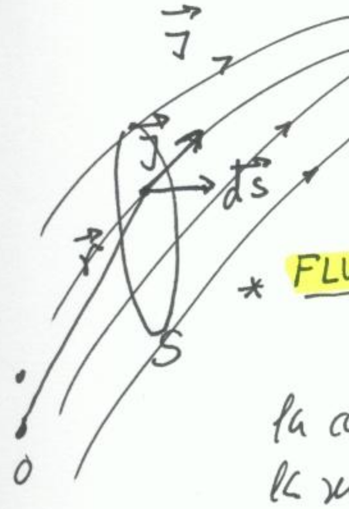
3 - ELECTROCINETICA

- Estudio del origen y efectos de la corriente eléctrica.
- Corriente eléctrica: flujo de portadores de carga constituyendo un campo vectorial cuya magnitud característica es la
  * DENSIDAD DE CORRIENTE: Carga por u. de t que atraviesa la un. de superficie.

$$\vec{J}(\vec{r},t) \qquad (Q/S.t)$$



* FLUJO DE $\vec{J}$:

$$\boxed{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = I}$$

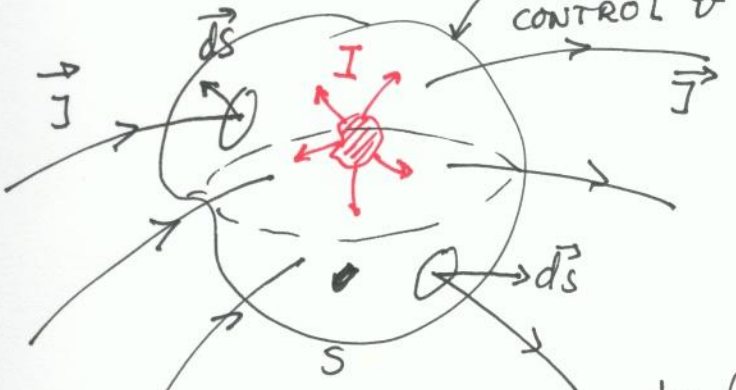
es la intensidad de la corriente o carga por unidad de tiempo que atraviesa la superficie S

* INTERPRETACION MICROSCOPICA DE $\vec{J}$.

$$\vec{J} = n.q.\vec{v}$$

- $n \equiv$ nº de portadores de carga por u. de vol.
- q = carga de cada portador
- $\vec{v} \equiv$ velocidad media de los portadores

- ECUACION DE CONTINUIDAD: CONSERVACION DE LA CARGA



En el volumen de control v limitado por la superficie S

$$\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \underbrace{-\frac{dQ}{dt}}_{i)} + \underbrace{I}_{ii)}}$$

corriente neta que escapa a través de S

i) Término que representa la disminución de la carga neta en el interior de v en ausencia de fuentes o sumideros internos de corriente

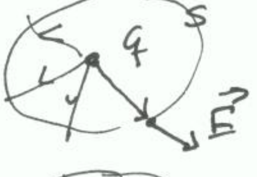
ii) Término que representa la aportación extra de corriente debida a fuentes internas (o disminución si son sumideros)

Los manantiales (sumideros) de corriente pueden representarse como distribuciones de PUNTOS DE CORRIENTE. (3D, 2D o 1D)

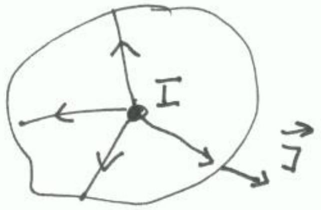
$$I = \iiint_V \dot{\rho}_{PC}\, dv \qquad \text{con } \dot{\rho}_{PC} = \frac{Q}{t \cdot Vol}.$$

N: Un punto de corriente es similar a una carga eléctrica puntual. La carga genera $\vec{E}$ mientras que el punto genera $\vec{J}$ de modo que

carga q: $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$



punto I: $\displaystyle\oiint \vec{J}\, d\vec{S} = I$



La ecuación de continuidad se puede escribir en forma diferencial.

$$\oiint \vec{J}\, d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\vec{J}\cdot dv = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dv + \underbrace{\iiint_V \dot{\rho}_{PC}\cdot dv}_{dI}$$

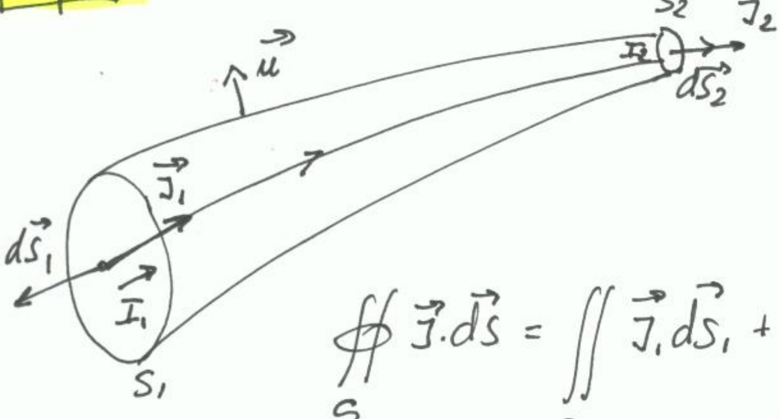
lo cual también se escribe

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{\rho}_{PC}}$$

Ec. de continuidad en forma diferencial.

Las fuentes de $\vec{J}$ son la disminución/acumulac. de carga en V y los puntos de corriente manantiales o sumideros

Ejemplo: Corriente estacionaria sin manantiales ni sumideros



$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ o bien

$$\iiint_V \vec{\nabla}\vec{J}\cdot dv = \oiint_S \vec{J}\, d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -I_1 + I_2 = 0$$

por tanto $I_1 = I_2$, la corriente se mantiene cte a lo largo del tubo.

3-1) LEY DE OHM

Lo que hace mover las cargas libres ~~son~~ es un campo eléctrico de modo que para medios conductores lineales

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

σ = conductividad del medio.

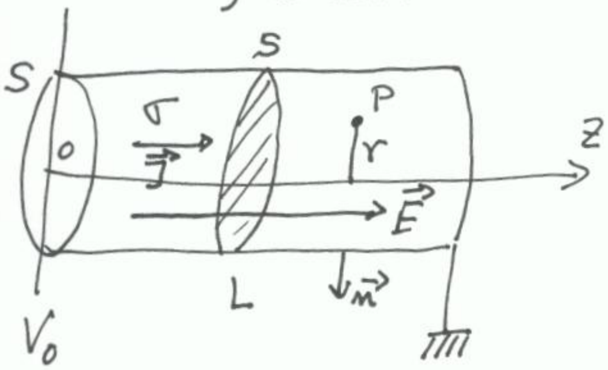
N: Si σ es escalar $\vec{J} \parallel \vec{E}$ pero σ puede ser una matriz 3x3.

¿De donde viene el campo eléctrico? Este campo motor de las cargas puede ser un campo generado por conductores cargados lo que equivale a decir que es generado por diferencias de potencial en el medio conductivo. Estos conductores a diferente potencial creadores del campo motor se llaman ELECTRODOS.

Ejemplo 1: Entre los extremos de una pieza cilíndrica de un material conductor σ con S y L se establece una ddp V_0.

a) Probar que se crea un campo $\vec{E}$ uniforme en el interior

b) Calcular la corriente que fluye por el interior de la pieza



a) Supongamos que no hay flujo de corriente lateral.

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$$

El potencial cumple la ecuación

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 V = 0 \\ \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial n} = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{\partial V}{\partial r} = 0 \right) \\ V(0) = V_0 \\ V(L) = 0 \end{cases}$$

En coordenadas cilíndricas se ve que $V(r,\varphi,z) \equiv V(z)$ y por tanto

$V(z) = A \cdot z + B$ con $B = V_0$ y $A = -\dfrac{V_0}{L} \Rightarrow V(z) = -\dfrac{V_0}{L} z + V_0$

y por tanto el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = \frac{V_0}{L} \vec{k} \quad \underline{\text{uniforme}}$$

b) para calcular la corriente

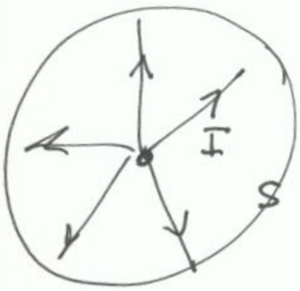
$$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iint_S \sigma E \cdot dS = \sigma \frac{V_0}{L}\cdot S = V_0 \cdot \frac{\sigma S}{L}$$

Notemos que $\frac{\sigma \cdot S}{L}$ es un factor que depende de parámetros del sistema y de su disposición geométrica. La relación anterior establece que V_0 es proporcional a I y este factor se llama RESISTENCIA OHMICA R

resistividad.

$$V_0 = I \cdot R \quad \text{con} \quad R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho \cdot L}{S}$$

Ejemplo 2: Un punto de corriente I se sitúa en un medio conductivo de resistividad ρ. Calcula el campo eléctrico generado y el potencial en cualquier punto del espacio.



SIMETRIA

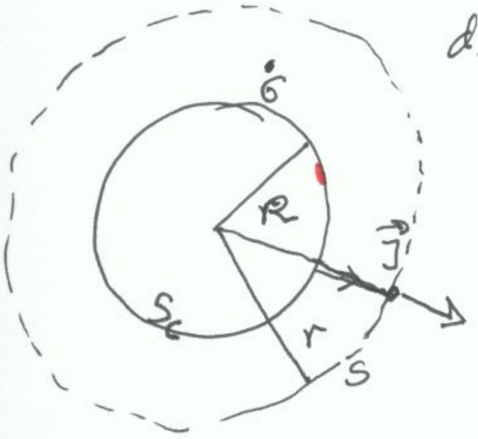
$$\oiint_S \vec{J} d\vec{S} = I \Rightarrow J(r)\cdot 4\pi r^2 = I \Rightarrow J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\rho I}{4\pi r^2}\vec{u}_r$$

$$V(r) = \int_r^\infty \vec{E}(r) d\vec{r} = \frac{\rho I}{4\pi r}$$

Nótese que estamos suponiendo que el otro electrodo al cual se dirigen las cargas que salen del punto de corriente está en el infinito. Lo normal es que tengamos un electrodo en el que se sitúan los puntos de corriente y el otro electrodo que puede estar cerca del primero o bien en el infinito.

Ejemplo 3: Una esfera metal de radio R se sitúa en un medio conductivo de σ. Sobre su superficie se coloca una distribución uniforme superficial de puntos de corriente $\dot{\sigma}$ de modo que generan una intensidad total I. Calcular el potencial a $r > R$



$$dI = \dot{\sigma}\, dS$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I = \iint_{S_c} \dot{\sigma}\, dS = \dot{\sigma}\cdot 4\pi R^2$$

$$J(r)\cdot 4\pi r^2 = \dot{\sigma}\cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \boxed{J(r) = \frac{\dot{\sigma} R^2}{r^2}}$$

$$V(r) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\vec{J}}{\sigma}\, d\vec{r} = \frac{\dot{\sigma} R^2}{\sigma}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \rho\dot{\sigma} R^2\left(\frac{1}{r}\right)$$

Si $\dot{\sigma} = \dfrac{I}{4\pi R^2}$ entonces $\boxed{V(r) = \dfrac{\rho I}{4\pi r}}$, el mismo que el generado por un simple punto de corriente I en el centro.

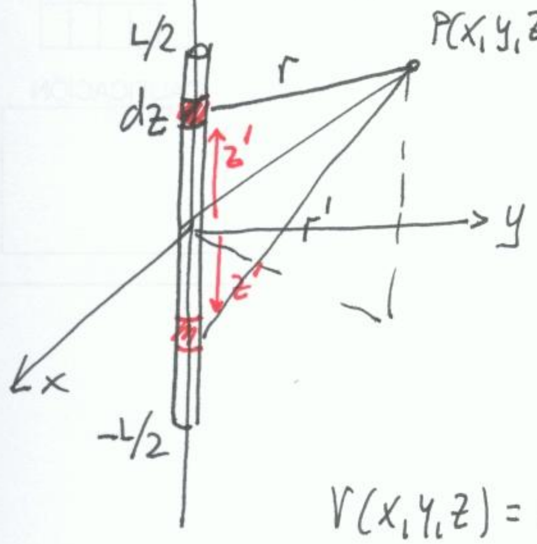
N: En este ejemplo se puede calcular la RESISTENCIA óhmica del ~~Ejemplo 4~~ medio conductivo como

$$R = \frac{V(R)}{I} = \frac{\rho}{4\pi R}$$

Ejemplo 4: Electrodo en forma de varilla de longitud L sobre el eje Z con una densidad lineal de P.C. λ constante. Calcular el potencial en cualquier punto del espacio.

Notese que $I = \int_L \lambda\cdot dl = \lambda\cdot L \Rightarrow \lambda = \dfrac{I}{L}$

$\lambda = \frac{I}{L}$



$$dV(P) = \frac{\rho \cdot \lambda\, dz}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}$$

$$r'=\sqrt{x^2+y^2+(z+z')^2}$$

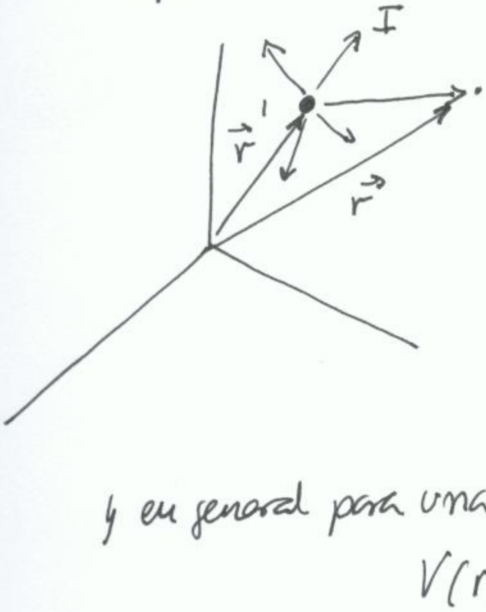
$$V(x,y,z)=\int_0^{L/2}\frac{\rho I}{4\pi L}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)dz'$$

(Proponer otros ejemplos: Notas del master-PAT)

Nota: Observamos que $\vec{J}$ satisface el principio de superposición respecto a las fuentes de corriente y por tanto también $\vec{E}$ y V al menos para las corrientes estacionarias. Además para un punto de corriente en un medio conductivo σ cte. se verifica que.

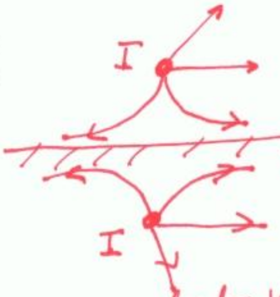
CORRIENTE ESTACION.

$\rho_{PC} = I\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ $\vec{\nabla}\vec{J} = I\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ $\boxed{\vec{\nabla}\vec{J}=\dot{\rho}_{PC}}$



$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{I}{\sigma}\delta(\vec{r}-\vec{r}')}$$

+ C.C. $\longrightarrow$ IMAGENES



para calcular V en SUELO.

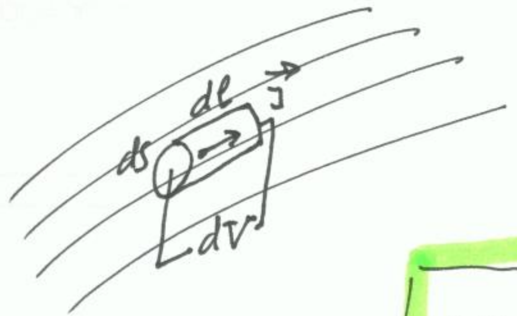
$$V(r)=\frac{\rho I}{4\pi|r-r'|}$$

y en general para una distribución

$$V(r)=\iiint_{v'}\frac{\rho\cdot\dot{\rho}_{pc}\,dv'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}+\iint_{S'}\rho\frac{\dot{\sigma}_{pc}\,d\vec{s}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}+\int_{L'}\rho\frac{\dot{\lambda}_{pc}\,dl}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

3.-2) CALCULO DE RESISTENCIAS

Se puede generalizar este resultado. En un campo espacial de corriente

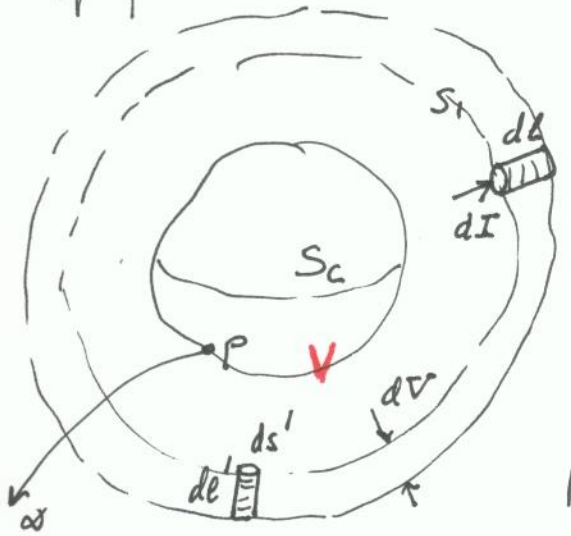


$$dV = \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\vec{J}}{\sigma}\vec{dl} = \rho J\cdot dl \quad \Big\} \; dR = \frac{dV}{dI}$$

$$dI = J\cdot dS$$

$$\boxed{dR = \rho\frac{dl}{ds}}$$

Si ahora tenemos un electrodo cualquiera y S_1 y S_2 dos superficies equipotenciales



$$I = \oiint dI = \oiint \vec{J}\,\vec{dS} =$$

$$= \oiint \frac{dV}{dR} = dV\cdot \underbrace{\oiint_{S_1} \frac{1}{dR}}_{\text{suma de resistencias en paralelo}} = dV\cdot\oiint_{S_1}\frac{dS}{\rho\cdot dl(ds)}$$

para encontrar la resistencia final.

$$dV = I \Big/ \oiint_{S(r')} \frac{\sigma\cdot dS(r')}{dl(ds)}$$

y solo queda integrar en el potencial.

$$V = \int_P^{\infty} \frac{I}{\oiint_{S(r')} \frac{\sigma ds(r')}{dl(ds)}} \Rightarrow R = \frac{V}{I} = \int_P^{\infty}\frac{1}{\oiint_{S(r')}\frac{\sigma ds}{dl(ds)}}$$

Simplificacion: Si el espesor de una capa de material conductor entre dos sup. equipot. es constante, dl es indep. de dS

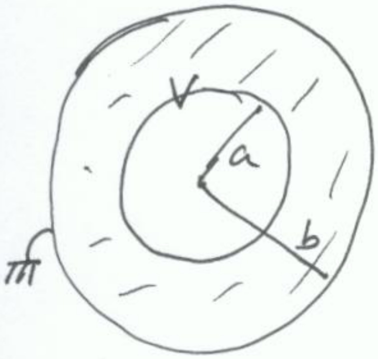
$$\left[R = \int_P^{\infty} \frac{dl}{\oiint_{S(l)} \sigma\, dS} \underset{\sigma\,\text{cte}}{=} \boxed{\int_P^{\infty} \frac{\rho\, dl}{S(l)}} \right.$$

Ejemplo 1: Dos superficies metálicas esféricas concéntricas de radios a y b y en el hueco un material conductivo σ. Si están a la ddp V

a) Corriente que fluye entre las esferas

b) Resistencia entre ellas

c) Con los resultados anteriores, calcular qué corriente fluye entre dos esferas metálicas en agua marina si están bastante separadas una de otra y su ddp es V



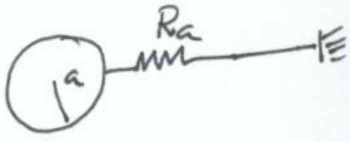
a)

$$V = \int_a^b \frac{J}{\sigma} dr = \int_a^b \frac{\rho I}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho I}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{4\pi V}{\rho\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}}$$

b) $$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

c) Si $b >> a \Rightarrow V_a \simeq \frac{\rho I}{4\pi a} \Rightarrow R_a \simeq \frac{\rho}{4\pi}\frac{1}{a}$



Teniendo en cuenta que la esfera que da corriente va con I positiva y que la esfera que toma va con I negativa

$$V_a - V_{a'} = V_a - V_\infty - (V_{a'} - V_\infty) = \frac{\rho I}{4\pi a} + \frac{\rho I}{4\pi a} = \frac{\rho I}{2\pi a} \Rightarrow$$

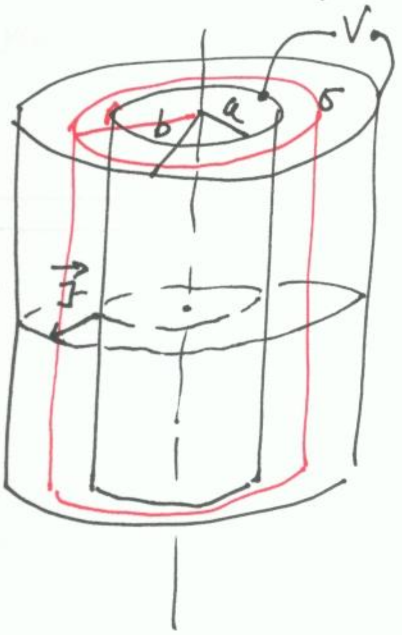
$$\boxed{I = \frac{V_a - V_{a'}}{R} = \frac{2\pi a (V_a - V_{a'})}{\rho} = 2\pi a \sigma (V_{aa'})}$$

N. El apartado b) también se puede hacer mediante la expresión

$$R = \int_a^b \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

que viene de la general $R = \int_a^b \frac{\rho\, dr}{S(r)}$

Ejemplo 2 Resistencia de una capa cilíndrica σ de radios a y b y longitud l



$$V = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{J}{\sigma}\,dr$$

con $J\cdot 2\pi r L = I \Rightarrow J = \dfrac{I}{2\pi r L}$

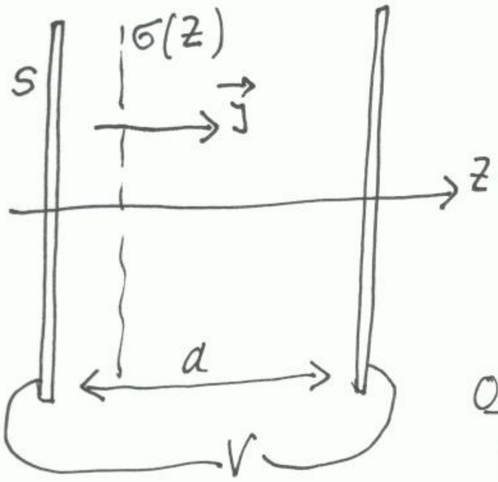
$$V = \int_a^b \frac{I}{2\pi L\sigma r}\,dr = \frac{I}{2\pi L\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\frac{b}{a}}$$

que también puede encontrarse mediante

$$R = \int_a^b \frac{\rho\,dr}{\underbrace{2\pi r L}_{S(r)}} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln r\Big]_a^b = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

Ejemplo 3 Dos placas de área S separadas d, a ddp V. El espacio entre ellas de material $\sigma(z) = a\cdot z + b$. Calcula la resistencia



$$\boxed{R = \int_d \frac{\rho(z)\,dz}{S} = \frac{1}{S}\int_0^d \frac{dz}{az+b} =}$$

$$= \frac{1}{bS}\ln(az+b)\Big]_0^d = \boxed{\frac{1}{Sb}\ln\frac{(ad+b)}{b}}$$

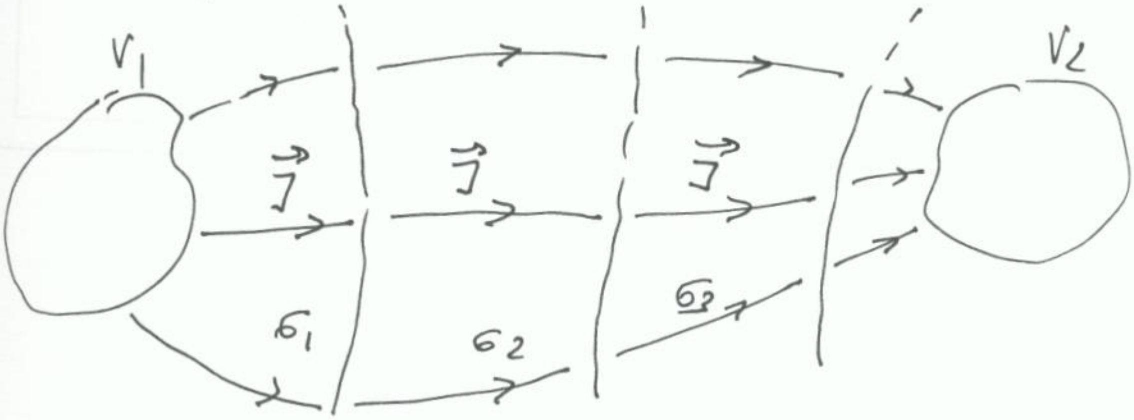
O bien:

$$V = \int_0^d \frac{J}{\sigma(z)}\,dz \underset{J\text{ unif.}}{=} I/S\int_0^d \frac{dz}{\sigma(z)} = \frac{I}{Sb}\ln\frac{(ad+b)}{b}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{Sb}\ln\left(\frac{ad+b}{b}\right)$$

3-3) ASOCIACION DE RESISTENCIAS

Cuando el campo de corrientes atraviesa medios conductivos de diferente conductividad.



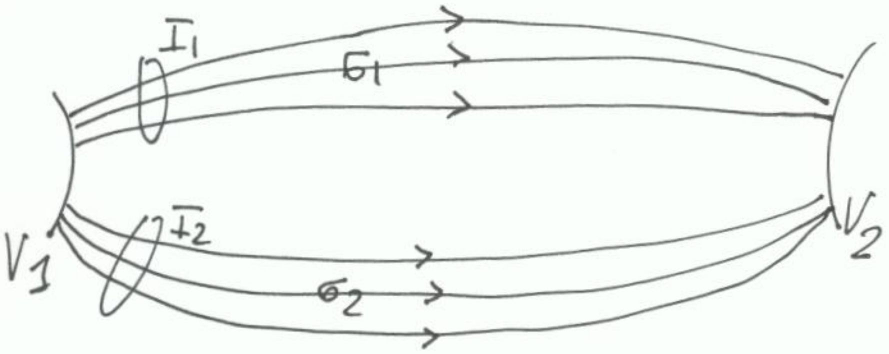
$$V_1-V_2=\int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma}\,d\vec{r} = \int_1 \frac{\vec{J}}{\sigma_1}\,d\vec{r} + \int_2 \frac{\vec{J}}{\sigma_2} + \cdots = I R_1 + I R_2 + \cdots$$

$$= \sum_i I\cdot R_i = I\cdot \underbrace{\sum_i R_i}_{R_T}$$

ASOCIACION EN SERIE

$$\boxed{R_T = \sum_i R_i}$$

En cambio si los flujos se dividen en zonas de diferente conductiv.



$$I = I_1 + I_2$$

ASOCIACION EN PARALELO.

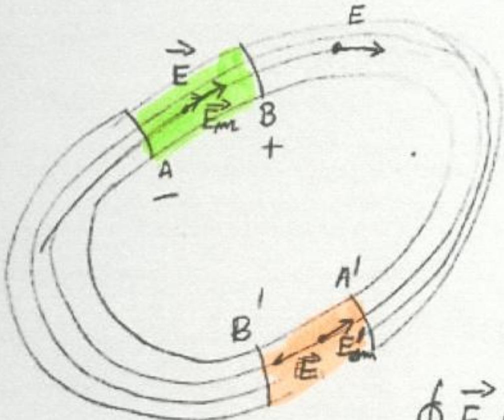
$$\left.\begin{aligned} V_1-V_2 &= \int_1^2 \frac{\vec{J}_1}{\sigma_1}\,d\vec{r} = I_1\cdot R_1 \\ V_1-V_2 &= \int_1^2 \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2}\,d\vec{r} = I_2 R_2 \end{aligned}\right\} \qquad V_1-V_2 = I\cdot R_T$$

$$\frac{V_1-V_2}{R_T} = \frac{V_1-V_2}{R_1} + \frac{V_1-V_2}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_T} = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$

3.4) FUERZA ELECTROMOTRIZ y CONTRA-ELECTROMOTRIZ

<u>Circuito cerrado</u>: Camino cerrado recorrido por la corriente eléctrica

<u>TEOREMA</u>: Es imposible mantener una corriente estacionaria circulando en un circuito cerrado con solo campos de naturaleza electrostática



$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$$

$$\oint \frac{\vec{J}}{\sigma}\, d\vec{r} \overset{I\cdot R}{=} 0 \Rightarrow \boxed{I=0}$$ no hay corriente

Si en algún tramo del circuito, por ejemplo A,B, existe algún dispositivo de modo que aparezca una fuerza suplementaria por unidad de carga $\vec{E}_m$ o CAMPO ELECTROMOTOR. entonces $\vec{E}_T = \vec{E}_e + \vec{E}_m$

$$\oint \vec{E}_T\, d\vec{r} \neq 0$$

definimos la fem del circuito a $\boxed{\oint \vec{E}_T\, d\vec{r} = \varepsilon}$ es igual también al trabajo por u de carga en cada vuelta hecho por el dispo electromotor

$$\oint \vec{E}_T\, d\vec{r} = \oint (\vec{E}_e + \vec{E}_m)\, d\vec{r} = \cancel{\oint \vec{E}_e\, d\vec{r}}^{\,0} + \oint \vec{E}_m\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_m\, d\vec{r} = \varepsilon_{AB}$$

<u>Ley de Ohm para un generador</u>

$$\int_A^B \vec{E}_T\, d\vec{r} = \int_A^B \frac{\vec{J}}{\sigma}\, d\vec{r} = I\cdot R_{AB}$$

$$\int_A^B \vec{E}_T\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_e\, d\vec{r} + \int_A^B \vec{E}_m\, d\vec{r} = V_A - V_B + \varepsilon_{AB}$$

$$\boxed{I R_{AB} = V_A - V_B + \varepsilon_{AB}}$$

FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ Análogamente al sentido que tiene la fem, podemos tener regiones en el circuito que absorban energía de las cargas móviles de manera que $\vec{E}_T = \vec{E}_e + \vec{E}_m + \vec{E}'_m$ con $\vec{E}'_m \uparrow\downarrow d\vec{r}$

de este modo $$\oint \vec{E}_T\, d\vec{r} = \cancel{\oint \vec{E}_e\, d\vec{r}}^{\,0} + \underbrace{\oint \vec{E}_m\, d\vec{r}}_{\varepsilon_{AB}} + \underbrace{\oint \vec{E}'_m\, d\vec{r}}_{-\varepsilon'_{A'B'}} = \varepsilon_{AB} - \varepsilon'_{A'B'}$$

3.5) LEY DE Ohm GENERALIZADA AL CIRCUITO COMPLETO

$$E_T = \frac{J}{\sigma}$$

$$\oint \vec{E}_T d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_T d\vec{r} + \int_B^{A'} \vec{E}_T d\vec{r} + \int_{A'}^{B'} \vec{E}_T d\vec{r} + \int_{B'}^{A} \vec{E}_T d\vec{r} =$$

$$= I R_{AB} + I R^{EXT}_{BA'} + I R_{A'B'} + I R^{EXT}_{B'A} = I \sum_i R_i$$

$$\oint \vec{E}_T d\vec{r} = \mathcal{E}_{AB} - \mathcal{E}'_{AB}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{AB} - \mathcal{E}'_{A'B'} = I \cdot \sum_i R_i}$$

3.6) BALANCE ENERGETICO EN UN CIRCUITO

El trabajo por ud. de carga vale $w = \mathcal{E}$ y para transportar la carga dq es

$$dW = dq \cdot \mathcal{E}_{AB}$$

La potencia gastada será pues

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}\mathcal{E} = I \cdot \mathcal{E}_{AB}$$

pero $\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}'_{A'B'} + I \cdot \sum_i R_i \Rightarrow$

$$\boxed{I\,\mathcal{E}_{AB} = I\,\mathcal{E}_{A'B'} + I^2 \sum_i R_i}$$

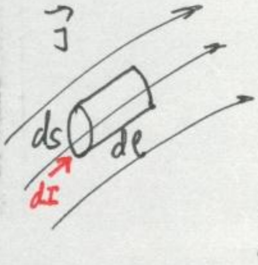
potencia dada por las baterías

potencia gastada en los contraelectrom.

potencia gastada en efecto Joule

Esta ecuación es de aplicación general

Nota: En un campo espacial de corrientes, dP es la potencia Joule



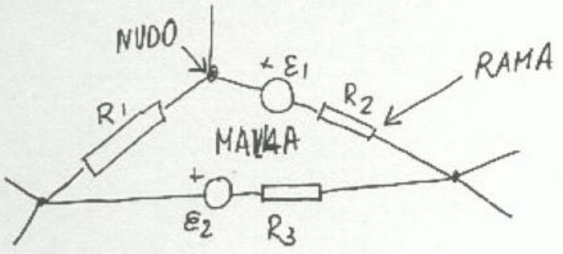
$$dI = J \cdot dS$$

$$dP = \frac{dW}{dt} = dI^2 \cdot R = J^2 \cdot dS^2 \cdot \rho \cdot \frac{dl}{dS} = J^2 \rho \cdot \frac{dS \cdot dl}{d\mathrm{vol}} = J^2 \rho \cdot d\mathrm{vol}$$

$$\frac{dP}{d\mathrm{vol}} = J^2 \rho = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

3.7) REDES ELECTRICAS DE C.C. (SISTEMAS DE PARAMETROS CONCENTRADOS)

Una red electrica es una combinación de elementos resistivos, fuerzas electromotrices y contraelectromotrices. Solo se consideraran las llamadas redes planas o redes desarrollables en un plano.



Para las redes eléctricas se utilizan las leyes de KIRCHOFF

1°) La suma de las intensidades que concurren en un nudo es cero (suma de entrantes = suma de salientes) Es una consecuencia de la conservación de la carga

$$\boxed{\sum_i I_i = 0}$$

2°) La suma de caidas de potencial en un contorno cerrado es cero y por tanto como $\vec{E}_T = \vec{E}_e + \vec{E}_m + \vec{E}'_m$

$$\oint_e \vec{E}_e \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{r_1} \vec{E}_e d\vec{r} + \int_{r_2} \vec{E}_e d\vec{r} + \dots = 0 \Rightarrow \underset{\text{ddp. rama } i}{\sum_i v_i} = 0$$

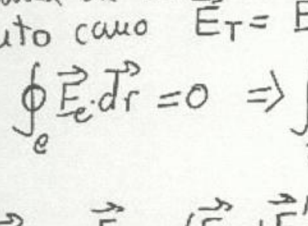
pero $\vec{E}_e = \vec{E}_T - (\vec{E}_m + \vec{E}'_m)$ luego

$$\int_{r_1} \left(\vec{E}_T - (\vec{E}_m + \vec{E}'_m)\right) d\vec{r} + \text{——} = 0$$

$$\boxed{\sum_i I_i R_i - (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) = 0}$$

ε'_i es electromotriz cuando la corriente la atraviesa de $-$ a $+$ y ε_i es contrael. si es al revés

Para resolver una red se suele emplear el método de las mayas



$$\boxed{I_j \cdot \sum_k R_{jk} - \sum_{l \neq k} I_k \cdot R_k = \sum_j \varepsilon_j - \varepsilon'_j}$$

$I_j \cdot \sum_k R_{jk}$: suma de intens. de maya por resistencia total de maya

$\sum_{l \neq k} I_k \cdot R_k$: suma de intens. de mayas adyacentes por resistencia compartida

$\sum_j \varepsilon_j - \varepsilon'_j$: suma de fem − fcem

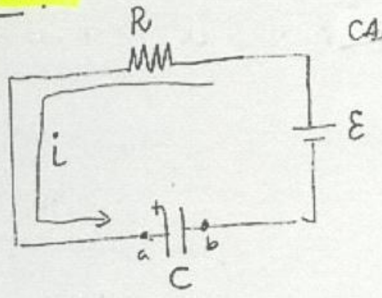
Como dispositivos em. podemos poner

$$\varepsilon = -\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \quad \text{o} \quad \varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$

Ejemplos:

CARGA DE UN CONDENSADOR

1)



$$\left.\begin{array}{l} i\cdot R = \mathcal{E}+\mathcal{E}_C \\ V_{ab} = -\mathcal{E}_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\,dt \end{array}\right\}$$

$$i(t)\,R = \mathcal{E} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

$$\frac{di}{dt}R + \frac{1}{C}i(t) = 0 \quad \text{si } \mathcal{E}=\text{cte}$$

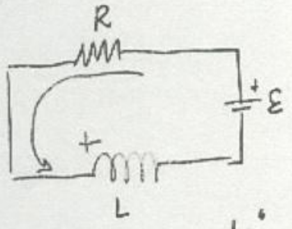
$$i(t) = A\,e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{con} \quad i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \text{ si el condensador está descargado}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$i(t) \to 0$ si $t \to \infty$

UN CONDENSADOR BLOQUEA LA C.C

2)



$$\mathcal{E}_L(t) = -L\frac{di}{dt}$$

$$iR = \mathcal{E}+\mathcal{E}_L$$

$$iR + L\frac{di}{dt} = \mathcal{E}$$

$$\lambda L + R = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

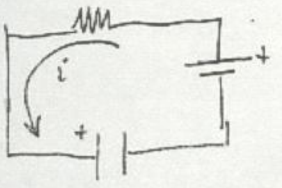
$$i_h = A\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_p = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} i(t) = A\,e^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{\mathcal{E}}{R} \\ i(0) = 0 \end{array}\right\} \boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

$i(t) \to \frac{\mathcal{E}}{R}$ si $t \to \infty$

3) Condensador en C.A. si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$



$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \mathcal{E}_0\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$i = i_h + i_p = A\,e^{-\frac{1}{RC}t} + i_p$$

$$\text{pero } i_p = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\cdot\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

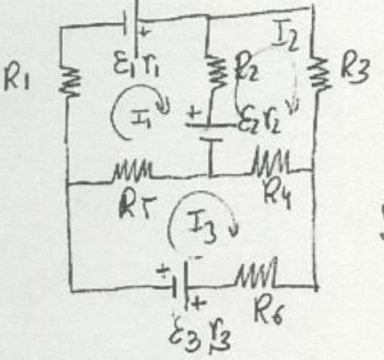
$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

NOTA IMPORTANTE

En un circuito como el del ejemplo 1) 2) o 3) anterior, se tiene que la corriente varía con el tiempo esto significa que para poder aplicar que la intensidad es la misma en todos los puntos del circuito, el régimen ha de ser estacionario. Sin embargo hay ciertamente contradicción pq estacionario significa que no cambian con el tiempo las magnitudes relevantes como son $\vec{J}$ o $\rho(\vec{r},t)$

Quiero decir que para poder escribir la ley de Ohm al circuito completo hay que verificar que la intensidad es la misma en cualquier parte del circuito. (régimen estacionario) si tenemos una intensidad variable con el tiempo y ya que las señales se propagan a velocidad finita, se debe cumplir que las variaciones con el tiempo sean tales que aseguren que la señal aparezca simultáneamente en todo punto del circuito. Esto exige que las dimensiones del circuito sean pequeñas o que la variación de las magnitudes sea de frecuencia pequeña. Por ejemplo para un circuito como el 3) los cálculos son válidos siempre que $\lambda = c\cdot\frac{2\pi}{\omega} \gg$ dimensiones lineales del circuito

Ejemplos resueltos



$$I_1(R_1+R_2+R_5+r_1+r_2)-I_2(R_2+r_2)-I_3R_5=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2$$

$$I_2(R_2+R_3+R_4+r_2)-I_1(R_2+r_2)-I_3R_4=\mathcal{E}_2$$

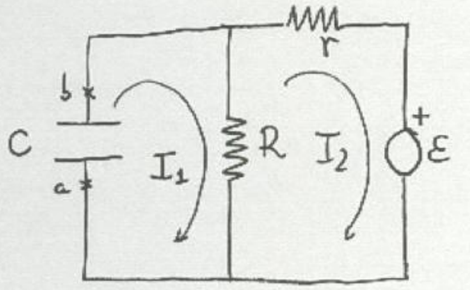
$$I_3(R_4+R_5+R_6+r_3)-I_1R_5-I_2R_4=-\mathcal{E}_3$$

Si $R_1=3$, $R_2=4$ $R_3=2$ $R_4=2$ $R_5=2$ $R_6=5$
y $r_1=r_2=r_3=1$, $\mathcal{E}_1=18$, $\mathcal{E}_2=15$, $\mathcal{E}_3=16$

$$11I_1-5I_2-2I_3=18-15$$
$$-5I_1+9I_2-2I_3=15$$
$$-2I_1-2I_2+10I_3=-16$$

cuya solución es $I_1=1$, $I_2=2$, $I_3=-1$

RED CON CAPACITANCIAS



$$\begin{cases} I_1 R - I_2 R = \mathcal{E}_c = -V_{ab} = -\dfrac{q(t)}{C} = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I_1\,dt + V_{ab}(0) \\ I_2(R+r) - I_1 R = -\mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} I_2 = \dfrac{I_1 R - \mathcal{E}}{R+r} \text{ y} \\ I_1 R - \dfrac{R(I_1 r - \mathcal{E})}{R+r} = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I_1\,dt - V_{ab}(0) \\ \dfrac{Rr}{R+r} I_1 + \dfrac{\mathcal{E} R}{R+r} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I_1\,dt + V_{ab}(0) = 0 \end{array}}$$

derivamos con el tiempo

$$R\frac{dI_1}{dt} - R\frac{dI_2}{dt} = -\frac{1}{C} I_1(t)$$

$$(R+r)\frac{dI_2}{dt} - R\frac{dI_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_2}{dt} = \frac{R}{R+r}\frac{dI_1}{dt}$$

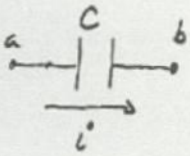
$$R\frac{dI_1}{dt} - \frac{R^2}{R+r}\frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{C} I_1(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{\dfrac{Rr}{R+r}}_{R_p}\dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{1}{C} I_1(t) \\ I_1(0) = -\dfrac{\mathcal{E}\cancel{R}}{\cancel{R+r}}\dfrac{\cancel{R+r}}{\cancel{R}r} - V_{ab}(0)\cdot\dfrac{R+r}{Rr} \\ \quad = -\dfrac{\mathcal{E}}{r} + \dfrac{R+r}{Rr} V_{ab}(0) \end{array}}$$

$$I_1(t) = I_1(0)\, e^{-\frac{t}{R_p C}} = -\left(\frac{\mathcal{E}}{r} + \underbrace{\frac{R+r}{Rr}}_{\frac{1}{R_p}} V_{ab}(0)\right) e^{-\frac{t}{R_p \cdot C}}$$

Si $V_{ab}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{I_1(t) = -\dfrac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{R_p C}}}$

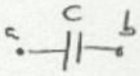
RED CON CAPACITANCIAS



$$v_{ab} = \frac{q(t)}{C} \qquad v_{ab}(0) = \frac{q(0)}{C}$$

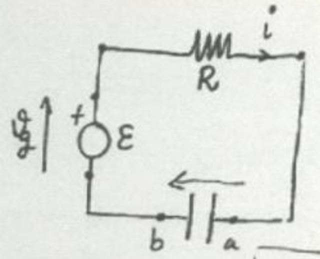
$$\frac{dq}{dt} = i(t) \Rightarrow q(t) = q(0) + \int_0^t i(t)\,dt$$

$$\boxed{v_{ab}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_{ab}(0)}$$



$$v_{ab} + \mathcal{E}_c = i \cdot \cancel{R}^{\,0} \Rightarrow v_{ab} = -\mathcal{E}_c$$

CARGA Y DESCARGA



$$\sum_i v_i = 0 \Rightarrow v_{ab} + v_g + iR = 0 \Rightarrow v_{ab} - \mathcal{E} + iR = 0$$

(o bien $iR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_c = \mathcal{E} - v_{ab}$)

$$\boxed{i(t)\cdot R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_{ab}(0) = \mathcal{E}}$$ Ec. del circuito

$R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i(t) = 0$ si $\mathcal{E} = cte$ que ha de resolverse con la condición inicial.

$$i(0)\cdot R + \cancel{\frac{1}{C}\int_0^0 i(t)\,dt}^{\,0} + v_{ab}(0) = \mathcal{E} \Rightarrow i(0) = \frac{\mathcal{E} - v_{ab}(0)}{R}$$

La solución es $\dfrac{di}{i} = -\dfrac{1}{RC}dt \Rightarrow \Big[\ln i\Big]_0^t = -\dfrac{t}{RC} \Rightarrow i = i(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}$

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E} - v_{ab}(0)}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}} \qquad v_{ab}(0) = \frac{q(0)}{C}$$

Si $v_{ab}(0) = 0$ (condens. descargado) $\Rightarrow$ $i(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ y

$$v_{ab} = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt = -\frac{\mathcal{E}RC}{RC}\Big[e^{-\frac{t}{RC}}\Big]_0^t = -\mathcal{E}\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right) =$$

$$= \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

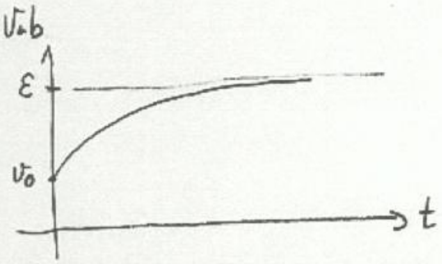
CARGA

Si $v_{ab}(0)=\pm v_0$ entonces podemos tener dos posibilidads. $\pm v_0$

i) Si $v_{ab}(0)=+v_0$ entonces

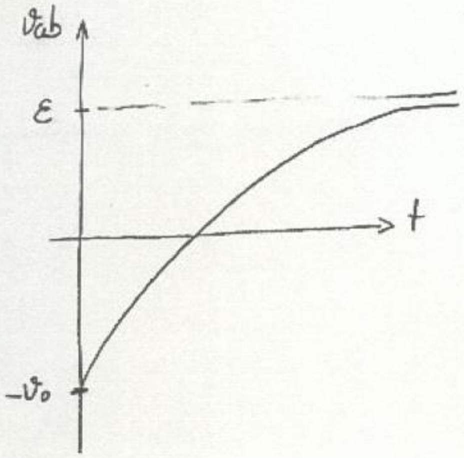
$$i(t)=\frac{\mathcal{E}-v_0}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad y \quad v_{ab}(t)=v_0+\int_0^t \frac{\mathcal{E}-v_0}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}dt =$$

$$= v_0 + (\mathcal{E}-v_0)\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



ii) Si $v_{ab}(0)=-v_0$

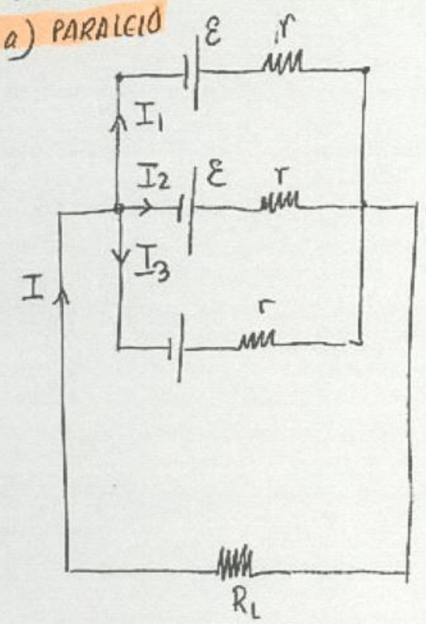
$$i(t)=\frac{\mathcal{E}+v_0}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad y \quad v_{ab}(t)=-v_0+(\mathcal{E}+v_0)\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



PRIMERO SE DESCARGA Y POR ULTIMO SE VUELVE A CARGAR

ASOCIACION DE GENERADORES

a) PARALELO



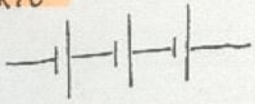
$$\left.\begin{array}{l} IR_L + I_1 r = \mathcal{E} \\ IR_L + I_2 r = \mathcal{E} \\ IR_L + I_3 r = \mathcal{E} \end{array}\right\} I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3} I$$

$IR_L + \frac{1}{3} I r = \mathcal{E} \Rightarrow$ equivale a una sola pila de fem, $\mathcal{E}$ y resistencia interna $r' = \frac{1}{3} r$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_L + \frac{1}{3} r}$$

En general para n generadores se tiene $\mathcal{E}$ y $r' = \frac{1}{n} r$

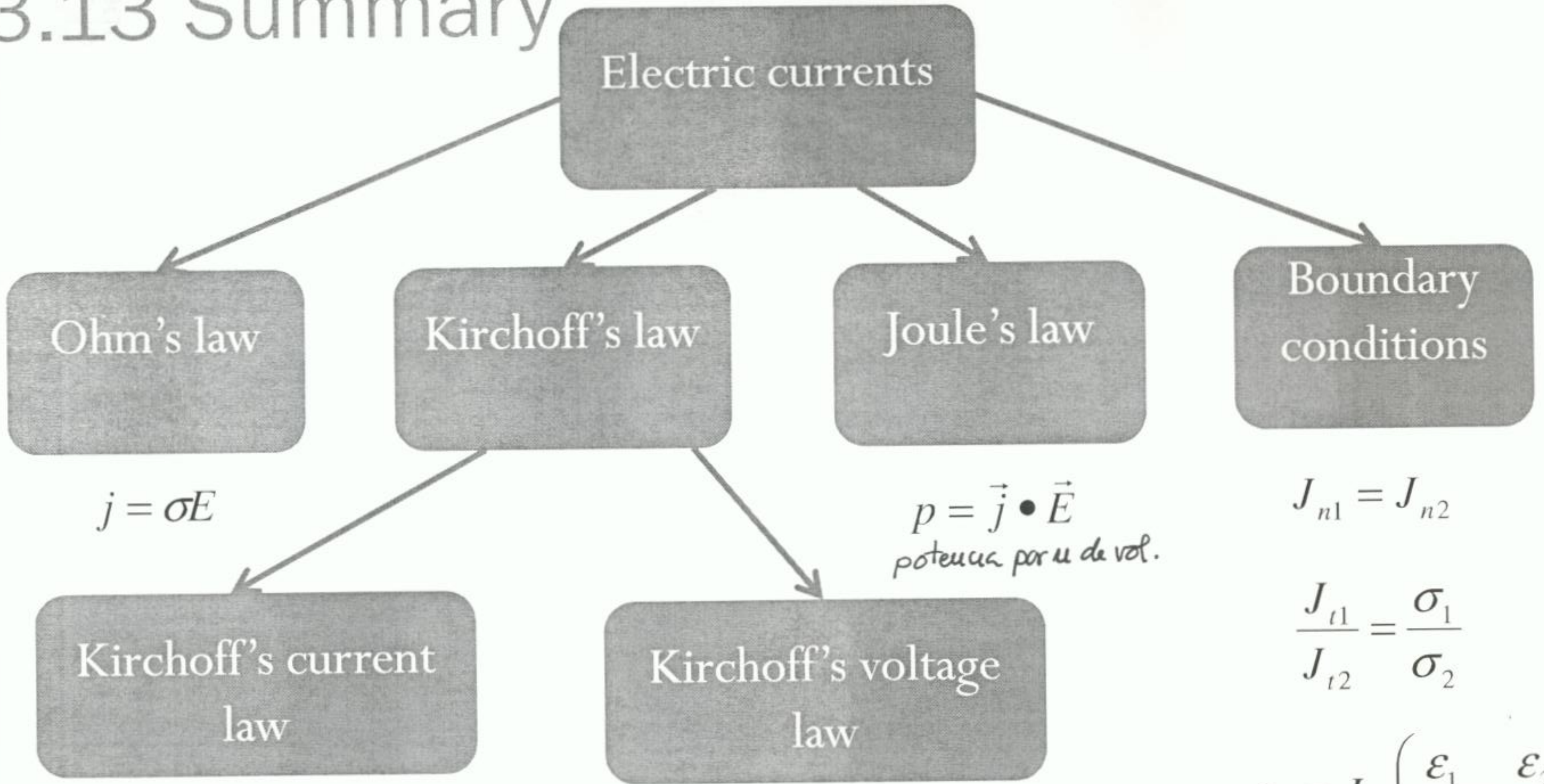
b) SERIE



$IR_L + n \cdot r I = \underbrace{\sum \mathcal{E}_i}_{n\mathcal{E}} \Rightarrow$ equivale a una pila de $n\mathcal{E}$ y $r' = nr$

3.13 Summary

Fig. 3.10 (a) Electric currents in a nutshell



$j = \sigma E$

$p = \vec{j} \bullet \vec{E}$

potencia por u de vol.

$J_{n1} = J_{n2}$

$\frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

$\rho_s = J_{n1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)$

$\sum I = 0$

$\sum_{m=1}^{M} \xi_m = \sum_{n=1}^{N} i_n R_n$