnetización vale } \vec{M} = \chi_m \vec{H} = -\frac{I \chi_m}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

y las corrientes ligadas valen

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot M_\phi) \vec{u}_z = 0$$

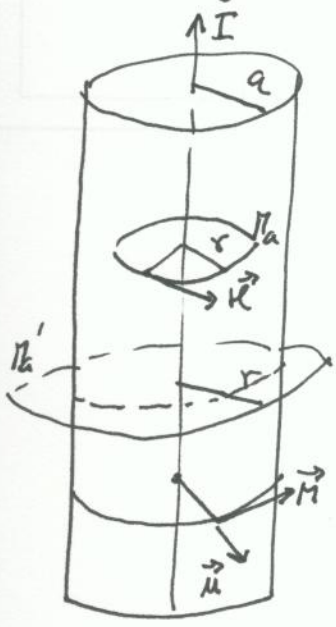
$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = \begin{cases} |M(r)| \vec{u}_z & \text{si } r=b & \frac{I \chi_m}{2\pi b} \vec{u}_z \\ -|M(r)| \vec{u}_z & \text{si } r=a & -\frac{I \chi_m}{2\pi a} \vec{u}_z \end{cases}$$

Si lo hacemos a partir de $\vec{B}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_f + I_b) = \mu_0 \left(I + \frac{I \cdot \chi_m}{2\pi a} \cdot 2\pi a \right) = I (1 + \chi_m) \cdot \mu_0$$

de donde $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I (1 + \chi_m)}{2\pi r} \vec{u}_\phi \quad a < r < b$

Ejemplo 2 Una corriente I fluye por un conductor cilíndrico de radio a y está uniform. repartida. El conductor tiene χ_m y hay que calcular $\vec{B}$ dentro y fuera. Calcular las corrientes ligadas y la corriente meta ligada que circula por el hilo?



a) $\oint \vec{H} d\vec{l} = I_f(\vec{r}) = \frac{I r^2}{a^2} \Rightarrow \vec{H}(r) = \frac{I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\varphi \quad r < a$

$\frac{I}{\pi a^2} = \frac{I(r)}{\pi r^2}$

de donde $\vec{B}(r) = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\varphi \quad (r < a)$

b) para puntos fuera, se tiene.

$\oint \vec{H} d\vec{l} = I \Rightarrow \vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad r > a$

y $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad (r > a)$ ya que fuera está el vacío

las corrientes ligadas son

$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times \chi_m \vec{H} = \chi_m \vec{J}_c$ pero $\oint \vec{J}_c d\vec{s} = \frac{I r^2}{a^2} \Rightarrow \vec{J}_c = \frac{I}{\pi a^2}$

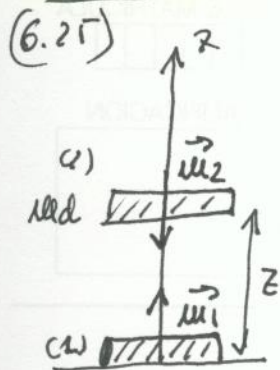
de modo que $\vec{J}_b = \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \vec{u}_z$ vme/cme.

y $\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{u} = \frac{\chi_m I}{2\pi a} (-\vec{u}_z)$

la corriente ligada total vale $I_b = \iint_S \frac{\chi_m I}{\pi a^2} d\vec{s} + \vec{K}_b \cdot 2\pi a \hat{z}$
 $= \chi_m I + \frac{\chi_m I}{2\pi a} \cdot 2\pi a = 0$

que es lo que debe salir

Ejemplo - 3: Dos imanes en forma de pastilla se sitúan enfrentados (29) como indica la figura. Si su momento magnético es m y la masa es md , a qué distancia z "flotará" el imán superior?



El campo $\vec{B}_1$ creado en la posición del imán 2 es

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \vec{u}_z$$

$$m_1 = m_2$$

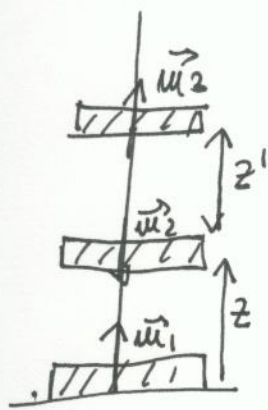
y la energía potencial del 2 es $U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m^2}{2\pi z^3}$

$$\text{por lo que } \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^3} \right) \vec{u}_z = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} \vec{u}_z$$

esta fuerza se ha de compensar con el peso del imán 2

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} = md \cdot g \Rightarrow \boxed{z = \left(\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi mdg} \right)^{1/4}}$$

Ampliación de este problema: Suponga que colocamos un tercer imán por encima y con $\vec{m}_3$ apuntando hacia arriba.



i) el imán central está sometido a la repulsión de m_1 y a la repulsión de m_3

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z'^4} = md \cdot g$$

ii) El imán superior es repelido por el imán central y atraído por el imán inferior

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z'^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi (z+z')^4} = md \cdot g$$

que es un sistema de ecuaciones en z y z' que da como resultado

$$\frac{z}{z'} = 0,850115 \quad (\text{usando Mathematica por ejemplo})$$