

4.) MAGNETOSTATICA (EN EL VACIO)

(1)

4.1 - FUERZA DE LORENTZ: (sobre una carga móvil)

Un campo magnético es generado por cargas móviles y corrientes y produce fuerzas sobre cargas próximas que se mueven.

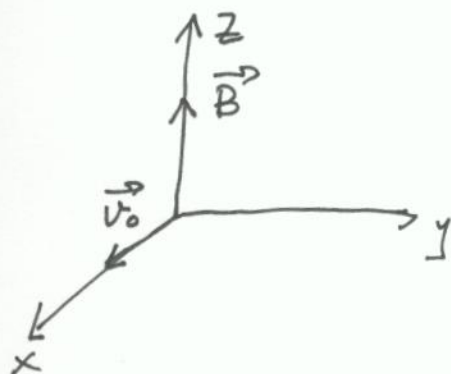
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Nota: $\vec{F}$ no hace trabajo
 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0$

Ejemplo:

Ciclotrón: $\vec{B}$ uniforme $\vec{B} = B \hat{k}$

(solo hace cambiar la dirección)



$$\vec{B} = (0, 0, B)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} =$$

$$= q(Bv_y \hat{i} - Bv_x \hat{j})$$

por tanto, las ecs del mov. son:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= qB v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -qB v_x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x &= 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{con } \omega = \frac{qB}{m}$$

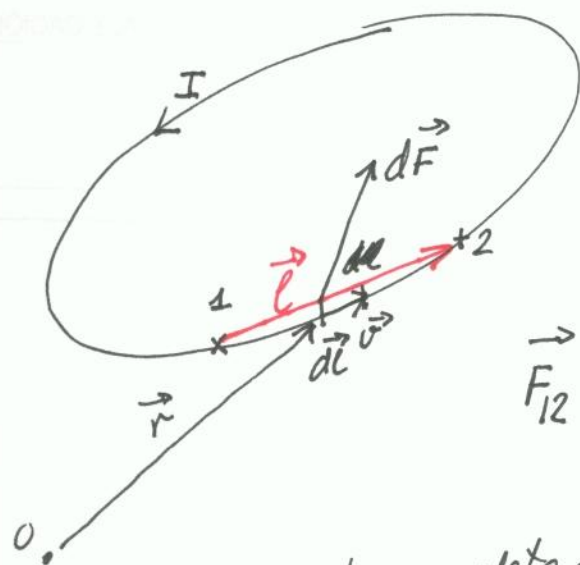
y como condiciones de contorno $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ y además la solución debe verificar que $\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$ y $\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$

la solución completa (vease notas manuscritas) es

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos \omega t \\ v_y(t) &= -v_0 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) \end{aligned}$$

la trayectoria es un círculo de radio $\frac{v_0}{\omega}$ con centro en $(0, -\frac{v_0}{\omega}, 0)$

4.2 - FUERZA SOBRE UN ELEMENTO DE CIRCUITO Y SOBRE UN CIRCUITO COMPLETO



$$d\vec{F} = dq \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = dq \cdot \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right) =$$

$$= I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad \vec{B} \text{ unifrme}$$

$$\vec{F}_{12} = \int_1^2 I (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{B} \text{ unifrme}$$

Para el circuito completo: $\vec{F} = \oint_0 I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$

N: Si $\vec{B}$ es unifrme $\vec{F} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$ aunque el campo $\vec{B}$ puede ejercer un momento que puede hacer girar el circuito.

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{\tau} = I \cdot \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad \vec{B} \text{ unifrme} \quad \vec{\tau} = I \cdot \left[\frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{l} \right] \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

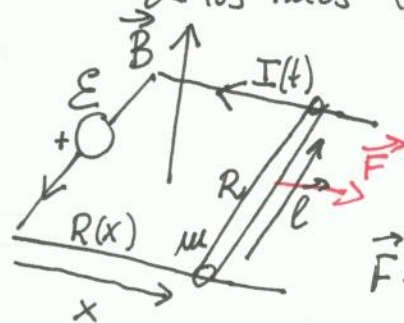
↓ momento magnético

Si en lugar de la corriente limitada a un circuito 1-D tenemos un campo espacial de corriente

$$d\vec{F} = \rho dV_i (\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{J} \times \vec{B}) dV \Rightarrow \vec{F} = \int_{\text{vol}} (\vec{J} \times \vec{B}) dV$$

Nota: $\sum_{i=1}^N () q_i \cdot \vec{v}_i \sim \underbrace{\int () \vec{I} \cdot d\vec{l}}_{1D} \sim \underbrace{\int () \vec{k} \cdot d\vec{s}}_{2D} \sim \underbrace{\int () \vec{J} \cdot dV}_{3D}$

Ejemplo 1: Calcular la fuerza sobre la varilla móvil. si la resistencia de los hilos laterales $R(x) = k \cdot x$



$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R(x)} = \frac{\mathcal{E}}{R + 2kx(t)}$$

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} = I \cdot l B \vec{z} = \frac{\mathcal{E} l B}{R + 2kx}$$

al cabo de un tiempo t la posición de la varilla será

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mathcal{E} l B}{m} \frac{1}{R + 2kx} \quad \text{con} \quad A = \frac{\mathcal{E} l B}{mR} \quad \text{y} \quad B = \frac{2k}{R}$$

buscas con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$

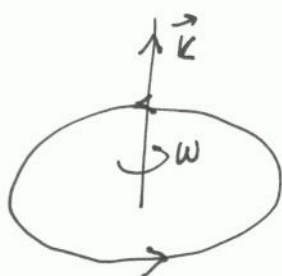
lo resolvemos mediante

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{A}{1+Bx} \Rightarrow \int_0^v v dv = \int_0^x \frac{A}{1+Bx} dx$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{A}{B} \log(1+Bx) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2A}{B} \log(1+Bx)} \quad \text{y de aquí}$$

$$\text{podemos} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{B} \log(1+Bx)} \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B} \log(1+Bx)}} = \int_0^t dt$$

Ejemplo 2: Un alambre circular de radio R está cargado con λ y gira a la veloc. angular constante ω . Calcular el momento magnético



$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S} = I \cdot \pi R^2 \cdot \vec{k}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda \cdot dl}{dt} = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \omega \cdot R$$

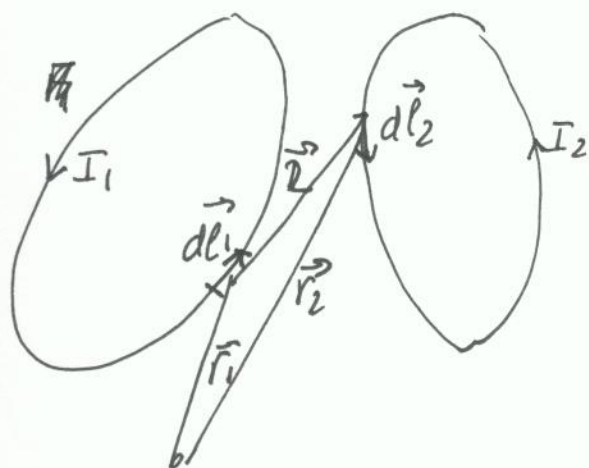
$$\boxed{\vec{\mu} = \lambda \omega \pi R^3 \vec{k}}$$

4.3) LEY DE BIOT-SAVART

(4)

Hasta este punto hemos visto los efectos de un campo magnético sobre corrientes y cargas gracias a la fuerza de Lorentz. Pero ¿cómo se genera un campo magnético?

La fuerza sobre las corrientes recorridas por corrientes estacionarias.



force on ⁽²⁾ ~~dl2~~ exerted by (1)

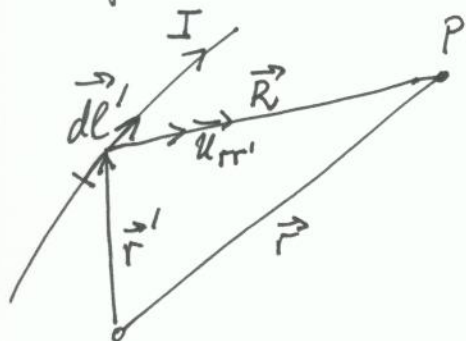
$$\vec{F}_{12} = k_m I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$= I_2 \oint d\vec{l}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$$

$$\text{con } \vec{B}(\vec{r}_2) = k_m I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Nm/A}^2$$

ley de Biot-Savart.



$$\vec{B}(P) = k_m I \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{u}_R}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Para el caso de un campo espacial de corrientes

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{u}_R}{R^2} dV'$$

Ejemplo 1: Trozo de hilo vertical. finito (ver notas)

Ejemplo 2: Hilo infinito.

Ejemplo 3: Espira en un punto del eje de simetría

4.4 - DIVERGENCIA Y ROTACIONAL DE $\vec{B}$

i) Divergencia de $\vec{B}$: De la ley de Biot

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) dV'$$

$$\text{pero } \vec{\nabla} \left(\vec{J} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) = \frac{\vec{u}_R}{R^2} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right)$$

pero $\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$ ya que $\vec{J}$ solo depende de las coordenadas de las fuentes (con puntas) y por otro lado $\vec{\nabla} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} = 0$

de donde $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

ii) Rotacional de $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) dV'$$

$$\text{pero } \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) = \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{u}_R}{R^2} \right) - \underbrace{\left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{u}_R}{R^2}}_{(*)} + \left(\frac{\vec{u}_R}{R^2} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{J} - \frac{\vec{u}_R}{R^2} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)$$

porque $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}')$
y $\vec{\nabla}$ sobre $\vec{r}$

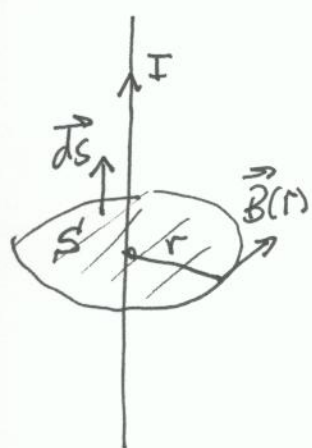
Porque $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}')$
 $\vec{\nabla}$ sobre $\vec{r}$

El término (*) se anula al integrar (verase Griffith pág 241)

Por tanto $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi \vec{J}(\vec{r}') \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})}$

Ley de Ampere en forma diferencial.

N: Otra forma de demostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$ es



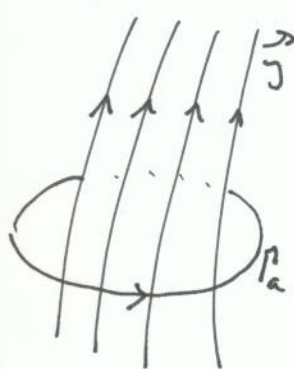
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \cdot 2\pi r$$

pero por la ley de Biot-Savart. $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
de modo que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

de donde se obtiene la ley de Ampère.

Por tanto otra manera de enunciar la ley de Ampère



$$\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\Gamma_a}$$

 con $I_{\Gamma_a} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

intensidad atrapada por la
curva de Ampère I_a

ya la ley de Ampère nos ayuda al cálculo de $\vec{B}$ y hay simetrías
del mismo modo que nos ayudó la ley de Gauss al cálculo de $\vec{E}$

Ejemplo 1

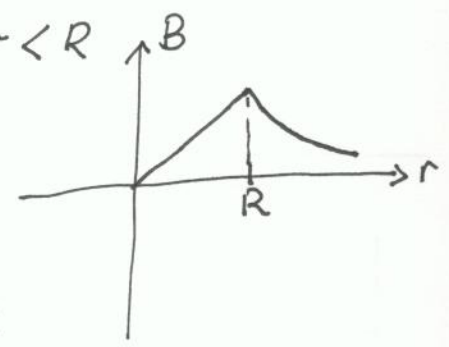
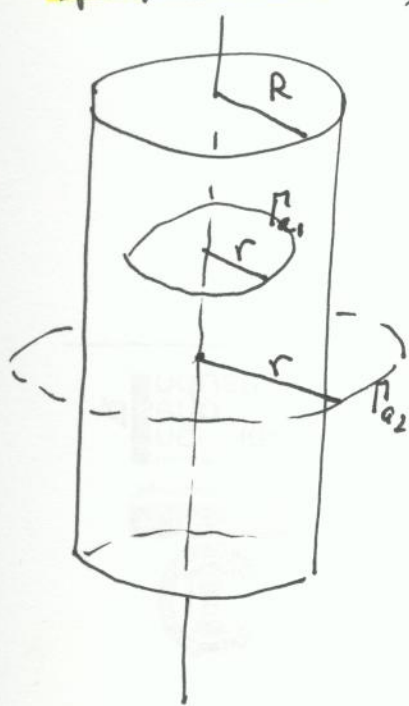
a) $\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Gamma_a} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$

pero $\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I(s)}{\pi r^2}$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad r < R$$

b) $\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I =$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > R$$



Ejemplo 2 Solenoide largo y delgado (pag 43 mis notas)

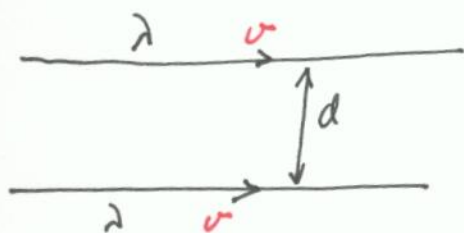
Ejemplo 3 Bobina toroidal (pag 43.1 mis notas)

Ejemplo 4 Plano infinito (pag 43.1, mis notas)

Ejemplo 5 Cable coaxial. (pag 43.2)

Ejemplo 6 Dos hilos conductores paralelos $+I -I$ (pag 43.3)

Problema curioso: Dos hilos infinitos paralelos cargados con densidad lineal λ y que se mueven ambos a velocidad v . ¿cuánto debe valer v para que la fuerza repulsiva electrostática se compense con la atractiva magnética?



El campo del hilo superior es $B(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$
y la fuerza magnética por u.d.l. sobre el hilo inferior es

$$F/l = I \cdot B(d) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

pero el mov. del hilo equivale a una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \lambda \cdot v$$

$$F/l = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d}$$

Sin embargo el campo eléctrico repulsivo producido por el hilo superior.

$$E(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \quad \text{por unidad de long.} \quad \text{Y la fuerza repulsiva sobre el}$$

hilo inferior vale por u.d.l. $F/l = \lambda \cdot E = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$ por tanto

$$\frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{v = c}$$

4.5 - ECUACIONES DE MAXWELL PARA ELECTROSTATICA Y MAGNETOST.

(3)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Gauss law}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow (\vec{E} = -\vec{\nabla} V) \end{cases} \quad \vec{E} \rightarrow 0 \text{ lejos de los cuerpos.}$$

estas dos ecuaciones equivalen a la ley de Coulomb + superposición.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (\text{ley de Ampere}) \end{cases} \quad \vec{B} \rightarrow 0 \text{ lejos de los corrientes}$$

que equivalen a la ley de Biot-Savart + superposición.

la fuerza sobre una carga móvil viene dada por $\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

4.6 - POTENCIAL VECTORIAL

Ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ en todo punto, esto indica que puede existir un campo vectorial $\vec{A}$ que cumpla

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

sin embargo existe cierta ambigüedad en cuanto a $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Se puede demostrar que es posible elegir que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ de modo que la ecuación que satisface $\vec{A}$ es

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

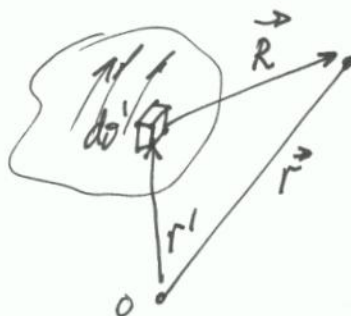
Si ponemos $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ entonces

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$
 $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$
 $\vec{A}'$ produce el mismo $\vec{B}$ que $\vec{A}$

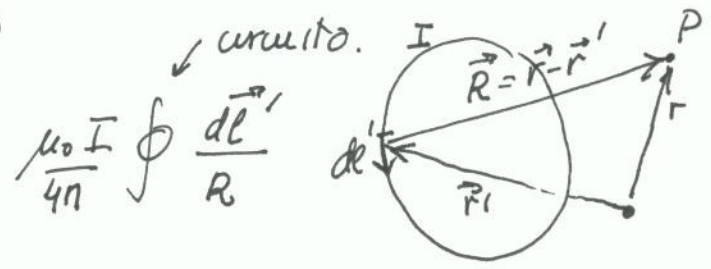
Si $\vec{J} \rightarrow 0$ podemos escribir que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\tau'$$



Para corrientes 1D y 2D

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{R}$$



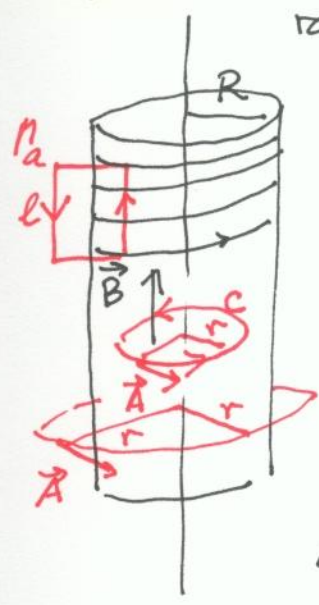
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K}}{R} ds'$$

$\vec{K}$: vector densidad de corriente superficial.

$\vec{K}$ es la corriente por u de anchura perpendicular al flujo.

Note: El potencial vector $\vec{A}$ apenas simplifica el calculo de $\vec{B}$ mediante la ley de Biot-Savart.

Ejemplo-1: Solenoide muy largo con n vueltas por u. de long. y radio R portando una corriente I



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_C} (\text{flujo de } \vec{B})$$

$$\text{por } \oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \cdot l = \mu_0 n \cdot l \cdot I \Rightarrow B(r < R) = \mu_0 n I$$

de modo que volviendo a la integral primera

$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} : A \cdot 2\pi r = \mu_0 n I \cdot \pi r^2 \Rightarrow A(r) = \frac{\mu_0 n I \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \quad r < R$$

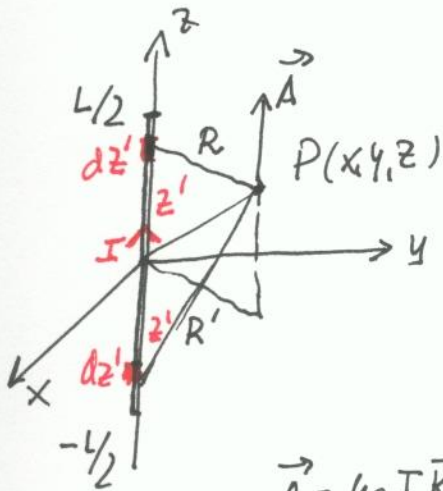
para puntos fuera del solenoide ($B(r > R) \neq 0$)

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint = \mu_0 n I \cdot \pi R^2 \Rightarrow A(r) = \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \quad r > R$$

Note: Normalmente la dirección de $\vec{A}$ coincide con la dirección de las corrientes.

Ejemplo 2. Potencial vector de un segmento rectilíneo que lleva la corriente I

(10)



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\vec{l}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{k} \int_0^{L/2} \frac{dz'}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)}$$

$$\text{con } R = \sqrt{d^2 + (z' - z)^2} = \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{d^2} + (z' - z)^2}$$

$$R' = \sqrt{d^2 + (z' + z)^2}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \left[\ln(z' - z + \sqrt{d^2 + (z' - z)^2}) + \ln(z' + z + \sqrt{d^2 + (z' + z)^2}) \right]_0^{L/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \left[\ln \left| \frac{L/2 - z + \sqrt{d^2 + (L/2 - z)^2}}{-z + \sqrt{d^2 + z^2}} \right| + \ln \left(\frac{L/2 + z + \sqrt{d^2 + (L/2 + z)^2}}{z + \sqrt{d^2 + z^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \ln \left[\frac{\left[(L/2 - z) + \sqrt{d^2 + (L/2 - z)^2} \right] \cdot \left[(L/2 + z) + \sqrt{d^2 + (L/2 + z)^2} \right]}{d^2} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \ln \left[\frac{\left[(L/2 - z) + \sqrt{d^2 + (L/2 - z)^2} \right] \cdot \left((L/2 + z)^2 - (d^2 + (L/2 + z)^2) \right)}{d^2 \left[(L/2 + z) - \sqrt{d^2 + (L/2 + z)^2} \right]} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \ln \left[- \frac{L/2 - z + \sqrt{d^2 + (L/2 - z)^2}}{L/2 + z + \sqrt{d^2 + (L/2 + z)^2}} \right] = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \ln \left[\frac{L/2 - z + \sqrt{d^2 + (L/2 - z)^2}}{-L/2 - z + \sqrt{d^2 + (L/2 + z)^2}} \right]$$

Nota: también se podría haber hecho por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{d^2 + (z' - z)^2}}$$

y sale lo mismo.

Ejercicio. Demuestra que $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ da el campo magnético $\vec{B}$ en el punto P. (Ponazo cálculos) $\Rightarrow$ se hace en el Ejemplo 3

TRUCO: Si $\vec{B}$ es uniforme $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ y se cumple que $\vec{r} \cdot \vec{A} = 0$ y $\vec{r} \times \vec{A} = \vec{B}$ (ejercicio 5.24 pag 239)

Ejemplo 3: Para el Ejemplo 2. ~~demostrar~~ ^{ver si} a partir del $\vec{A}$ se verifica que $\vec{r} \cdot \vec{A} = 0$ y $\vec{r} \times \vec{A} = \vec{B}$. Tomar el límite $L \rightarrow \infty$ para calcular el $\vec{A}$ de un hilo infinito.

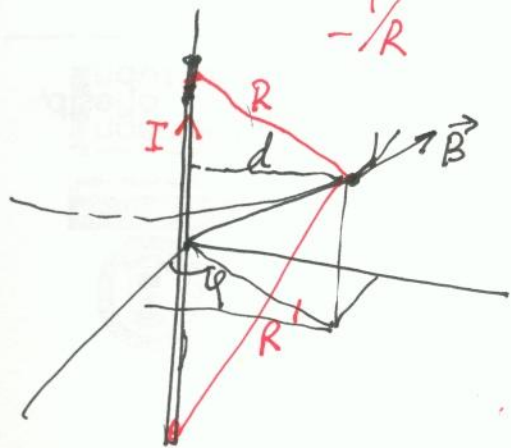
$$\vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial z} A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}{\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(-1 + \frac{-(\frac{L}{2} - z)}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} \right) \left(-\frac{L}{2} + z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2} \right) - \right. \\ \left. \left(-1 + \frac{(\frac{L}{2} + z)}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right) \cdot \left(\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-1 + \frac{(\frac{L}{2} - z)}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}}}{\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} - \frac{-1 + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}}{-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}}}_{-\frac{1}{R}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}}_{\frac{1}{R'}} \right]$$

Notese que $\vec{r} \cdot \vec{A} \neq 0$ solo en $z=0$ o si $L \rightarrow \infty$

sin embargo mas da el campo correcto como vamos a ver a continuación.



En cuanto de $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ vemos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial d} \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial d} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}{\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} \right]$$

$$\cdot \frac{\frac{d}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} \cdot \left(-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2} \right) - \frac{d}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \cdot \left(\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2} \right)}{\left[-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2} \right]^2}$$

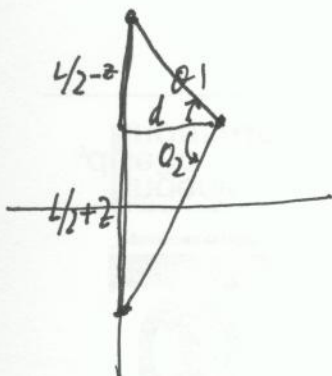
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\frac{d}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}}}{\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} - \frac{\frac{d}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}}{-\frac{L}{2} - z + \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \left[\frac{(\frac{L}{2} - z) - \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}}{\left[(\frac{L}{2} - z)^2 - d^2 - (\frac{L}{2} - z)^2 \right] \cdot \sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} - \frac{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2} + (\frac{L}{2} + z)}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2} \cdot (d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2 - (\frac{L}{2} + z)^2)} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I d}{4\pi d^2} \left[-\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I d}{4\pi d^2} \left[\underbrace{\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}}}_{\sin \theta_1} + \underbrace{\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}}}_{-\sin \theta_2} \right] \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\sin \theta_1 - \sin \theta_2] \vec{u}_\varphi$$

θ_2 es negativo
 θ_1 es positivo.



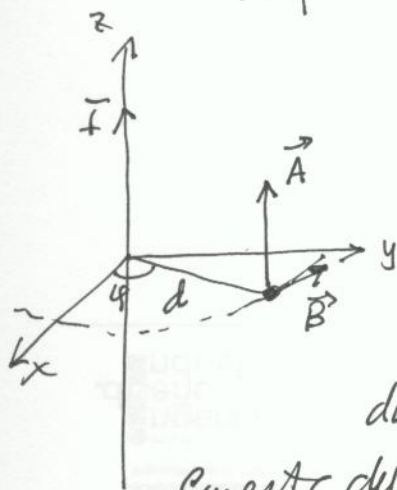
Si hacemos $L \rightarrow \infty$ $\sin \theta_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ y $\sin \theta_2 = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_\varphi} \text{ que es el campo correcto para hilo infinito.}$$

Vamos a comprobar ahora que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0 F}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\vec{z}'}{\sqrt{d^2 + (z' - z)^2}} = \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{k}}{\sqrt{d^2 + (z' - z)^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[d^2 + (z' - z)^2 \right]^{-1/2} = -\frac{1}{2} \left[d^2 + (z' - z)^2 \right]^{-3/2} \cdot (-2(z' - z)) = \\ &= \frac{z' - z}{(d^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0 F}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz' \cdot (z' - z)}{(d^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 F}{4\pi} \left[d^2 + (z' - z)^2 \right]^{-1/2} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= -\frac{\mu_0 F}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] \text{ que es idéntica a la } \\ &\text{evaluada antes.}\end{aligned}$$

Ejemplo-4: Calcular por cualquier medio el potencial vector $\vec{A}$ a la distancia d de un hilo infinito que lleva la corriente I . Comprobar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ y que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Si el hilo tiene un radio R , calcular $\vec{A}$ dentro de hilo si la corriente está uniform. distribuida en el conductor.



$$\vec{A} = A(d) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial d} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_\varphi \Rightarrow$$

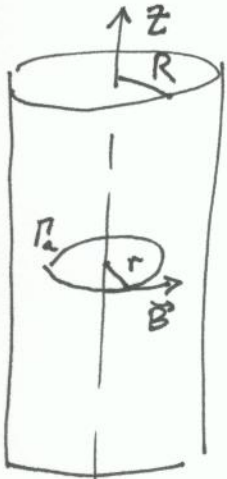
$$\frac{\partial A}{\partial d} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \vec{k}$$

donde a es una constante arbitraria.

Para verificar para $\vec{A}$ se verifica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial d} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_\varphi = \vec{B}$$

then the hole has a radius R



$$\oint_{\Gamma_a} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Gamma_a \quad \left\{ \begin{array}{l} B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I \\ \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I \Gamma_a}{\pi r^2} \end{array} \right.$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\varphi \Rightarrow A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (r^2 - a^2)$$

$\downarrow$
cte arbitaria

Como $\vec{A}$ debe ser continua en $r=R$

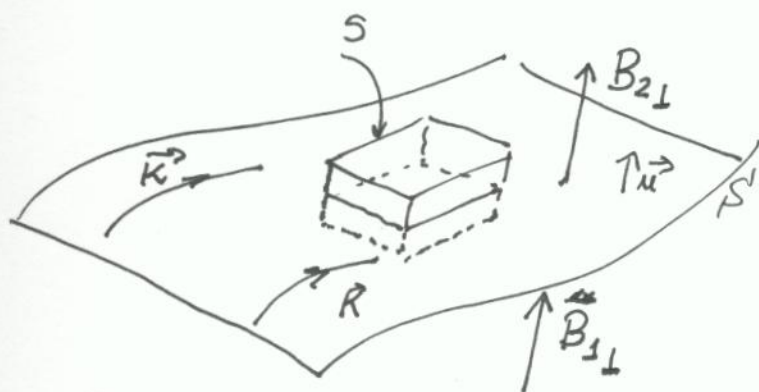
$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (R^2 - b^2)$$

si usamos $a=b=R$ se cumple la continuidad y así

$$\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r/R) \vec{u}_z & r \geq R \\ -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (r^2 - R^2) \vec{u}_z & r \leq R \end{cases}$$

4.7) CONDICIONES DE CONTORNO EN MAGNETOSTATICA (VACIO)

(15)

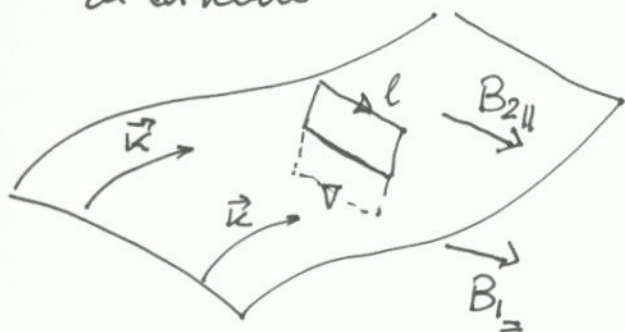


$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$$

NO HAY MANANTIALES NI SUMIDROS

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \text{ en } S$$

$\vec{K} \equiv$ dens. superficial de corriente



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 K \cdot l$$

$$B_{2\parallel} - B_{1\parallel} = \mu_0 K \text{ en } S'$$

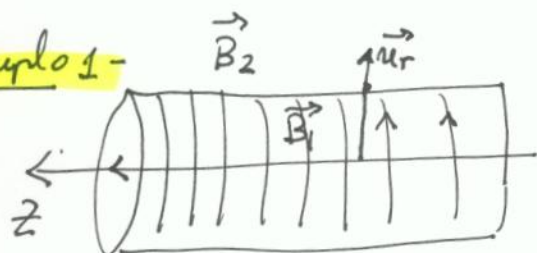
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{K} \times \vec{n})$$

resultados que pueden resumirse en

En cuanto al potencial vector, si este cumple $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, entonces debe ser continuo aunque. e verifica que

$$\frac{\partial A_2}{\partial n} - \frac{\partial A_1}{\partial n} = -\mu_0 K \quad \text{y} \quad A_2 = A_1 \text{ en } S$$

Ejemplo 1-



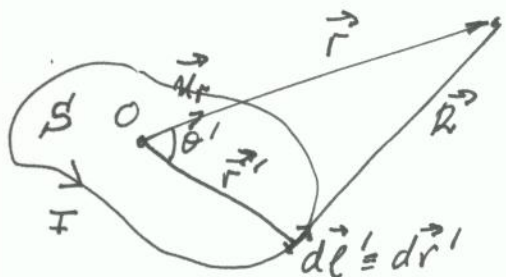
$$\left. \begin{array}{l} \vec{B}_2 = 0 \\ \vec{B}_1 = \mu_0 m I \vec{u}_z \\ \vec{M} = \vec{u}_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{K} \times \vec{n} = -K \vec{u}_z \\ \downarrow \\ K \cdot \vec{u}_\varphi \end{array}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -\vec{B}_1 = -\mu_0 K \vec{u}_z = -\mu_0 \cdot m \cdot I \Rightarrow \vec{B}_1 = \mu_0 m I \vec{u}_z \text{ c.a.p.}$$

4.8) MULTIPOLOS MAGNETICOS

(16)

la idea de una expansion multipolar esta en escribir el potencial en serie de potencias de $1/r$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} = \frac{1}{r} \sum_0^\infty \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

entonces $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{R} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos\theta') d\vec{l}'$

es decir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint d\vec{l}'}_{\text{monopolo magnetico}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \oint r' \cos\theta' d\vec{l}'}_{\text{dipolo magnetico}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) d\vec{l}'}_{\text{cuadrupolo magnetico}} + \dots \right]$$

El termino dominante es el dipolo

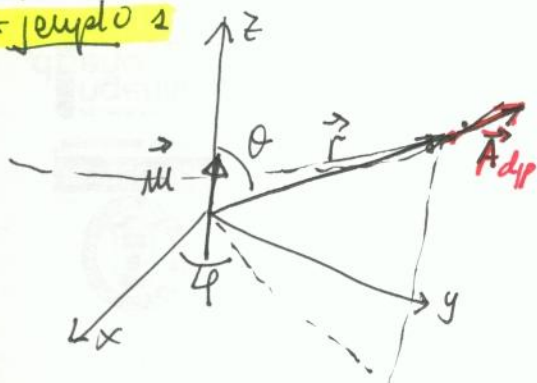
$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos\theta' d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\vec{u}_r \cdot \vec{r}') d\vec{l}'$$

pero $\oint (\vec{u}_r \cdot \vec{r}') d\vec{l}' = -\vec{u}_r \times \oint \vec{r}' d\vec{l}' = \vec{S} \times \vec{u}_r$

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I \cdot \vec{S} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

donde se ha definido como $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ el momento dipolar magnetico

Ejemplo 1

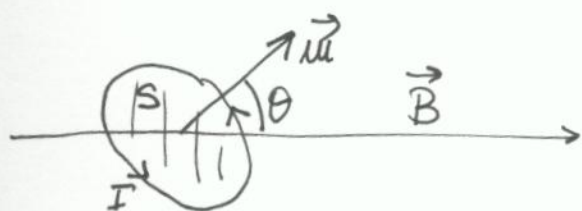


$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{m \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m})$$

Un dipolo magnético viene representado por un pequeño circuito plano de área S y recorrido por la intensidad I (17)



En presencia de un campo magnético B el circuito sufre una fuerza

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} \stackrel{\vec{B} \text{ unif}}{=} I (\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0$$

pero también se aplica un torque si $\vec{B}$ es uniforme:

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

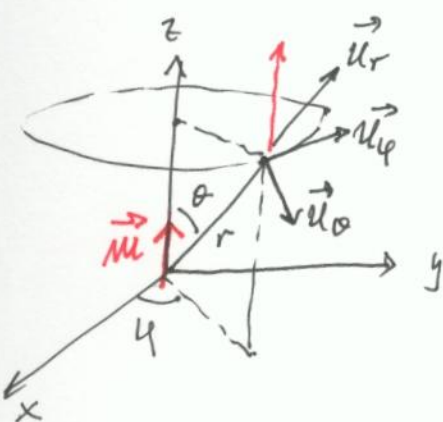
que indica que el $\vec{m}$ tiende a alinearse con el campo $\vec{B}$. Esto significa que el dipolo tiene una energía potencial $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

lo que da una fuerza neta $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = +\vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \stackrel{\vec{B} \text{ unif}}{=} 0$

Se ve que hay un cierto paralelismo entre ~~momento~~ dipolo magnético y dipolo eléctrico

Nota: $|\vec{\tau}| = +\frac{\partial}{\partial \theta} E_p = -\frac{\partial}{\partial \theta} mB \cos \theta = +mB \sin \theta$

Ejemplo 1: Demostrar que el ~~momento~~^{campo} magnético de un dipolo se puede escribir en la forma vectorial



$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3 \cdot (\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{m})$$

Se proyecta $\vec{m}$ en planos.

$$\vec{m} = m \cos \theta \vec{u}_r - m \sin \theta \vec{u}_\theta$$

y se ve que

$$\begin{aligned} 3 \cdot (\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m} &= 3m \cos \theta \vec{u}_r - m \cos \theta \vec{u}_r + m \sin \theta \vec{u}_\theta = \\ &= 2m \cos \theta \vec{u}_r + m \sin \theta \vec{u}_\theta \text{ y por tanto} \end{aligned}$$

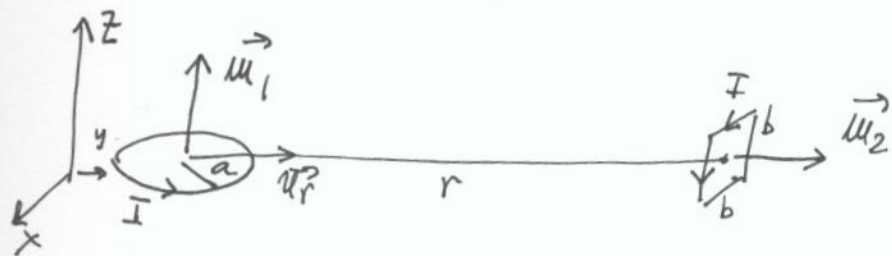
$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad \text{COP}$$

(*) Esta relación puede demostrarse de forma bastante pesada suponiendo que el $\vec{m}$ es un pequeño circuito y que el campo magnético se desarrolla por Taylor $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\text{centro}) + (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}')|_{\text{centro}}$

Ejemplo 2 (prob. 6.1 pag 259)

(18)

Calcula el torque ejercido sobre el circuito cuadrado debido al circuito en forma de espira de $r \gg a$ o b . ¿Cuál será la orientación de equilibrio de la espira cuadrada?



$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{\mu}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mu_1 \cdot \vec{u}_2$$

Por tanto

$$\vec{\tau} = \mu_2 I \times \left(-\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mu_1 \vec{u}_2 \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} \vec{u}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} I a^2 \cdot I b^2 \vec{u}_2$$

$$\vec{\tau} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (I a b)^2 \vec{u}_2$$

Según el sentido del torque, el circuito $\vec{\mu}_2$ acabará $\vec{\mu}_2 = \mu_2 \cdot (-\vec{u}_2)$

Ejemplo 3: Demostrar la fórmula $\vec{\tau} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$ para un circuito plano en un campo $\vec{B}$ uniforme, a partir de la ley de Biot-Savart.

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = I \cdot \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \text{ pero.}$$

$$\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) + d\vec{\ell} \times (\vec{B} \times \vec{r}) + \vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{\ell}) = 0$$

$$d(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})) \underset{\text{Bum!}}{=} d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) + \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) \text{ con } d\vec{r} = d\vec{\ell}$$

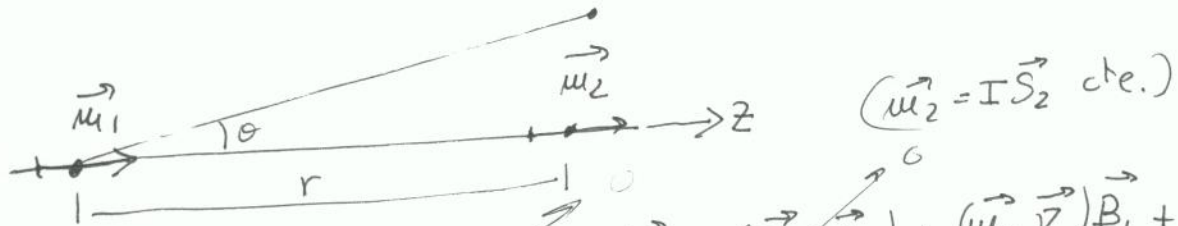
Sumo los dos términos en rojo

$$2\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = d(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})) - \vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{\ell}) \text{ con lo que}$$

$$d\vec{\tau} = \frac{1}{2} I \left[d(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})) + (\vec{r} \times d\vec{\ell}) \times \vec{B} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2} I \oint d(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})) + \frac{1}{2} I \oint (\vec{r} \times d\vec{\ell}) \times \vec{B} = I \cdot \vec{S} \times \vec{B}$$

Ejemplo 4. Calcular la fuerza de atracción entre dos dipolos magnéticos $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ orientados como en la figura.



$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1) = \vec{m}_2 \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) + \vec{B}_1 \times (\vec{\nabla} \times \vec{m}_2) + (\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 + (\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{m}_2$$

($\vec{m}_2$ etc.)

Se puede demostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = 0$ ya que $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$

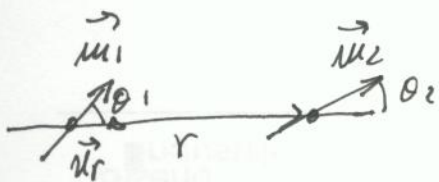
$$\text{y } \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_{1\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_{1r} \right) \vec{u}_\phi = 0 \Rightarrow \vec{m}_2 \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = 0$$

$\downarrow \frac{2 \sin \theta}{r^3}$
 $\downarrow \frac{2 \cos \theta}{r^3}$

$$\text{entonces } \vec{F}_2 = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1) = (\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 = (m_2 \cdot \frac{d}{dz}) \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{(3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z - \vec{m}_1)}_{2 \vec{m}_1}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} 2 m_1 m_2 \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^3} \right) \vec{u}_z = -3 \frac{1}{z^4} - \frac{3 \mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{z^4} \vec{u}_z$$

Ejemplo 5 (6.21) Partiendo de que la energía de un dipolo $\vec{m}$ en un campo magnético $\vec{B}$ es $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, demostrar que la energía de interacción entre dos dipolos magnéticos separados por una distancia $\vec{r}$ es $U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_r)(\vec{m}_2 \cdot \vec{u}_r))$



El dipolo $\vec{m}_1$ crea un campo en el sitio de $\vec{m}_2$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}_1)$$

$$\text{partiendo } U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_r)(\vec{m}_2 \cdot \vec{u}_r) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2) \text{ CQD}$$