

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

FÍSICA II

EUITI-UPM

CAPÍTULO 1

**Campo eléctrico I:
distribuciones discretas de carga**

Índice del capítulo 1

- 1.1 Carga eléctrica.
- 1.2 Conductores y aislantes.
- 1.3 Ley de coulomb.
- 1.4 El campo eléctrico.
- 1.5 Líneas de campo eléctrico.
- 1.6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos.
- 1.7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos.

1.1 Carga eléctrica

✚ Cuando una barra de plástico se frota con un trozo de piel adquiere la capacidad de repelar a otras barras de plástico similares. Sin embargo, repele a las barras de vidrio que han sido frotadas con seda.

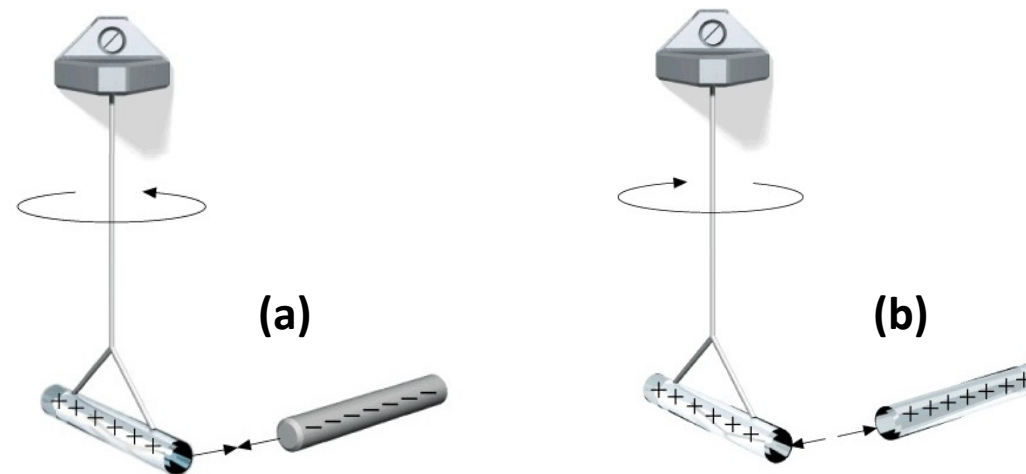


Figura 1.1: (a) Los objetos portadores de cargas de signo opuesto se atraen entre sí. (b) Los portadores de carga del mismo signo se repelen entre sí.

✚ Se dice que estos objetos al ser frotados adquieren una propiedad física llamada **carga eléctrica**. Hay dos tipos diferentes de carga, positiva y negativa. Los objetos con cargas del mismo signo se repelen y con signos opuestos se atraen.

✚ Hoy en día sabemos que la carga es una propiedad de las partículas elementales, como lo son su masa o su espín.

1.1 Carga eléctrica

✚ La carga en la naturaleza está cuantizada en unidades de la carga del electrón e .

$$Q = \pm Ne \quad (N = \text{número entero})$$

✚ Cuando dos objetos intercambia carga eléctrica, la carga total permanece constante. La ley de conservación de la carga es una ley fundamental de la naturaleza.

✚ La unidad del SI de carga es el culombio, el cual se define en función de la unidad de corriente eléctrica, el *amperio* (A). *El culombio (C)* es la unidad de carga que fluye a través de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el mismo es de un amperio. La unidad fundamental de carga eléctrica e está relacionada con el culombio por:

$$e = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Ejemplo 1.1: Una moneda de cobre ($Z = 29$) tiene una masa de 3 g. ¿Cuál es la carga total de todos los electrones contenidos en la moneda?

Solución: $-1.32 \times 10^5 \text{ C}$.

1.2 Conductores y aislantes

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**. En otros materiales, tales como la madera y el vidrio, todos los electrones están ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se denominan **aislantes**.

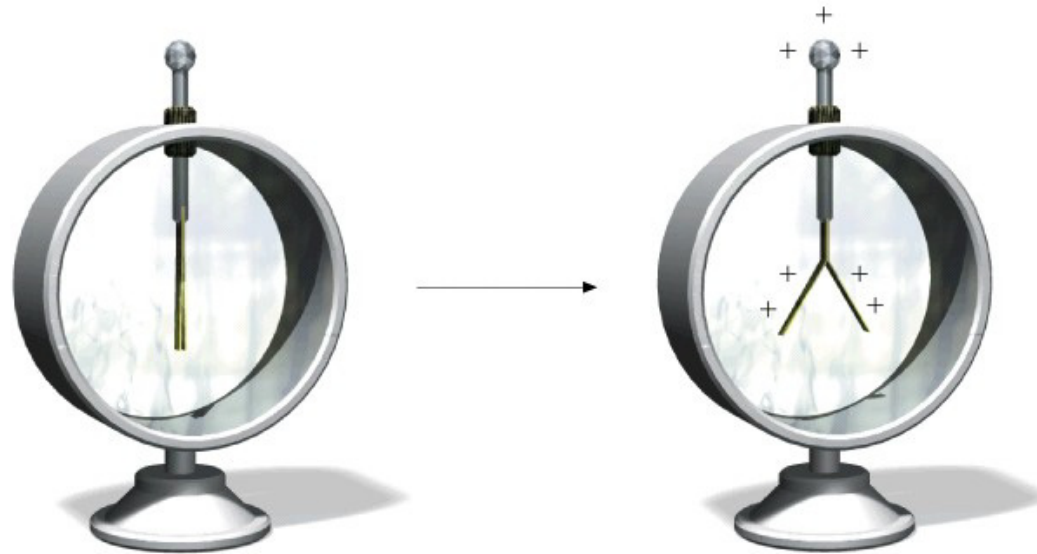


Figura 1.2: Electroscopio. Dos hojas de oro se conectan a una barra metálica terminada en la parte superior por una esfera de metal. Cuando se toca la esfera con una barra de plástico cargada negativamente se transfieren algunas cargas negativas de la barra a la esfera, y de ésta son conducidos a las hojas de oro, las cuales se separan debido a la repulsión de sus respectivas cargas negativas. Algo similar ocurre si se toca la esfera con una barra de vidrio cargada positivamente.

1.2 Conductores y aislantes

+ Carga por inducción:

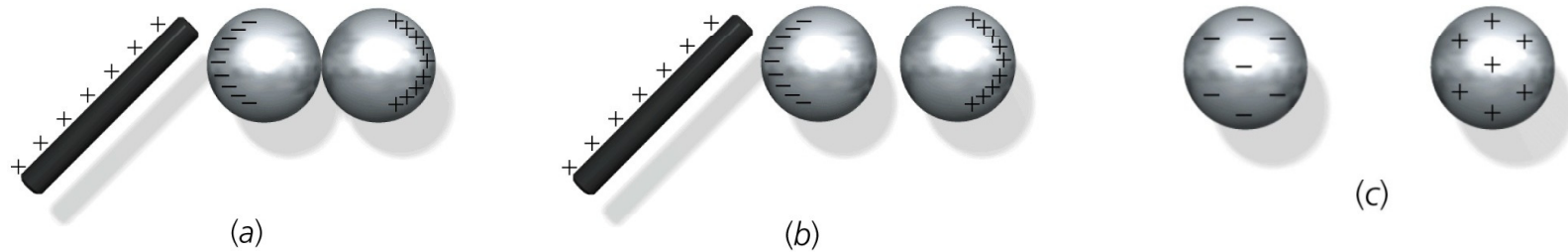


Figura 1.3: Carga por inducción.

+ La propia Tierra constituye un conductor que para muchos propósitos puede considerarse infinitamente grande y con un suministro de carga libre abundante.

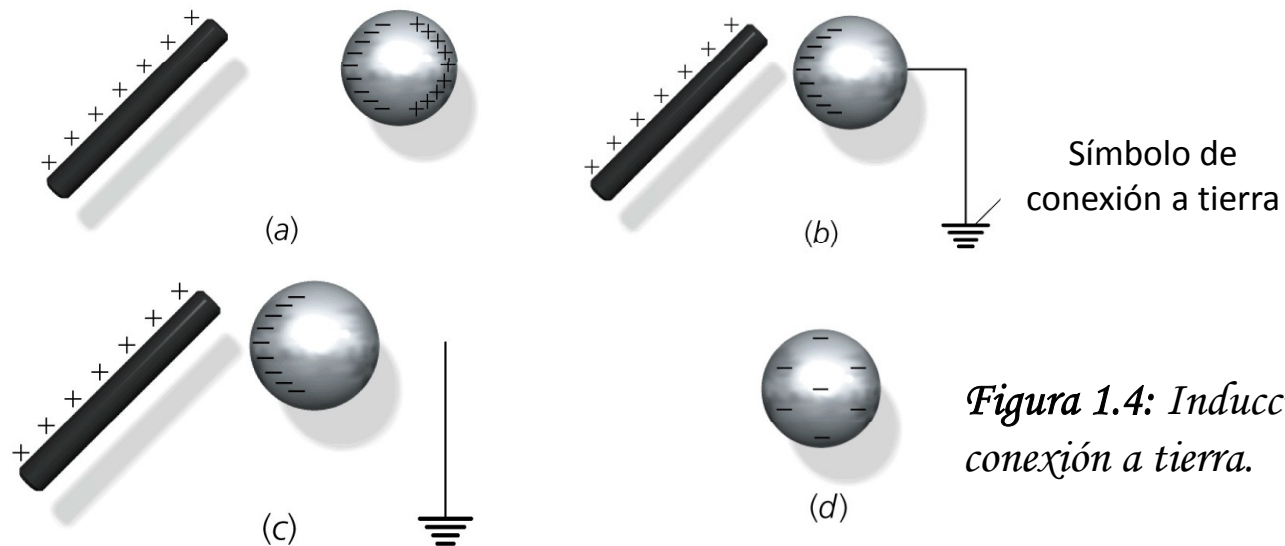


Figura 1.4: Inducción por conexión a tierra.

1.3 La ley de Coulomb

La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa a las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

La fuerza $\vec{F}_{1,2}$ ejercida por q_1 sobre q_2 es:

$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$$

$k = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 = \text{constante de Coulomb}$

[La ley de Coulomb]

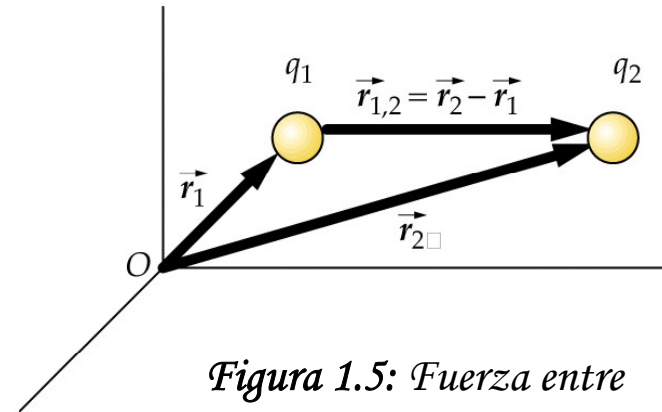


Figura 1.5: Fuerza entre dos cargas puntuales.

Ejemplo 1.2: En el átomo de hidrógeno el electrón está separado del protón por una distancia media de $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$. ¿Cuál es el módulo de la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón? **Solución:** $F = 8.19 \times 10^{-8} \text{ N}$.

Ejemplo 1.3: Calcular la relación que existe entre las fuerzas eléctrica y gravitatoria entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno. **Solución:** $F_e = 2.27 \times 10^{39} F_g$.

1.3 La ley de Coulomb

En un sistema de cargas, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema. Esta es una consecuencia del principio de superposición de las fuerzas.

Ejemplo 1.4: Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x : q_1 está en el origen; q_2 está en $x = 2$ m y q_0 en x ($x > 2$ m). Encontrar una expresión de la fuerza neta sobre q_0 debida a q_1 y q_2 .

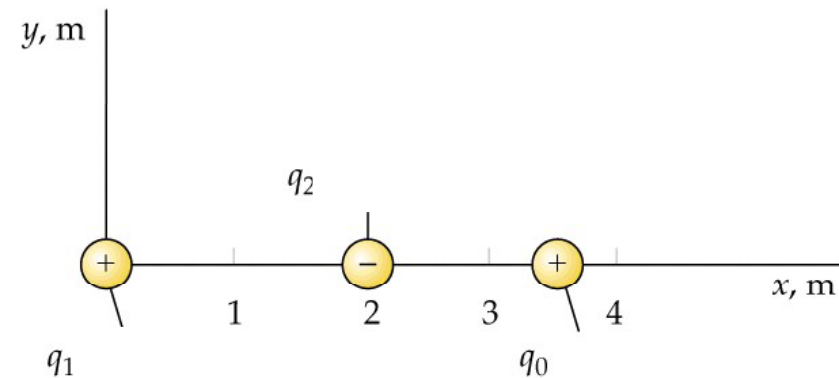


Figura 1.6

Ejemplo 1.5: Considere el sistema de cargas que se muestra en la figura de la derecha. Determine la fuerza neta que se ejerce sobre la carga q_0 .

Solución: $F_x = 3.97 \times 10^{-7}$ N; $F_y = -2.77 \times 10^{-7}$ N.

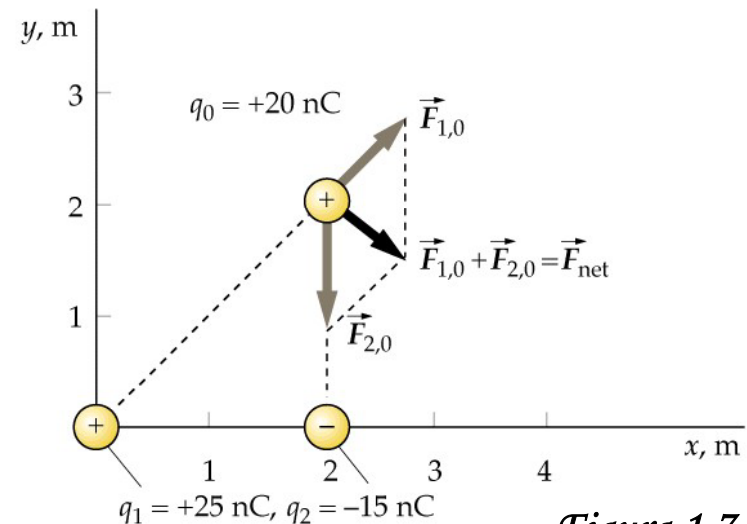
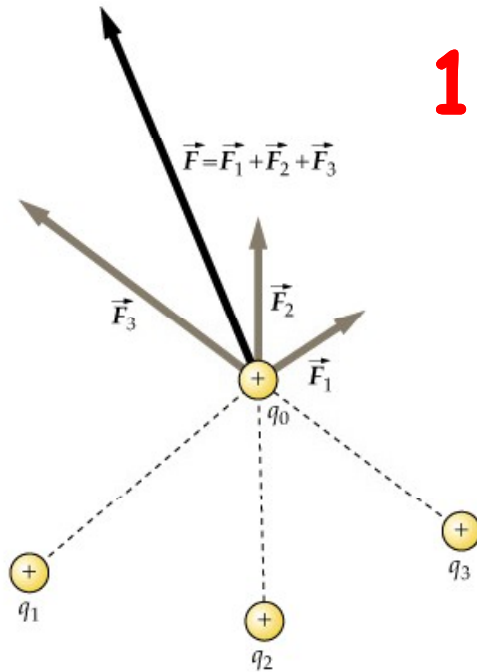


Figura 1.7

1.4 El campo eléctrico



✚ Consideremos la carga testigo q_0 de la figura 1.8. Sobre dicha carga se ejerce una fuerza $\vec{F}$ que es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por las cargas q_i . El **campo eléctrico** en un punto se define como dicha fuerza dividida por q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Figura 1.8: Una carga testigo q_0 en las proximidades de cargas q_1 , q_2 , $q_3 \dots$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ proporcional a q_0 .

✚ La unidad del SI del campo eléctrico es el newton por culombio: N/C.

✚ Campo eléctrico debido a una carga puntual q_i :
$$\vec{E}_i = \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0}$$

✚ Campo eléctrico debido a una distribución de cargas puntuales:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_{i,0}^2} \hat{r}_{i,0}$$

1.4 El campo eléctrico

Ejemplo 1.6: Una carga positiva $q_1 = +8 \text{ nC}$ se encuentra en el origen y una segunda carga positiva $q_2 = +12 \text{ nC}$ está sobre el eje x a una distancia $a = 4 \text{ m}$ (ver figura 1.9). Determinar el campo eléctrico resultante (a) en el punto P_1 sobre el eje x en $x = 7 \text{ m}$ y (b) en el punto P_2 sobre el eje x en $x = 3 \text{ m}$. (c) Determinar además el punto del eje x donde el campo eléctrico se anula.

Solución: (a) $\mathbf{E} = (13.5 \text{ N/C})\mathbf{i}$; (b) $\mathbf{E} = (-100 \text{ N/C})\mathbf{i}$; (c) $x = 1.8 \text{ m}$.

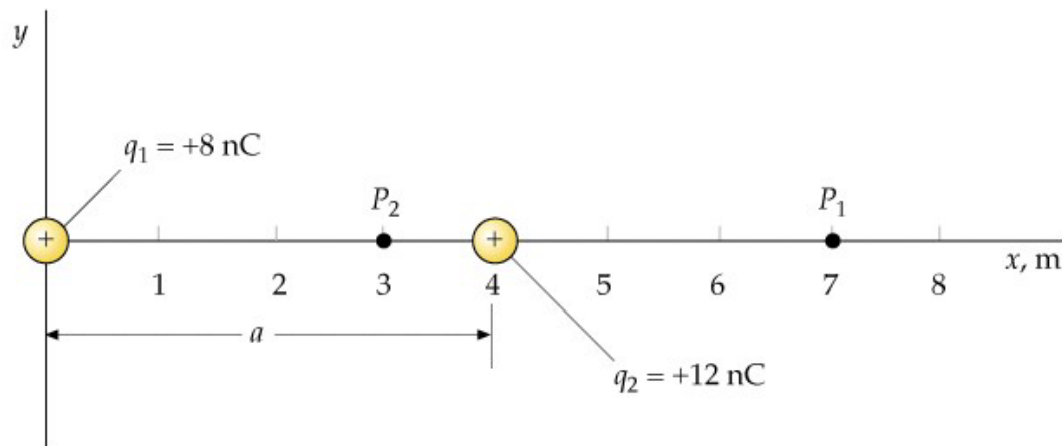


Figura 1.9

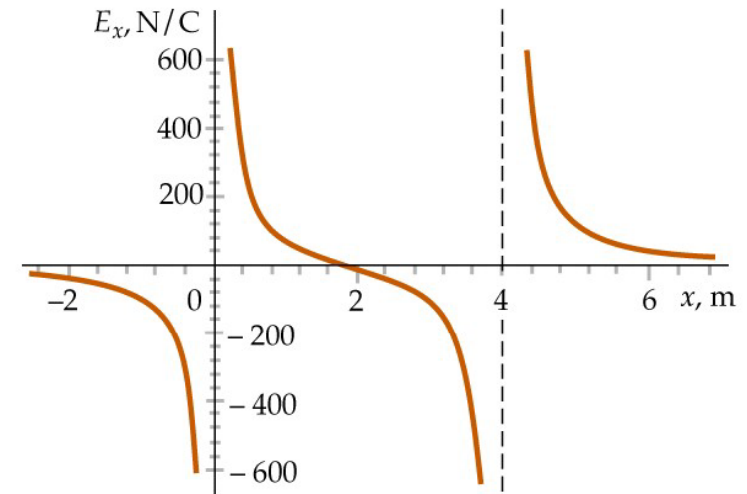


Figura 1.10: Gráfico de E_x en función de x para este sistema.

1.4 El campo eléctrico

Ejemplo 1.7: Determinar el campo eléctrico sobre el eje y en $y = 3$ m para las cargas del ejemplo 1.6 (ver figura 1.11).

Solución: $|\mathbf{E}| = 11.2$ N/C; $\theta_1 = 108^\circ$.

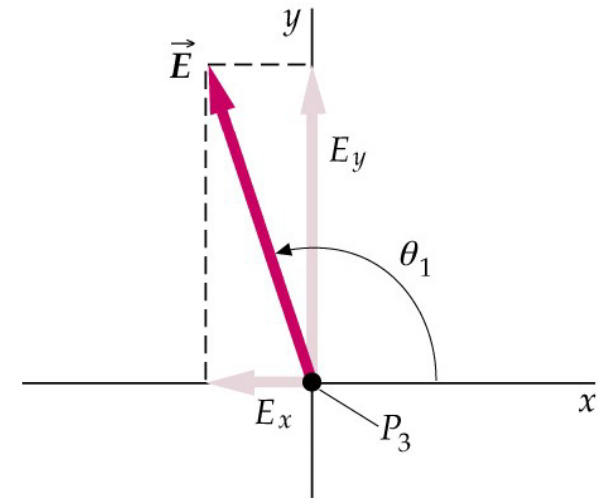
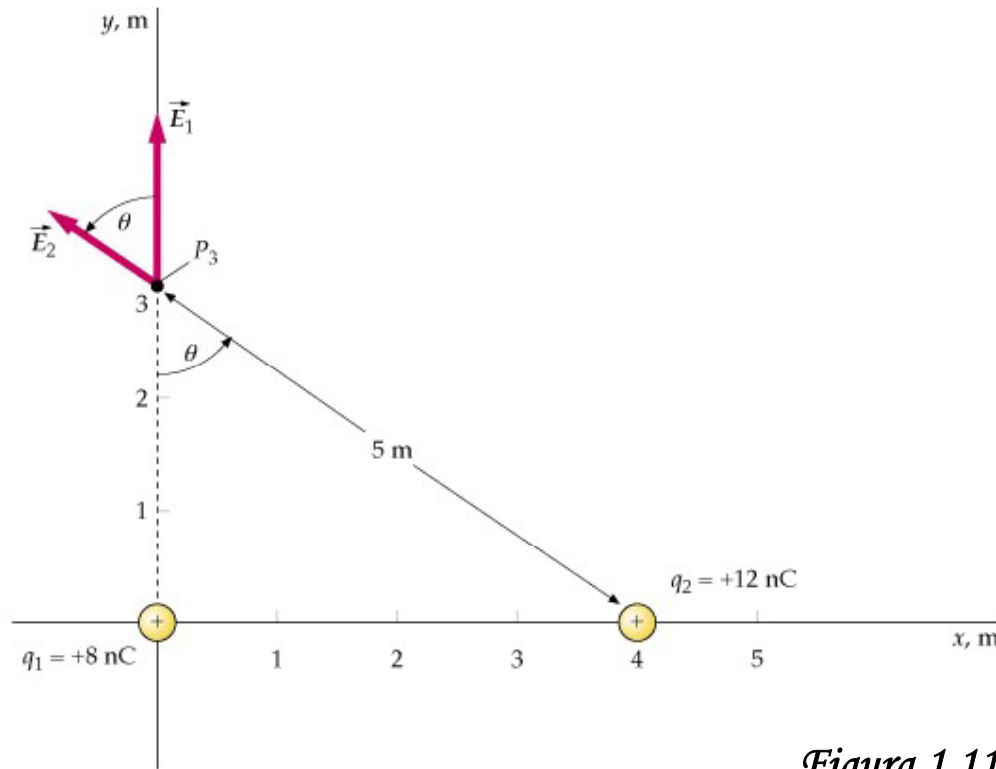


Figura 1.11

1.4 El campo eléctrico

Ejemplo 1.8: Una carga $+q$ se encuentra en $x = a$ y una segunda carga $-q$ en $x = -a$ (figura 1.12). (a) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto arbitrario. (b) Determinar la forma límite del campo eléctrico para $|x| \gg a$.

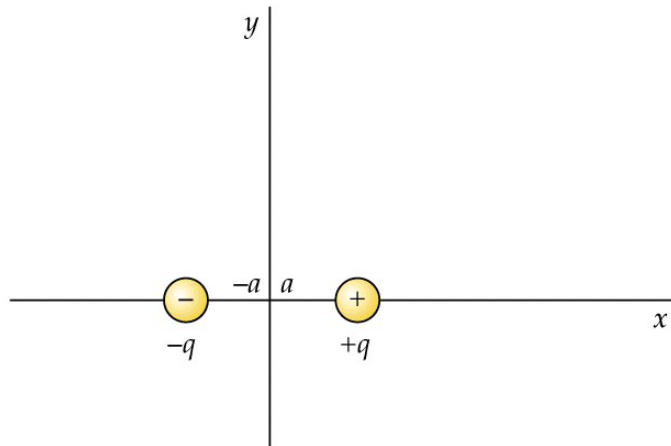


Figura 1.12

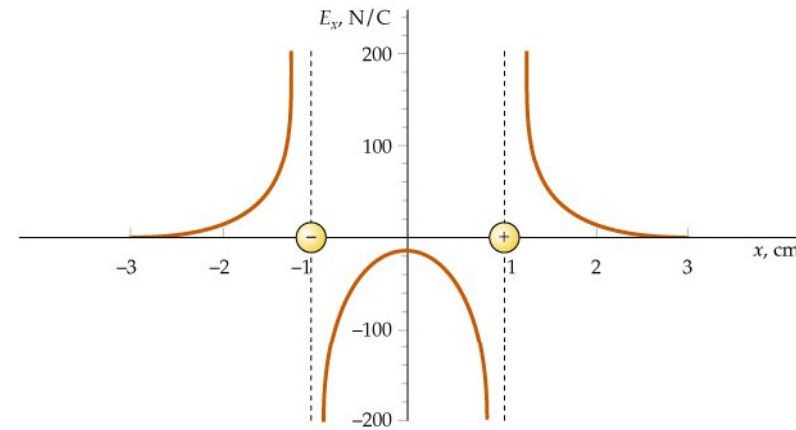


Figura 1.13: E_x en función de x para $q = 1 \text{ nC}$ y $a = 1 \text{ cm}$.

✚ **Dipolos eléctricos:** Un sistema de dos cargas iguales y opuestas q separadas por una pequeña distancia L se denomina **dipolo eléctrico**. Su intensidad y su orientación se describen mediante el **momento dipolar eléctrico $\vec{p}$** :

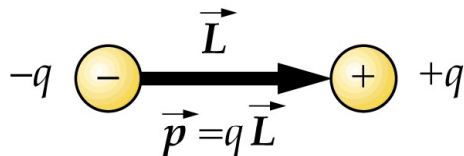


Figura 1.14: Dipolo eléctrico.

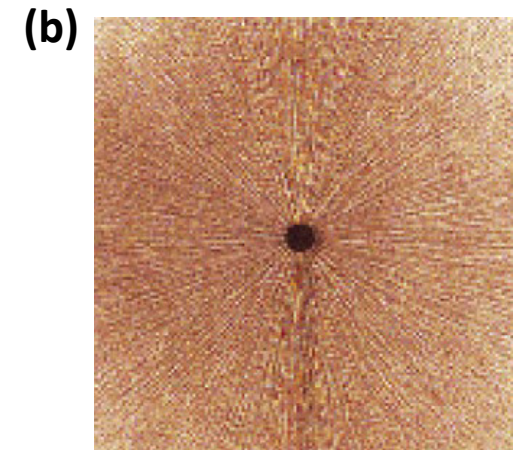
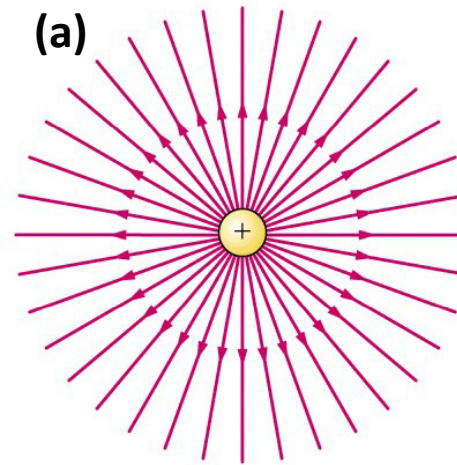
$$\vec{p} = q\vec{L}$$

Campo lejano ($|r| \gg L$): $E = \frac{2kp}{r^3}$

1.5 Líneas de campo eléctrico

El campo eléctrico puede representarse dibujando líneas que indiquen su dirección. En cualquier punto, el vector campo $\mathbf{E}$ es tangente a las **líneas de campo eléctrico**, que se llaman también **líneas de fuerza** porque muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva.

Figura 1.15: (a) Líneas de campo eléctrico de una sola carga puntual positiva. (b) las mismas líneas puestas de manifiesto por hebras de hilo suspendidos en aceite. El campo del objeto cargado en el centro induce cargas opuestas en los extremos de cada trocito de hilo, haciendo que se alineen paralelamente al campo.



Reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico:

1. Las líneas de campo comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas.
2. Las líneas se dibujan uniformemente espaciadas y saliendo o entrando en la carga.
3. El número de líneas que abandonan o entran en una carga es proporcional al módulo de la carga.
4. La densidad de líneas en un punto es proporcional al módulo del campo en dicho punto.
5. A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas están igualmente espaciadas y son radiales.
6. Dos líneas de campo no pueden cortarse nunca.

1.5 Líneas de campo eléctrico

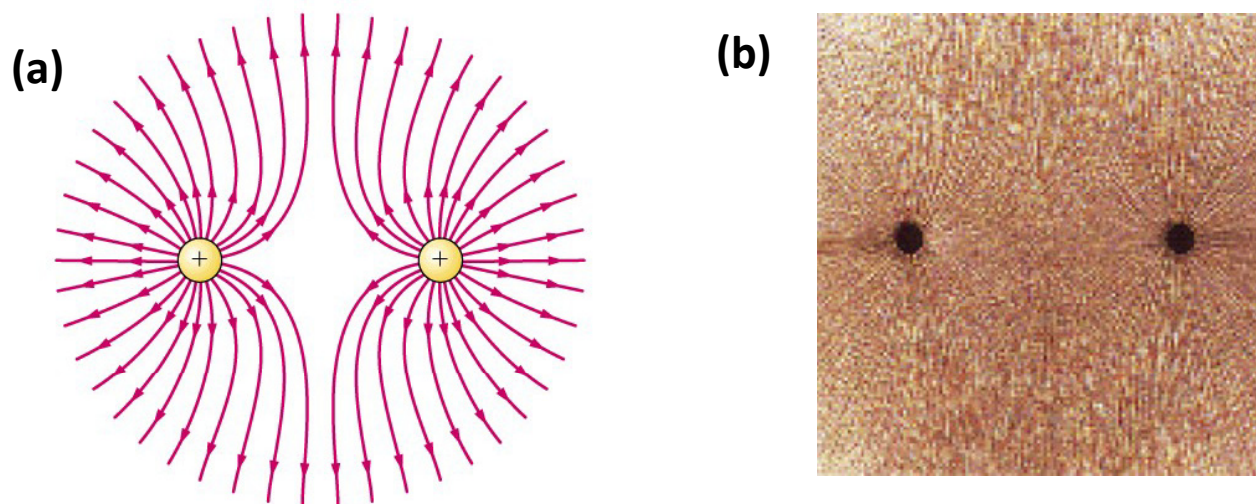


Figura 1.16: (a) Líneas de campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales positivas. (b) Las líneas de campo puestas de manifiesto con hebras de hilo suspendidas en aceite.

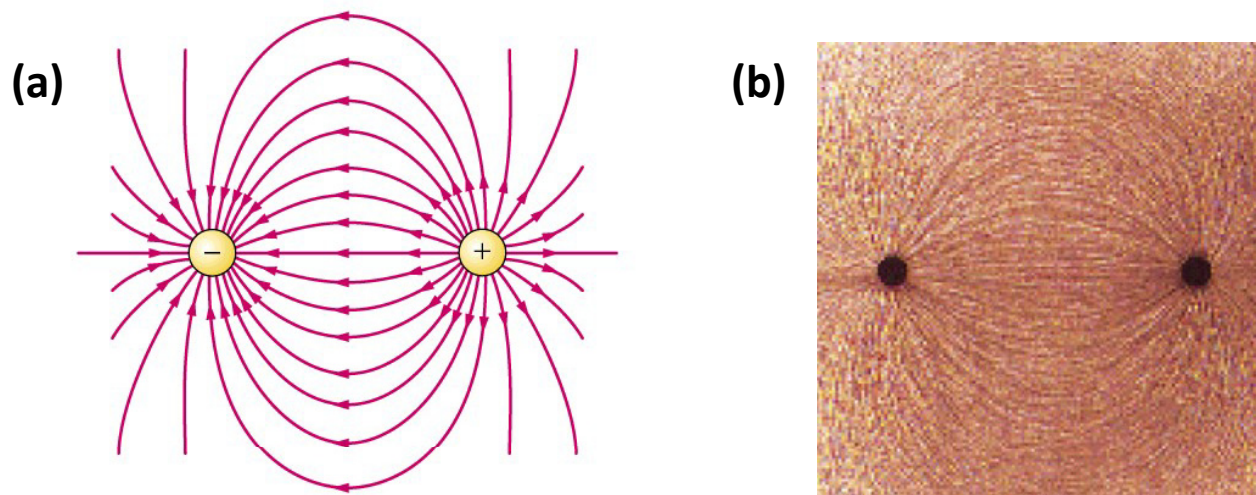
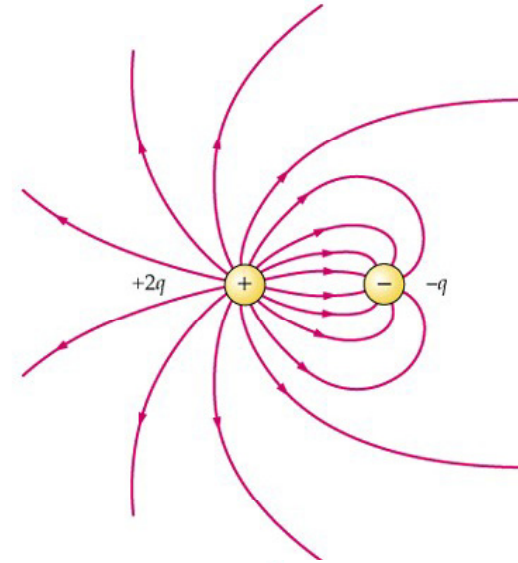


Figura 1.17: (a) Líneas de campo en un dipolo eléctrico. (b) Las mismas líneas de campo puestas de manifiesto con hebras de hilo suspendidas en aceite.

1.5 Líneas de campo eléctrico

Figura 1.18: (a) Líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual $+2q$ y a otra segunda carga puntual $-q$. A grandes distancias de las cargas las líneas son similares a las que se obtienen con una sola carga $+q$ situada en el centro del sistema de cargas.



Ejemplo 1.9: En la figura 1.19 se muestran las líneas de campo correspondientes a dos esferas conductoras. ¿Cuál es signo y el valor relativo de las cargas en las dos esferas?

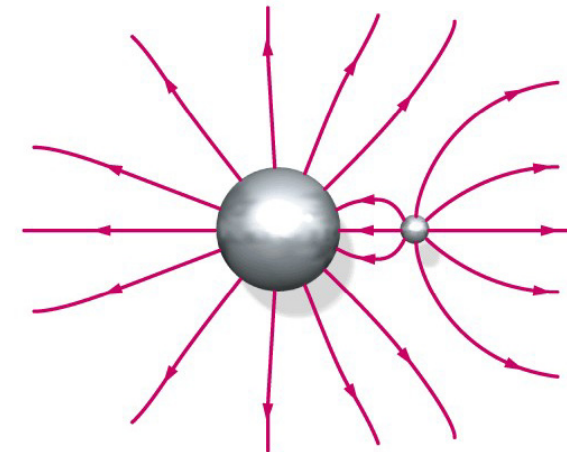


Figura 1.19

1.6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta la acción de una fuerza $q\vec{E}$. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

siendo m la masa de la partícula.

Ejemplo 1.10: Un electrón se proyecta en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (1000 \text{ N/C})\hat{i}$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (2 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$ en la dirección del campo (figura 1.20). ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de que momentáneamente quede en reposo?

Solución: 1.14 cm.

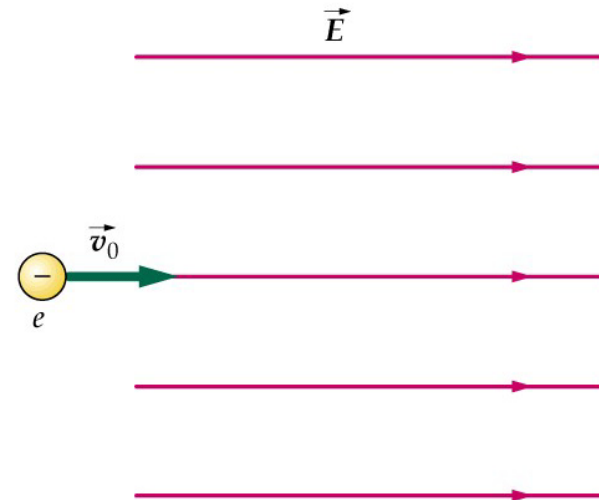
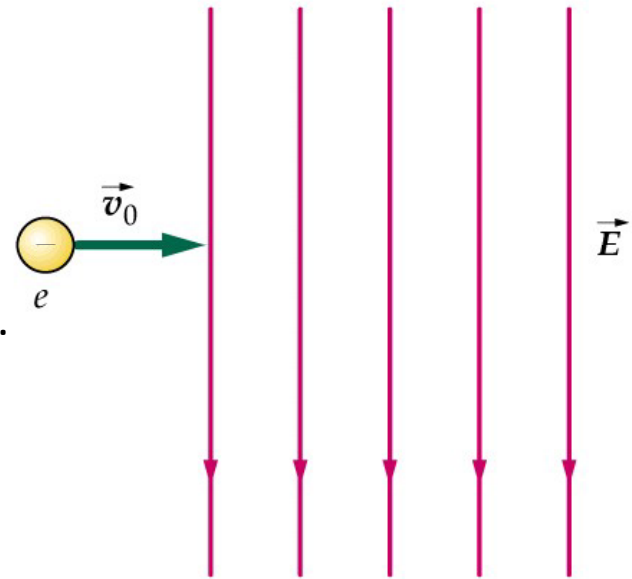


Figura 1.20

1.6 Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

Ejemplo 1.11: Un electrón se proyecta en el interior de un campo uniforme $\mathbf{E} = (-2000 \text{ N/C})\mathbf{j}$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (10^6 \text{ m/s})\mathbf{i}$ perpendicular al campo (figura 1.21). (a) Comparar la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él. (b) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido 1 cm en la dirección x.



Solución: (a) $F_e/F_g = 3.6 \times 10^{13}$; (b) 1.76 cm.

Figura 1.21

Observaciones: (a) Este ejemplo nos recuerda que la fuerza eléctrica es mucho más intensa que la gravitatoria. (b) La trayectoria de un electrón que se mueve en un campo eléctrico uniforme es una parábola, análogamente a la trayectoria de una masa que se mueve en un campo gravitatorio uniforme.

1.7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos

✚ Ciertas moléculas poseen momentos dipolares eléctricos permanentes debido a una distribución no uniforme de carga dentro de la molécula. Tales moléculas se llaman **moléculas polares**.

✚ Un campo eléctrico externo no ejerce una fuerza neta sobre un dipolo, pero aparece un par que tiende a alinear el dipolo con la dirección del campo (ver figura 1.23):

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\vec{p} = q\vec{L})$$

✚ Cuando el dipolo gira un ángulo $d\theta$, el campo eléctrico realiza un trabajo:

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin\theta d\theta$$

Igualándolo a la disminución de energía potencial se llega a resultado de que la energía potencial de un dipolo es:

$$U = -pE \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

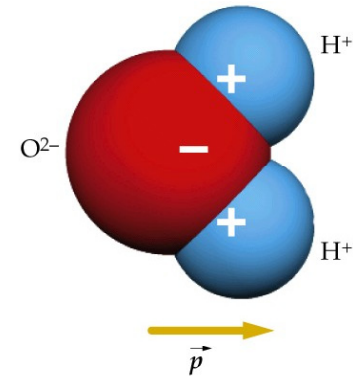


Figura 1.22: La molécula de agua posee un dipolo eléctrico permanente.

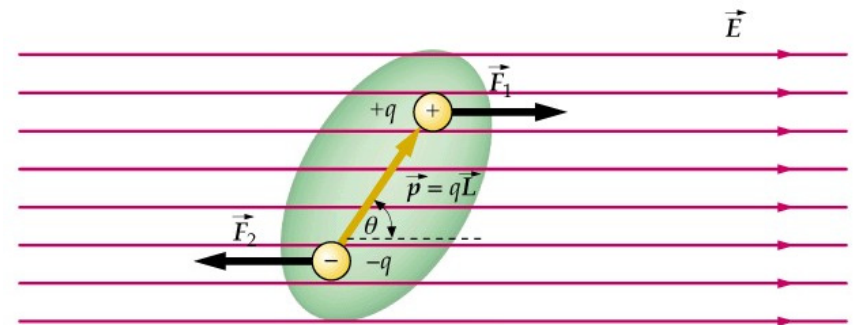


Figura 1.23: Un dipolo en un campo eléctrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar tiende a alinearse con el campo eléctrico.

1.7 Dipolos eléctricos en campos eléctricos

Las **moléculas no polares** no poseen momento dipolar permanente. En presencia de un campo eléctrico externo $\mathbf{E}$, las cargas positivas y negativas se separan espacialmente y se dice que las moléculas están **polarizadas**.

En un campo eléctrico no uniforme, un dipolo eléctrico experimenta una fuerza neta ya que el campo eléctrico tiene módulos distintos en los centros de carga positiva y negativa (ver figura 1.24).

Ejemplo 1.12: Un dipolo con un momento de módulo 0.02 e nm forma un ángulo de 20° con un campo eléctrico uniforme de módulo $3 \times 10^3 \text{ N/C}$ (figura 1.25). (a) Determinar el módulo del momento que actúa sobre el dipolo eléctrico y (b) la energía potencial del sistema.

Solución: (a) $3.28 \times 10^{-27} \text{ N m}$; (b) $-9.02 \times 10^{-27} \text{ J}$

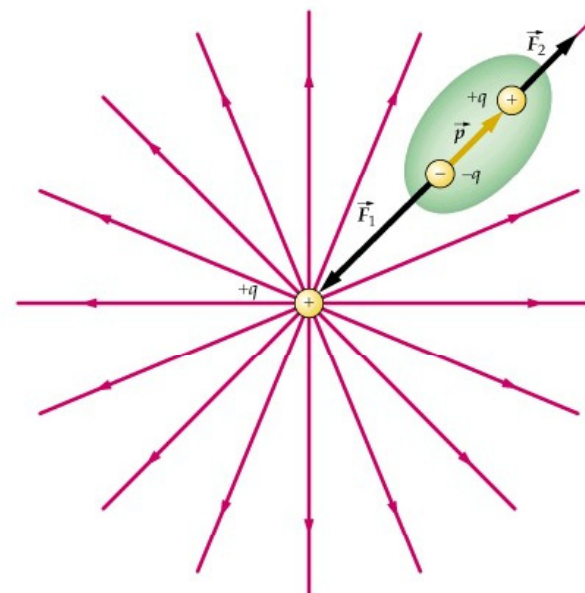


Figura 1.24: Molécula no polar en el campo eléctrico no uniforme de una carga puntual positiva.

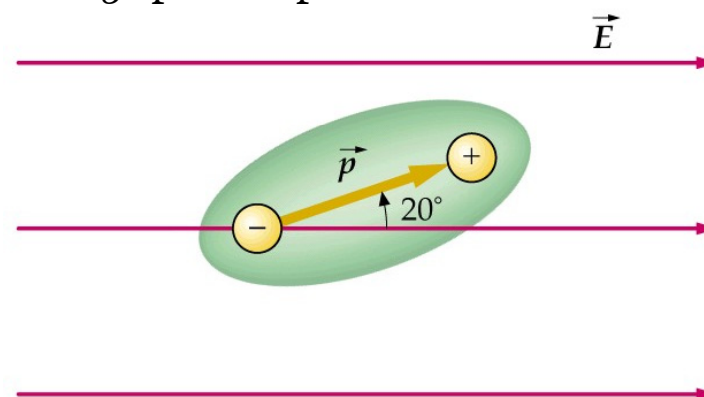


Figura 1.25

CAPÍTULO 2

**Campo eléctrico II:
distribuciones continuas de carga**

Índice del capítulo 2

- 2.1 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb.
- 2.2 La ley de Gauss.
- 2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss.
- 2.4 La discontinuidad de E_n .
- 2.5 Carga y campo en la superficie de los conductores.

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ La figura 2.1 muestra un elemento de carga $dq = \rho dV$ suficientemente pequeño como para que podamos considerarlo como una carga puntual. El campo eléctrico $d\vec{E}$ en un punto P debido a este elemento de carga viene dado por:

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \hat{r}$$

El campo total se determina integrando a toda la distribución de carga:

$$\vec{E} = \int_V \frac{k dq}{r^2} \hat{r}$$

donde $dq = \rho dV$.

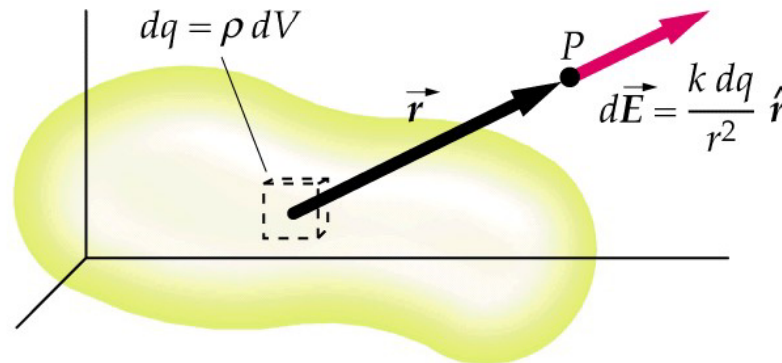


Figura 2.1: Un elemento de carga dq produce un campo $d\vec{E} = (k dq/r^2)\hat{r}$ en el punto P. El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ Campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal finita:

$$dE_x \hat{i} = \frac{k dq}{(x_p - x)^2} \hat{i} = \frac{k \lambda dx}{(x_p - x)^2} \hat{i}$$

$$E_x = \frac{kQ}{x_p(x_p - L)}; \quad x_p > L$$

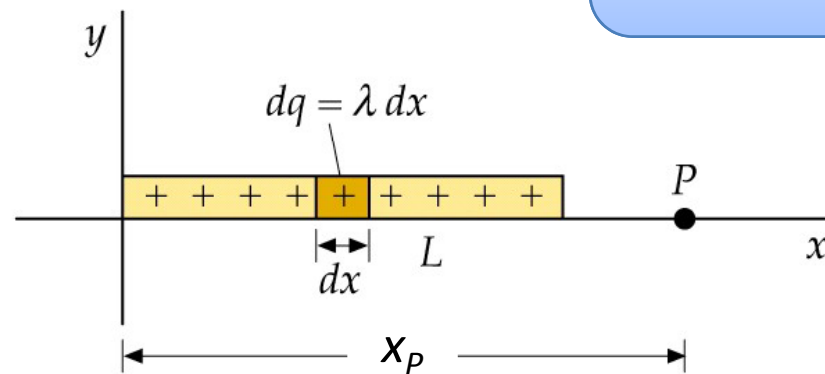


Figura 2.2: Geometría para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal uniforme de longitud L , carga Q y densidad de carga lineal $\lambda = Q/L$. Un elemento $dq = \lambda dx$ de la carga lineal puede considerarse como un carga puntual.

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ Campo eléctrico fuera del eje de una carga lineal finita:

$$dE_x = -\frac{k\lambda x dx}{r^3}; dE_y = -\frac{k\lambda y dx}{r^3}$$



$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}$$

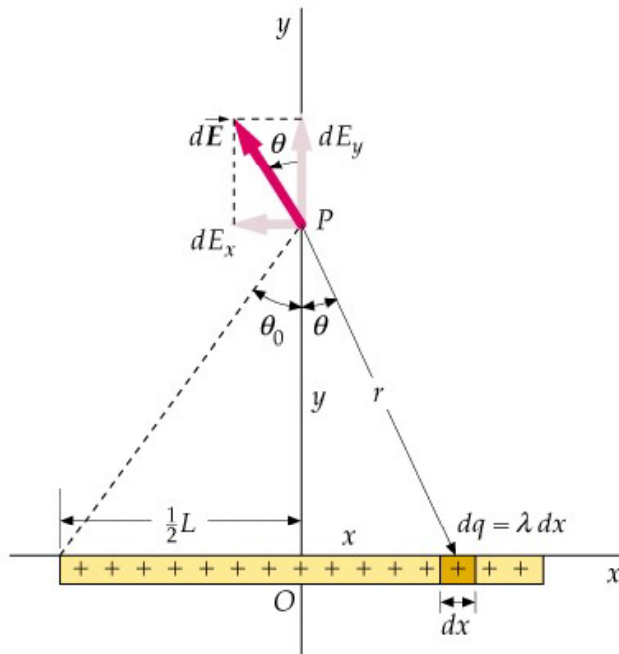


Figura 2.3: Geometría para el cálculo del campo eléctrico en un punto P creado por un segmento con densidad de carga uniforme $\lambda = Q/L$.

✚ Carga lineal infinita:

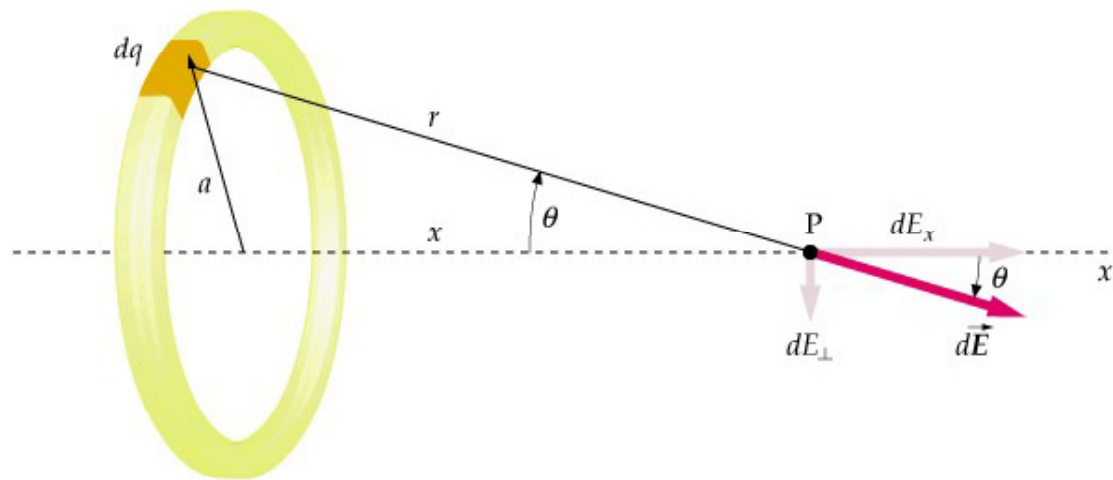
$$E_R = \frac{2k\lambda}{R}$$

donde R es la distancia desde el punto de observación del campo a la línea de carga, medida sobre la perpendicular.

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ Campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado:

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k dq}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{k x dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$



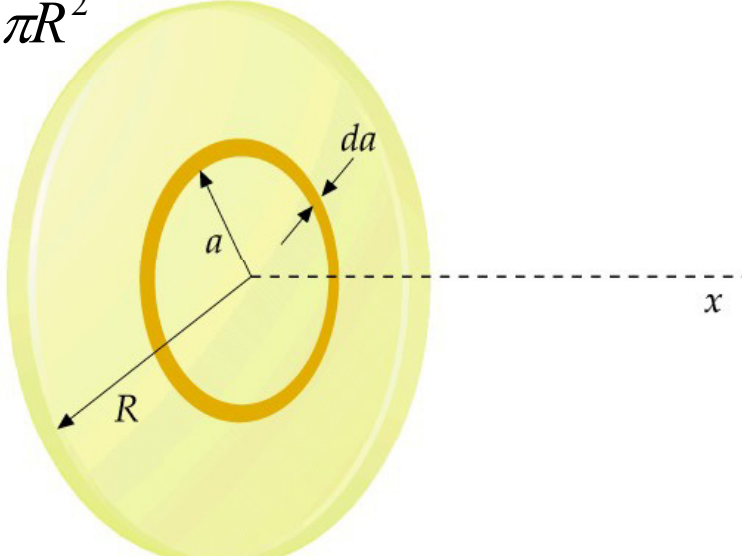
$$E_x = \frac{k Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Figura 2.4: Anillo cargado de radio a . El campo eléctrico en el punto P del eje x debido al elemento de carga dq posee una componente a lo largo del eje x y otra perpendicular a ese mismo eje. Esta última componente se anula al sumar la contribución de todos los elementos de carga a lo largo del anillo.

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ Campo eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado:

Densidad de carga superficial

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$dE_x = \frac{kx2\pi\sigma a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Red arrow indicating integration from the differential field to the total field.

$$E_x = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \frac{x}{|x|}$$

Figura 2.5: Un disco uniformemente cargado puede considerarse como una serie de cargas anulares de radio a .

2.1 Cálculo del campo mediante la ley de Coulomb

✚ Campo eléctrico en las proximidades de un plano infinito de carga:

El campo de un plano infinito de carga puede obtenerse a partir del resultado obtenido para el anillo haciendo el cociente R/x tender a infinito.

$$E_x = \begin{cases} 2\pi k\sigma, & x > 0 \\ -2\pi k\sigma, & x < 0 \end{cases}$$

Nótese que si nos desplazamos a lo largo del eje x , el campo eléctrico presenta una discontinuidad al atravesar el plano infinito de carga (ver figura 2.6). Esta discontinuidad tiene un valor de:

$$4\pi k\sigma$$

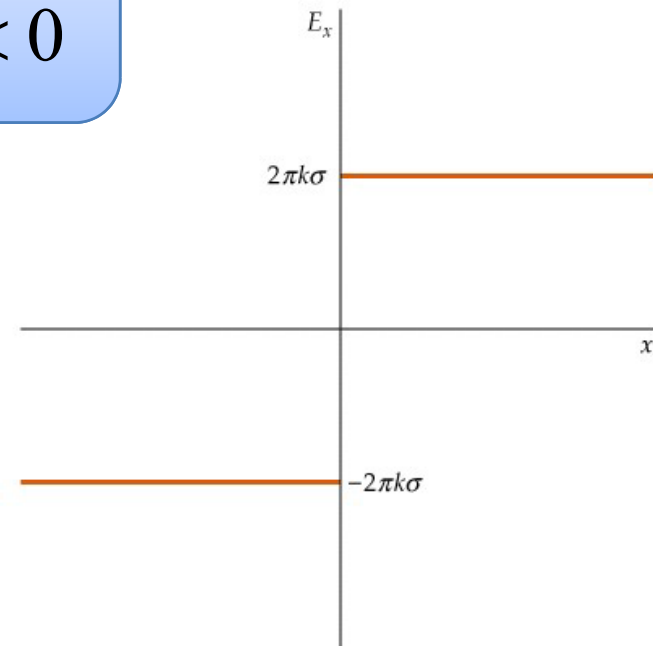


Figura 2.6: Gráfico que muestra la discontinuidad del campo eléctrico en un plano de carga.

2.2 La ley de Gauss

El número neto de líneas de campo eléctrico que sale por cualquier superficie que encierra cargas eléctricas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es el enunciado cualitativo de [la ley de Gauss](#).

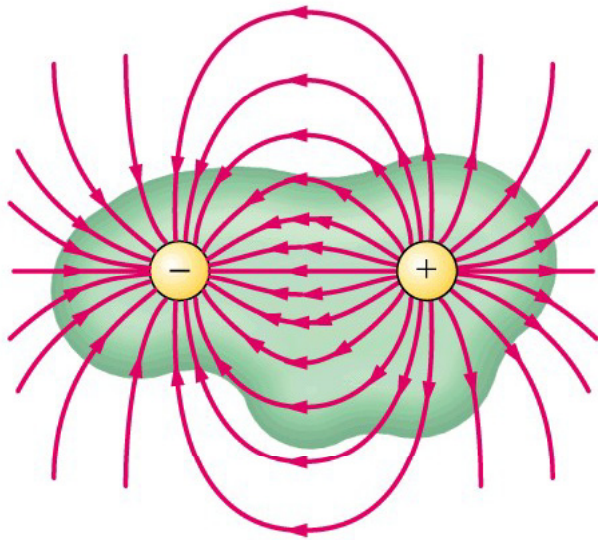


Figura 2.7: Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas.

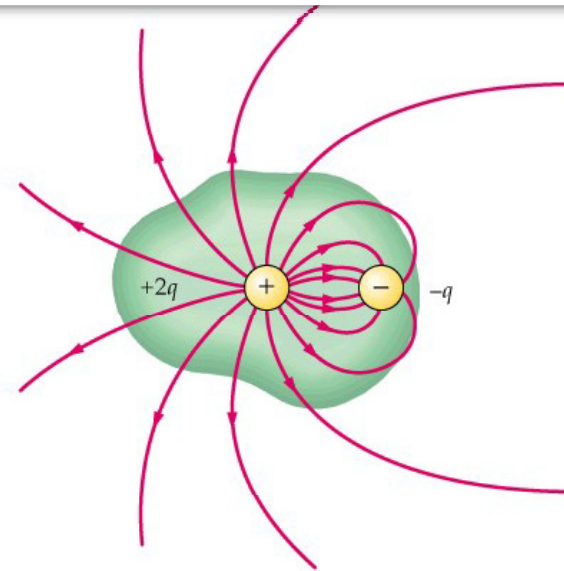


Figura 2.8: Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas $+2q$ y $-q$. Las líneas de campo que terminan en $-q$ o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar. El número neto de líneas que salen y no vuelven a entrar es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

2.2 La ley de Gauss

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo que atraviesan una superficie se llama **flujo eléctrico**, ϕ . Para una superficie perpendicular al campo $\mathbf{E}$ (figura 2.9) se define como:

$$\phi = EA$$

Para una superficie como la de la figura 2.10:

$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA \cos \theta = E_n A$$

En el caso de una superficie de forma arbitraria (ver figura 2.11):

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S E_n dA$$

Para una superficie cerrada:

$$\phi_{neto} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA$$

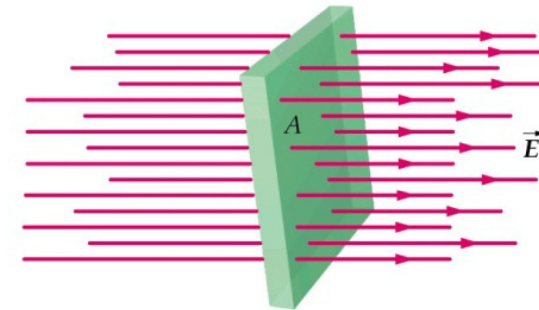


Figura 2.9

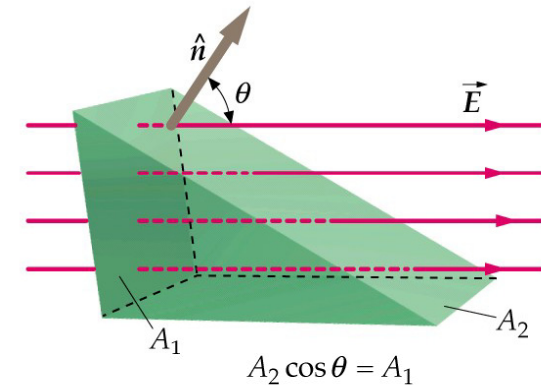


Figura 2.10

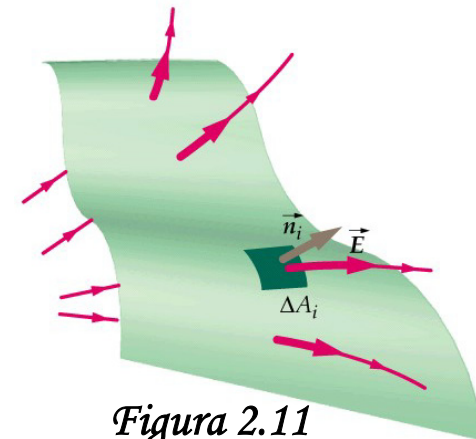


Figura 2.11

2.2 La ley de Gauss

■ Enunciado cuantitativo de la ley de Gauss:

El flujo eléctrico neto del campo creado por una carga puntual a través de una superficie esférica es (figura 2.12):

$$\phi_{neto} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier distribución de carga y para cualquier tipo de superficie:

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie:

$$\phi_{neto} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{int} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Permitividad del vacío:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

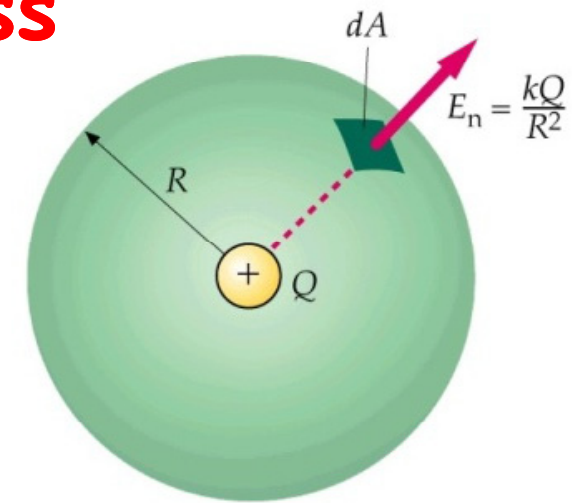


Figura 2.12: Flujo eléctrico de una carga puntual a través de una superficie esférica.

[La ley de Gauss]

2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

✚ **Simetría plana:** Consideremos un plano infinito cargado con una densidad superficial de carga σ constante (ver figura 2.13). Aplicamos la ley de Gauss:

$$Q_{\text{int}} = \varepsilon_0 \phi_{\text{neto}} \Rightarrow \sigma A = \varepsilon_0 2E_n A$$

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi k\sigma$$

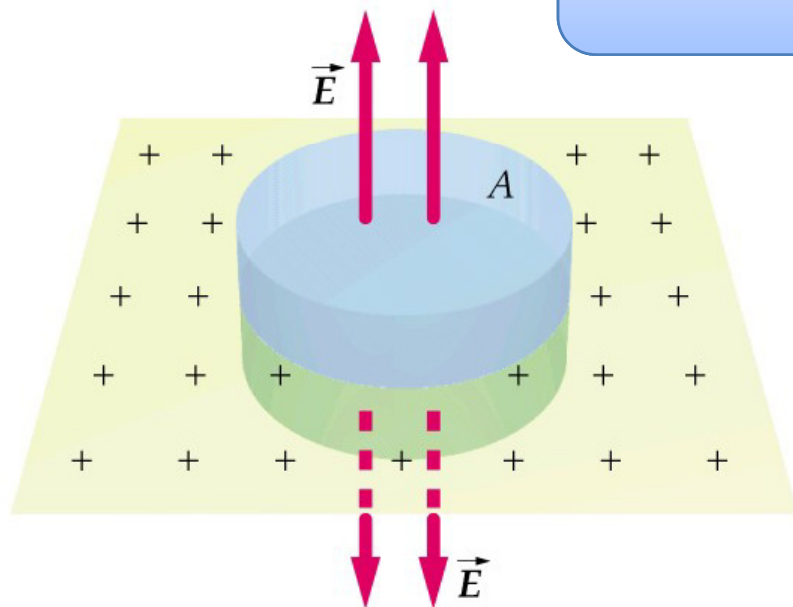


Figura 2.13: Superficie gaussiana par el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a un plano infinito de carga. $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y de valor constante. En la parte curvada de la superficie el campo eléctrico es paralelo a ésta.

2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

✚ **Simetría esférica:** Para calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga con simetría esférica (que sólo depende del módulo del vector de posición), utilizamos una superficie gaussiana esférica. Ilustremos la idea con una carga puntual situada en el origen de coordenadas.

$$\phi_{neto} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

De este modo, vemos que la ley de Coulomb se puede deducir de la ley Gauss.

2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

✚ Campo eléctrico debido a una corteza esférica de carga:

Consideremos una corteza esférica uniformemente cargada de radio R y carga total Q . Para determinar el campo eléctrico aplicamos la ley de Gauss y escogemos como superficie gaussiana una esfera de radio r , que puede ser mayor o menor que el radio de la corteza

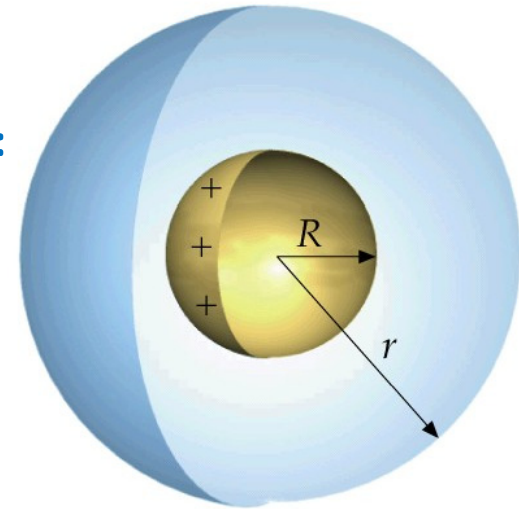
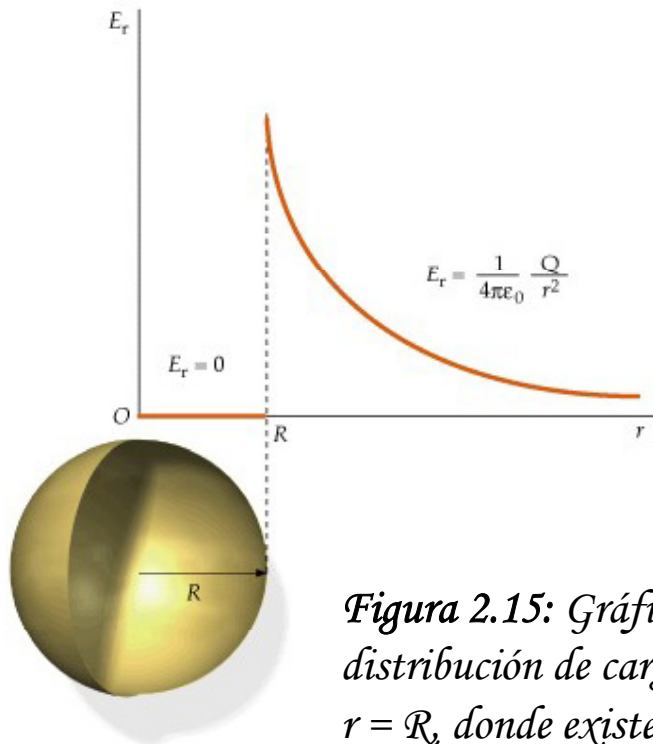


Figura 2 14: Superficie gaussiana esférica de radio $r > R$ para el cálculo del campo exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R .



$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

Figura 2.15: Gráfica de la componente radial del campo en función de r para un distribución de carga de una corteza esférica. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde existe una carga superficial σ .

2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

Ejemplo 2.1: Determinar el campo eléctrico (a) fuera y (b) dentro de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R portadora de una carga Q que está distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho = Q/V$, siendo V el volumen de la esfera. En particular, usar la ley de gauss (ver figura 2.16) y demostrar que el resultado se puede escribir como se muestra en la figura 2.17.

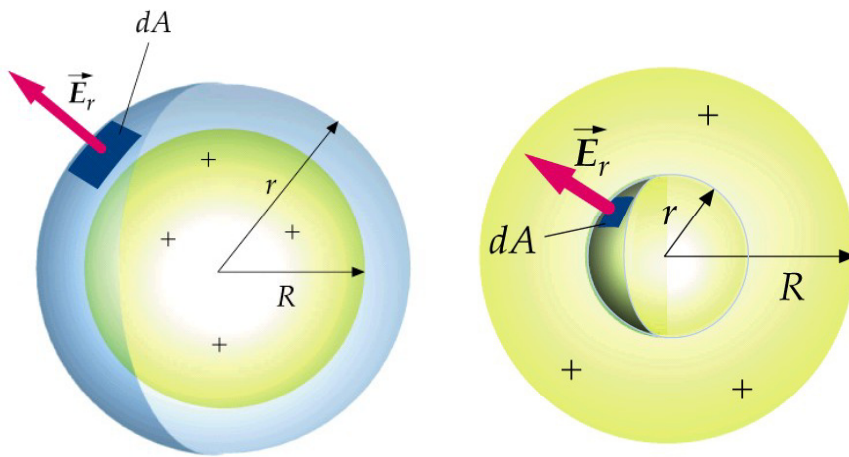


Figura 2.16: Superficies gaussianas para el ejemplo 2.1.

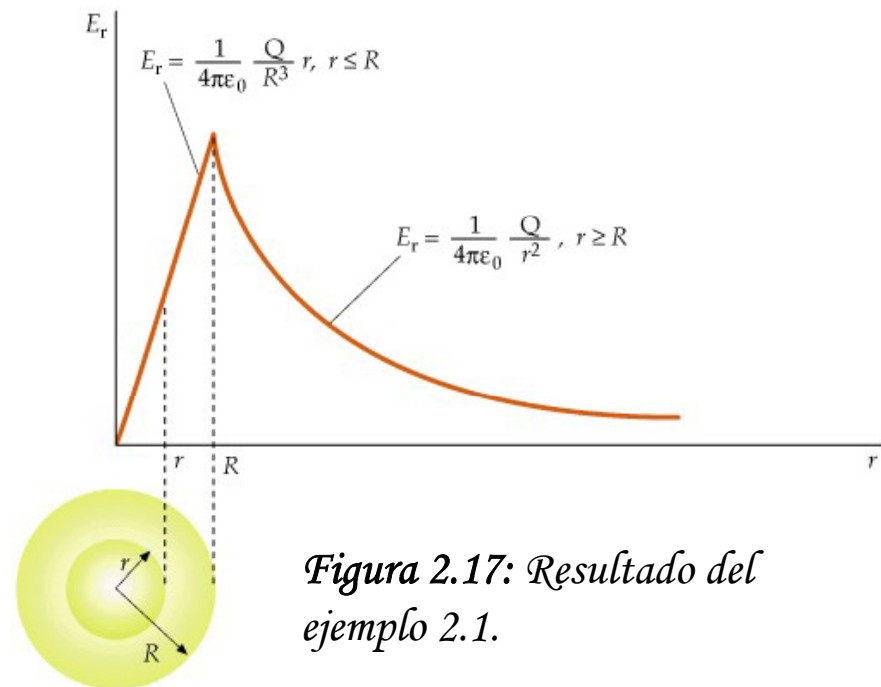


Figura 2.17: Resultado del ejemplo 2.1.

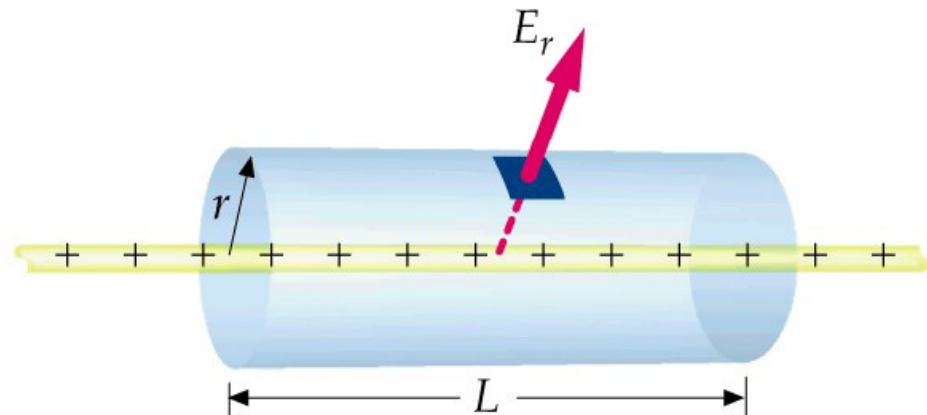
2.3 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

✚ **Simetría cilíndrica:** Una distribución de carga tiene simetría cilíndrica si desde todos los puntos de otra superficie cilíndrica cualquiera de longitud infinita y coaxial a la distribución se observa el mismo sistema electrostático.

Ejemplo 2.2: Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme λ .

Solución:
$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Figura 2.18: Superficie gaussiana cilíndrica para el cálculo del campo eléctrico de una carga lineal infinitamente larga.



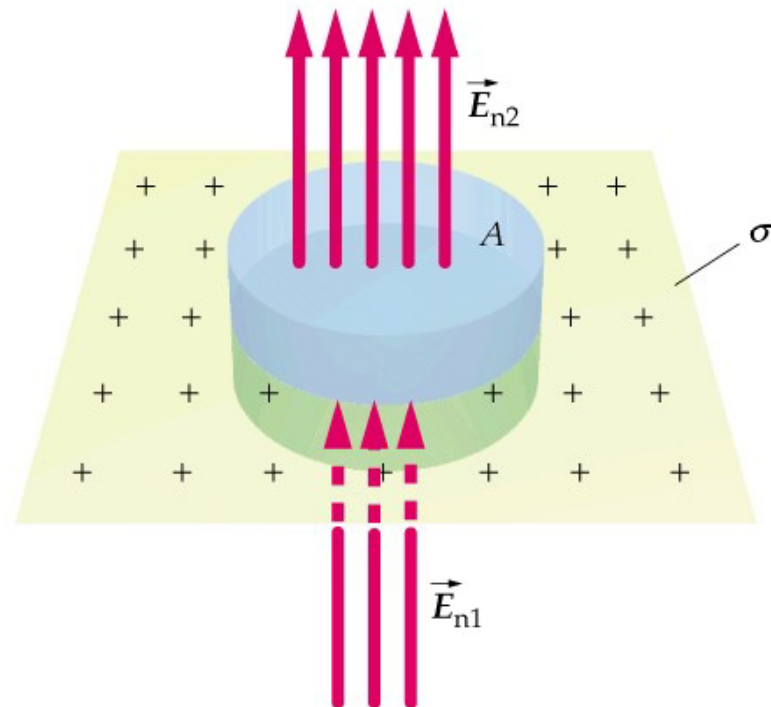
2.4 Discontinuidad del campo eléctrico

Siempre que exista una distribución superficial de carga, la componente normal a dicha superficie del campo eléctrico presenta una discontinuidad que viene determinada por la densidad de carga superficial. De hecho, esto ya no ha aparecido en los ejemplos de la corteza esférica y del plano de carga.

Este hecho se puede demostrar aplicando la ley de Gauss, como se muestra en la figura 2.19. Haciéndolo se llega a la conclusión de que

$$\Delta E_n = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Figura 2.19: Aplicación de la ley de Gauss para determinar la discontinuidad de la componente normal del campo eléctrico a través de una distribución de carga superficial.

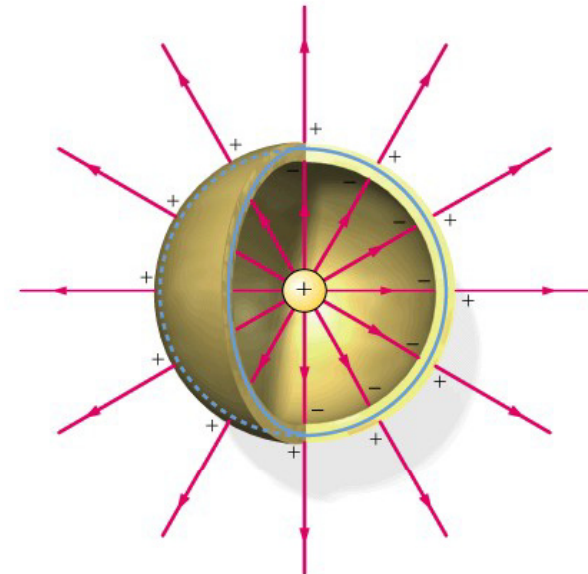


2.5 Carga y campo en la superficie de los conductores

- ✚ En una situación de equilibrio el campo eléctrico dentro de un conductor es cero.
- ✚ Si un conductor está cargado, la carga ha de residir en la superficie.
- ✚ El campo eléctrico justo en el exterior de un conductor es perpendicular a su superficie y viene dado por:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Figura 2.21: Una carga puntual q se encuentra en el centro de una corteza conductora eléctrica esférica de paredes gruesas. Como la carga neta encerrada dentro de la superficie gaussiana (indicada en azul) debe ser nula, existirá una carga superficial $-q$ inducida en la superficie interna de la corteza, y como el conductor es neutro, una carga igual, pero de signo opuesto, $+q$ se induce en la superficie exterior. Las líneas de campo comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.



CAPÍTULO 3

El potencial eléctrico

Índice del capítulo 3

- 3.1 Diferencia de potencial eléctrico.
- 3.2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales.
- 3.3 Determinación del potencial eléctrico a partir del potencial.
- 3.4 Cálculo del potencial para distribuciones continuas de carga.
- 3.5 Superficies equipotenciales.

3.1 Diferencia de potencial

✚ La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina **diferencia de potencial**:

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para un desplazamiento finito desde el punto a hasta el punto b , el cambio del potencial es:

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando esta se desplaza desde el punto a hasta el punto b . La función V se denomina **potencial eléctrico** o simplemente **potencial**.

✚ El potencia V es **continuo** en los puntos en los que el campo sea finito.

✚ **Unidades:**

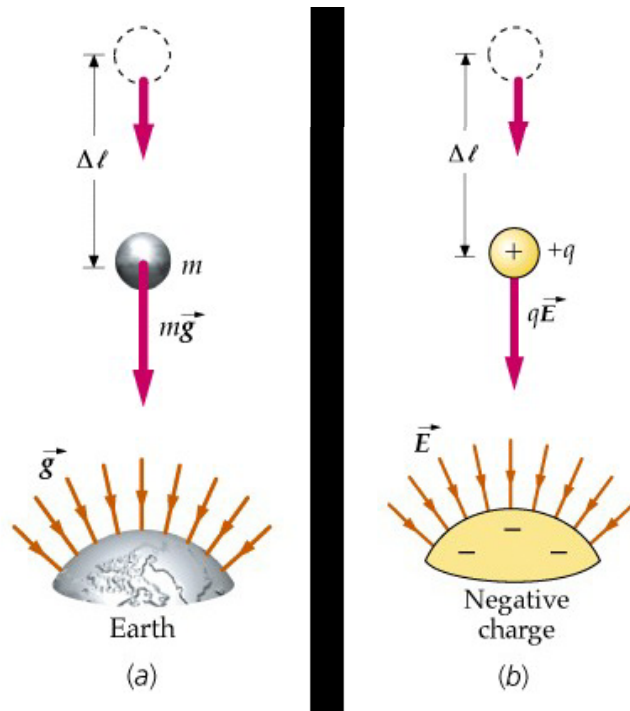
$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C (voltio)}$$

El campo eléctrico se mide a menudo en V/m.

$$\text{Electrónvoltio: } 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ CV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

3.1 Diferencia de potencial

✚ **Potencial y líneas de campo:** Si situamos una carga testigo q_0 en un campo eléctrico $\vec{E}$ y la dejamos en libertad, se acelerará en la dirección del campo a lo largo de la línea de campo. La energía cinética se incrementará y su energía potencial disminuirá. Así pues, la carga se mueve hacia una región de menor potencial (ver figuras 3.1 y 3.2).



Las líneas de campo eléctrico señalan en la dirección en la que el potencial eléctrico disminuye más rápidamente.

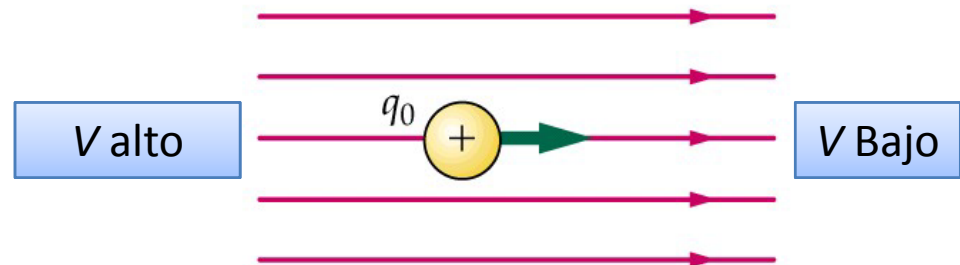


Figura 3.1: (a) El trabajo realizado por el campo gravitatorio $\vec{g}$ sobre una masa disminuye la energía potencial gravitatoria. (b) El trabajo realizado por el campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga positiva $+q$ es igual a la pérdida de energía potencial electrostática.

Figura 3.2: Las líneas de campo eléctrico apuntan en la dirección en la que el potencial decrece rápidamente. Cuando una carga testigo positiva se sitúa en un campo eléctrico, ésta se acelera en la dirección del campo.

3.2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

El potencial eléctrico creado por una carga puntual en un punto del espacio situado a una distancia r de dicha carga se calcula usando su definición:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{kq}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = -\frac{kq}{r^2} dr$$

$$V = \int_{ref}^P dV = -\int_{r_{ref}}^r \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

$V = 0$ para $r_{ref} = \text{infinito}$:

$$V = \frac{kq}{r}$$

[Potencial de Coulomb]

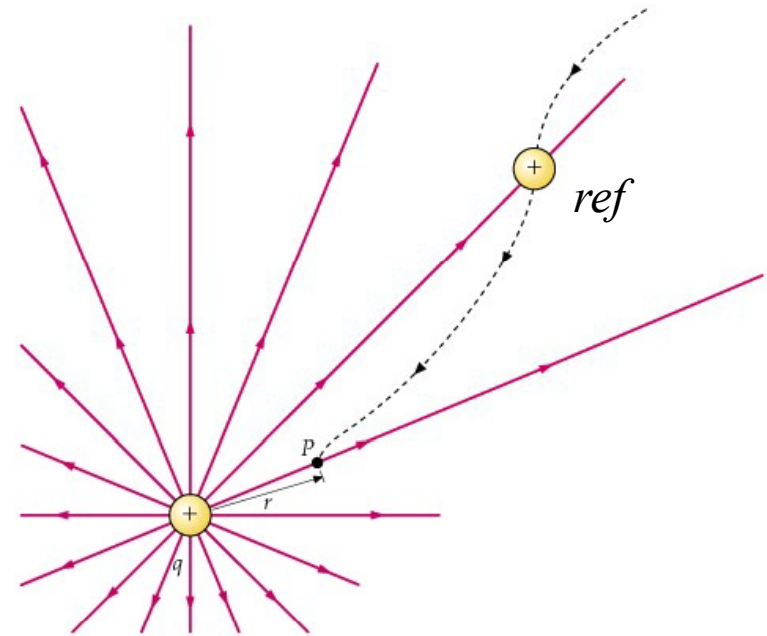


Figura 3.3: Cálculo del potencial eléctrico creado por una carga puntual en un punto del espacio situado a una distancia r de dicha carga.

3.2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

La energía potencial U de una carga testigo q_0 situada a una distancia r de una carga puntual q :

$$U = q_0 V = \frac{kq_0 q}{r}$$

Ejemplo 3.1: Energía potencial del átomo de hidrógeno. (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia $r = 0.529 \times 10^{-10}$ m de un protón? (b) ¿Cuál es la energía potencial del electrón y el protón a esta separación?

Solución: (a) 27.2 V; (b) -27.2 eV.

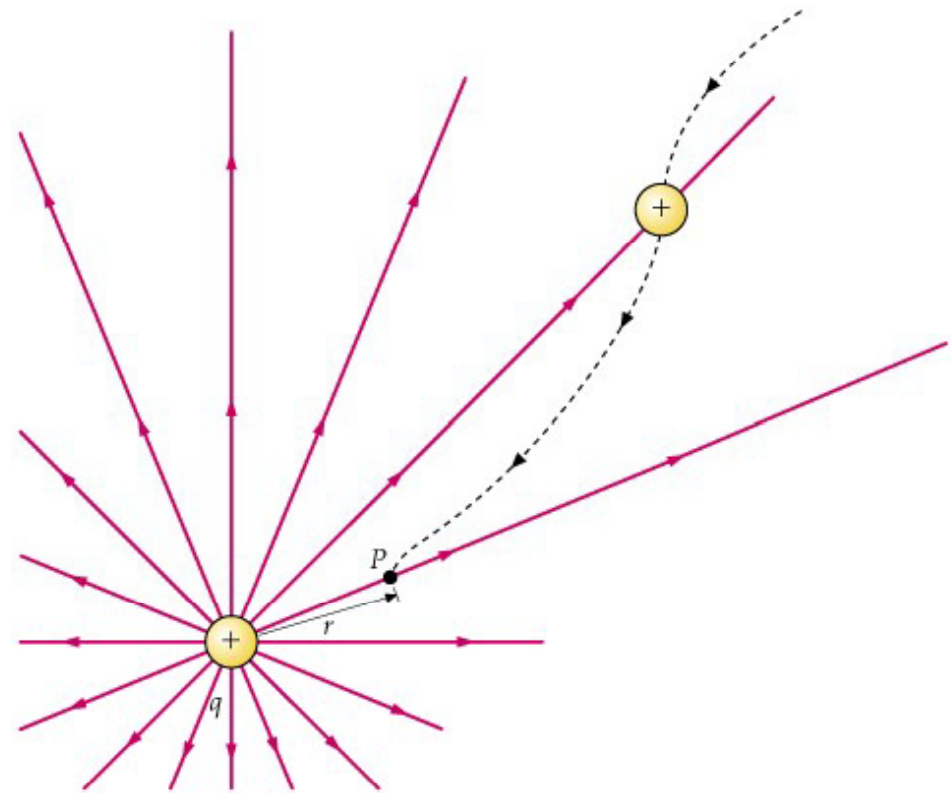


Figura 3.4: El trabajo necesario para llevar una carga testigo q_0 desde el infinito hasta el punto P situado a una distancia r de una carga q es $kq_0 q/r$.

3.2 Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

✚ Potencial debido a un conjunto discreto de cargas:

$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$$

Ejemplo 3.2: Una carga puntual q_1 está situada en el origen y una segunda carga puntual q_2 está situada sobre el eje x en $x = a$, como muestra la figura 3.5. Determinar el potencial en cualquier punto del eje x .

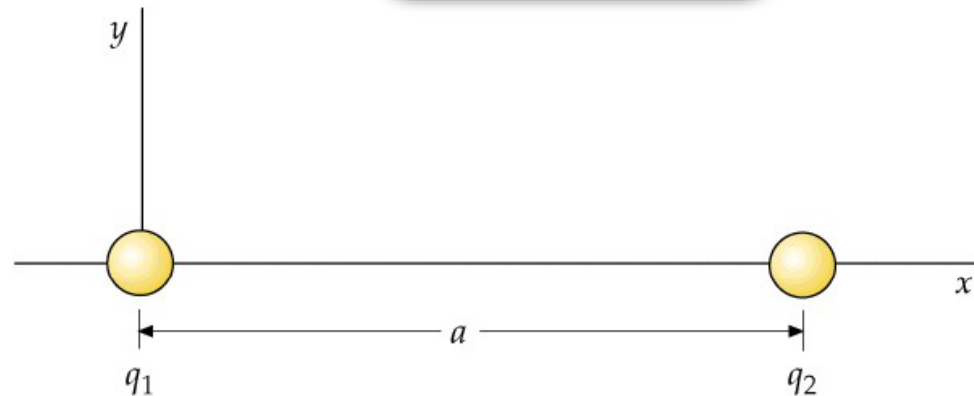


Figura 3.5

Ejemplo 3.3: Determinar el potencial creado por el dipolo eléctrico de la figura 3.6 en el eje x . Determinar su valor a grandes distancias ($|x| \gg a$) en función del momento dipolar $p = 2qa$.

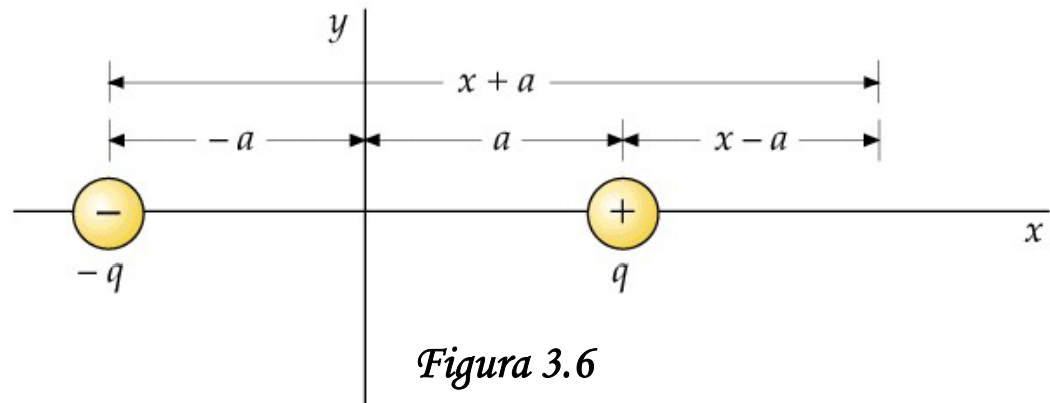


Figura 3.6

3.3 Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

El campo eléctrico se puede determinar a partir del conocimiento del potencial eléctrico. En concreto, el campo eléctrico viene dado por menos el gradiente del potencial eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

El **gradiente** de una función escalar es un vector que apunta en la dirección de la máxima variación de la función. El campo eléctrico es opuesto al gradiente del potencial. Por tanto, las líneas de campo señalan en la dirección de máxima disminución de la función potencial.

Ejemplo 3.4: Determinar el campo eléctrico partiendo de la función potencial eléctrico V dad por $V = 100 \text{ V} - (25 \text{ V/m}) x$.

Solución: $+(25 \text{ V/m}) \hat{i}$.

3.4 Cálculo de V : distribuciones continuas

El potencial debido a una distribución continua de carga se calcula como:

$$V = \int_V \frac{k dq}{r}$$

En esta expresión hemos supuesto que $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas.

✚ **Potencial en el eje de un anillo cargado:**

$$V = \int_0^Q \frac{k dq}{r} = \frac{k}{r} \int_0^Q dq = \frac{kQ}{r}$$

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

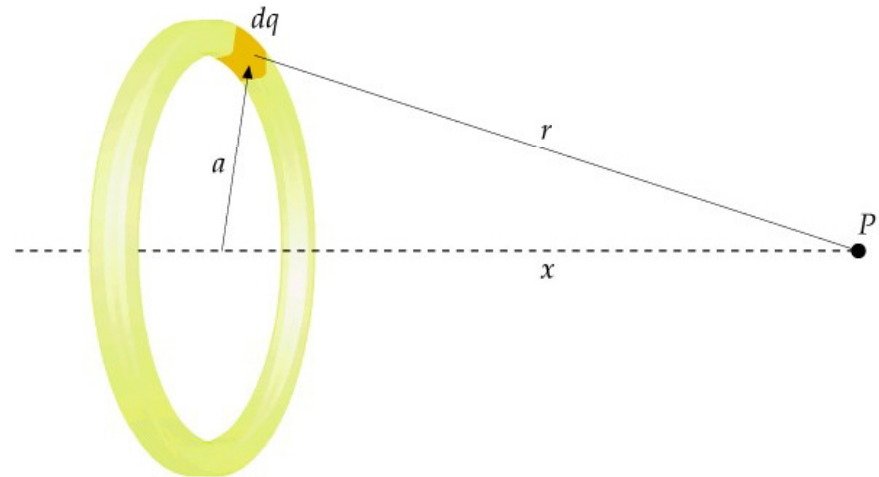


Figura 3.7: Geometría para el cálculo del potencial eléctrico en un punto situado en el eje de un anillo de radio a uniformemente cargado.

3.4 Cálculo de V : distribuciones continuas

✚ Potencial en el eje de un disco uniformemente cargado:

$$dV = \frac{k dq}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{k \sigma 2\pi a da}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

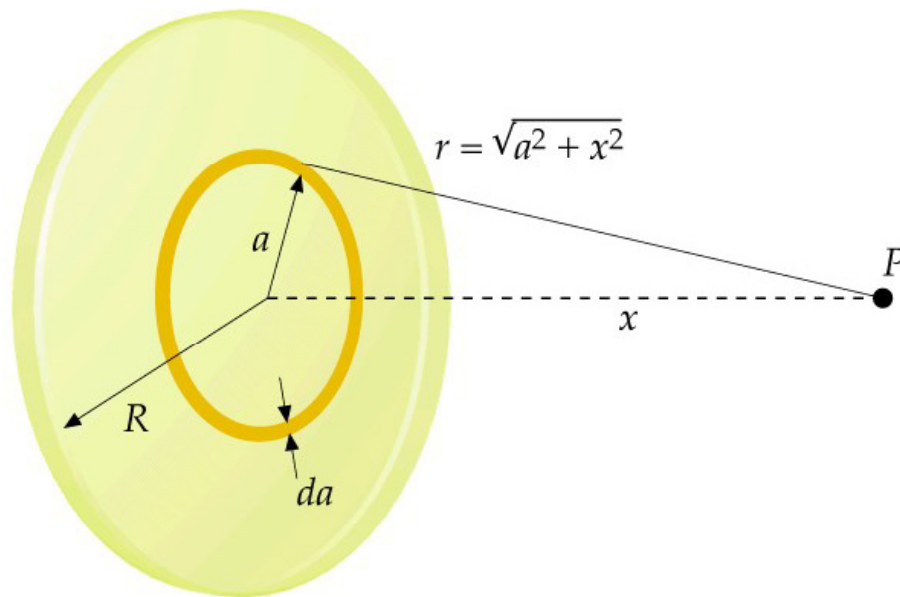


Figura 3.8: Geometría para el cálculo del potencial eléctrico en un punto situado en el eje de un disco de radio R uniformemente cargado.

$$V = 2\pi k \sigma |x| \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right)$$

Ejemplo 3.5: Determinar el campo eléctrico a partir de la expresión para el potencial y demostrar que se obtiene la expresión que se obtuvo en la sección 2.1.

3.4 Cálculo de V : distribuciones continuas

✚ Potencial debido a un plano infinito de carga:

En este caso el campo eléctrico viene dado por ($x > 0$):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} = 2\pi k \sigma \hat{i}$$

El potencial es, por lo tanto,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(2\pi k \sigma \hat{i}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k})$$
$$= -2\pi k \sigma dx$$

Integrando:

$$V = V_0 - 2\pi k \sigma |x|$$

Ejemplo 3.6: Un plano infinito de densidad de carga σ uniforme se encuentra en el plano $x = 0$ y una carga puntual q está colocada sobre el eje x en $x = a$ (figura 3.10). Determinar el potencial en un punto P situado a una distancia r de la carga puntual.

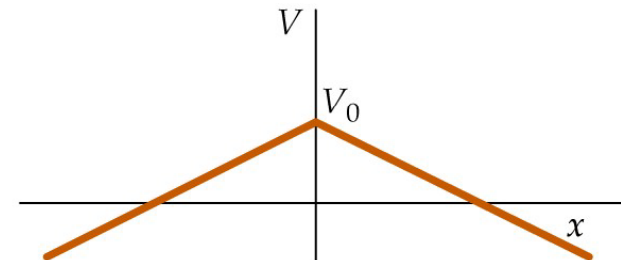


Figura 3.9

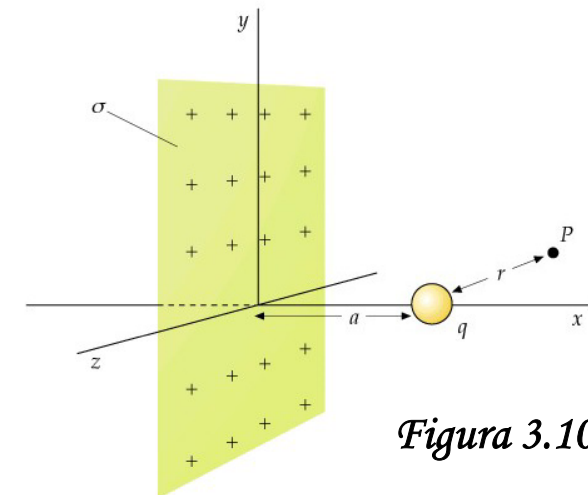


Figura 3.10

3.4 Cálculo de V : distribuciones continuas

✚ Potencial debido a una corteza esférica de carga:

En este caso el campo eléctrico viene dado por: $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$

El cambio del potencial es $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{kQ}{r} \hat{r} \cdot d\vec{l}$

Integrando:

$$V = \begin{cases} \frac{kQ}{r} & \text{si } r \geq R \\ \frac{kQ}{R} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

Ejemplo 3.7: En un modelo se considera que un protón es una esfera de carga de densidad volúmica uniforme, de radio R y carga total Q . Determinar el potencial eléctrico generado dentro y fuera de la esfera.

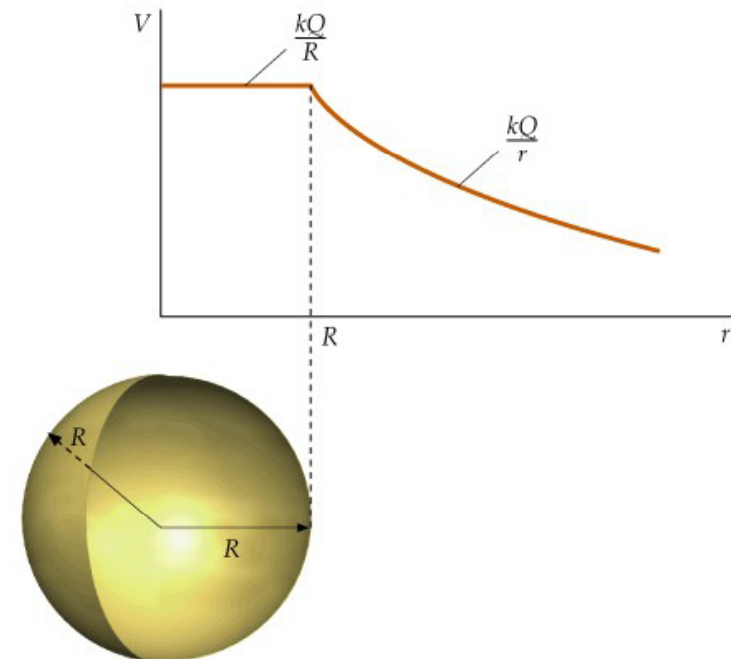


Figura 3.10: Potencial eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada de radio R en función de la distancia r al centro de la corteza.

3.4 Cálculo de V : distribuciones continuas

✚ Potencial debido a una carga lineal infinita:

En este caso el campo eléctrico viene dado por: $\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R} \hat{R}$

El cambio del potencial es $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{2k\lambda}{R} \hat{R} \cdot d\vec{l}$

Integrando: $V_P - V_{ref} = -\int_{R_{ref}}^{R_P} E_R dR = -2k\lambda \int_{R_{ref}}^{R_P} \frac{dR}{R} = -2k\lambda \ln \frac{R_P}{R_{ref}}$

Escogiendo $V_{ref} = 0$ para $R_{ref} = 0$:

$$V = -2k\lambda \ln \frac{R_{ref}}{R}$$

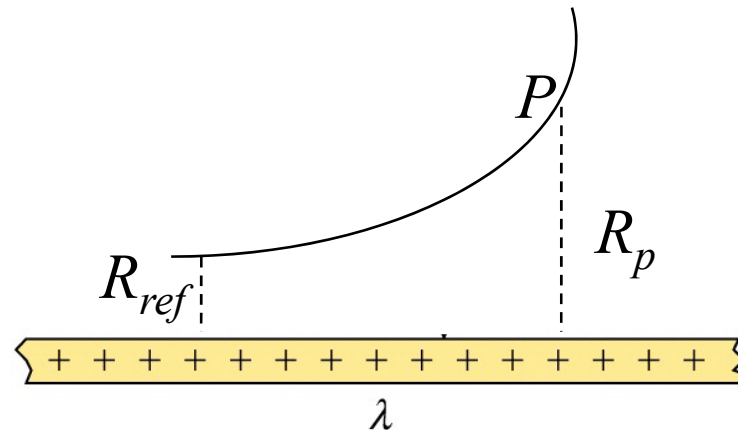


Figura 3.11

3.5 Superficies equipotenciales

✚ Puesto que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es cero, el potencial es constante en todo el conductor, es decir, éste ocupa un volumen equipotencial y su superficie es una **superficie equipotencial**.

✚ Las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales en todo punto.

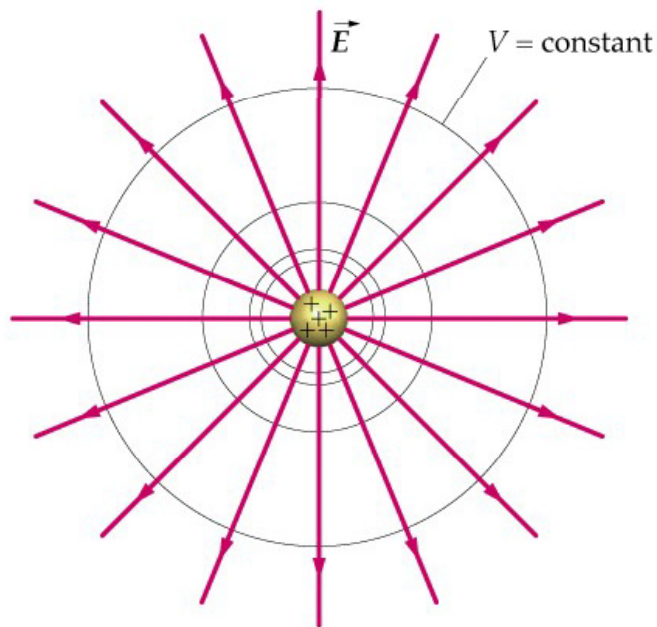


Figura 3.12: Superficies equipotenciales y líneas de campo exteriores a un conductor esférico uniformemente cargado.

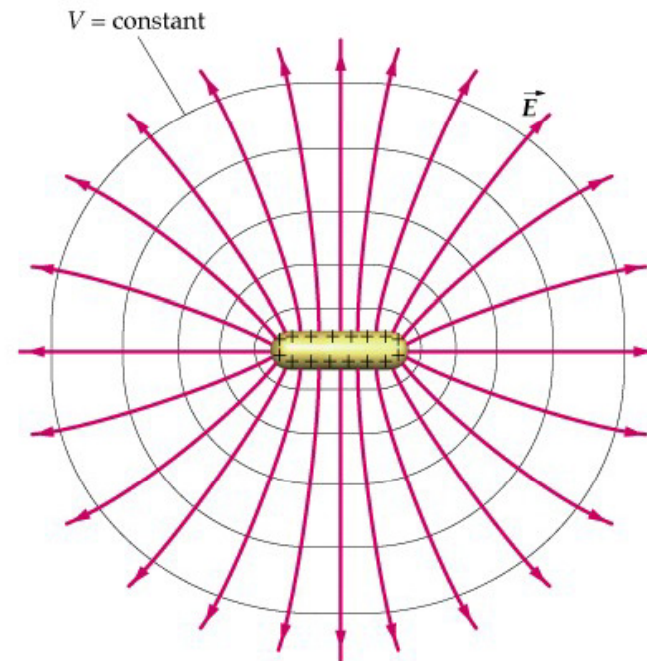


Figura 3.13: Superficies equipotenciales y líneas de campo exteriores a un conductor no esférico.

3.5 Superficies equipotenciales

Ejemplo 3.8: Un conductor esférico hueco y descargado posee un radio interno a y un radio externo b (figura 3.14). En el centro de la cavidad esférica existe una carga puntual $+q$. (a) Determinar la carga existente en cada superficie del conductor. (b) Determinar el potencial $V(r)$ en cualquier punto, suponiendo que $V = 0$ para $r = \infty$.



Figura 3.15: Conductor pequeño que posee una carga positiva situado en el interior de un conductor más grande.

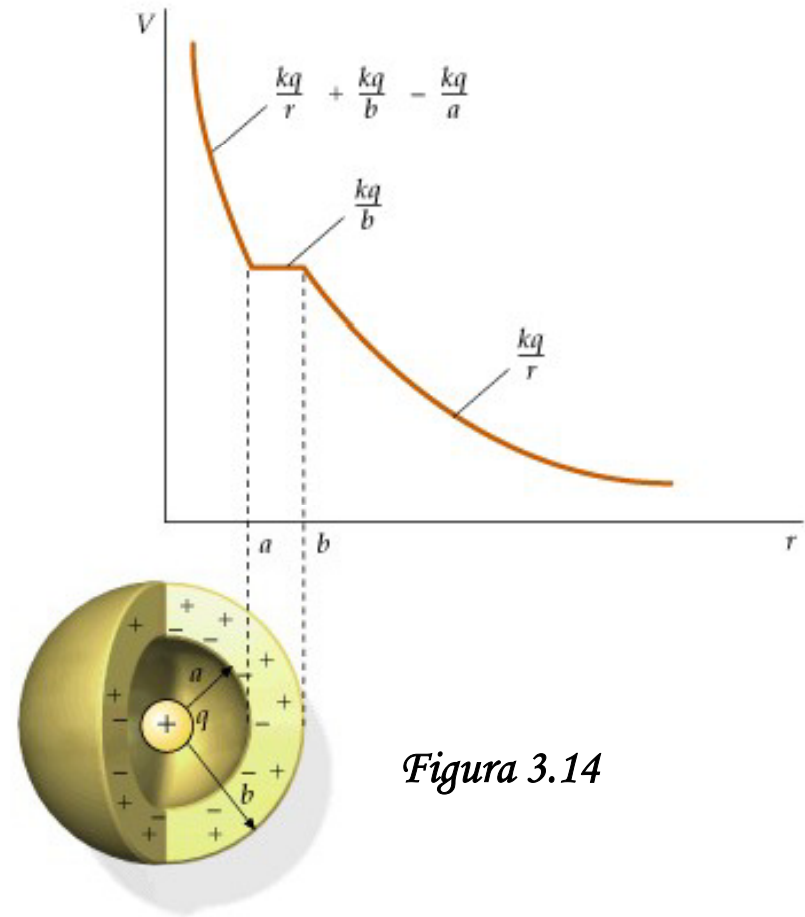


Figura 3.14

3.5 Superficies equipotenciales

✚ **Generador de Van de Graaff:** dispositivo para producir grandes potenciales.

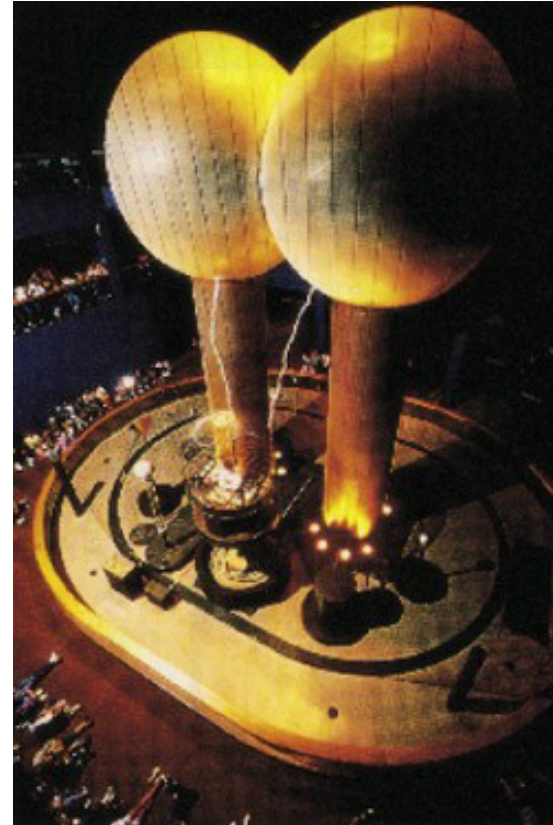
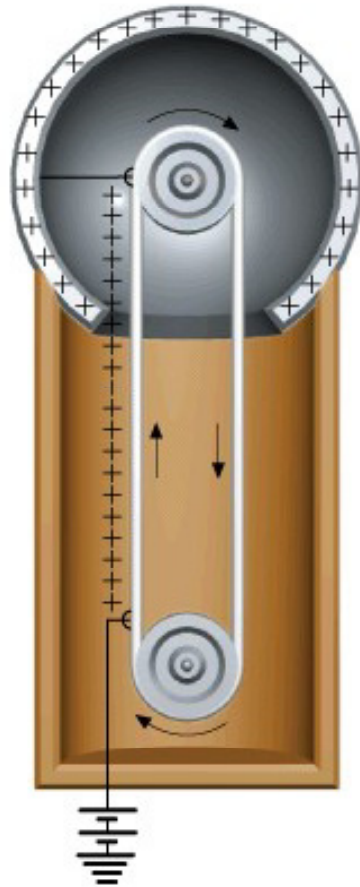


Figura 3.16: (a) Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff. (b) Generador de Van de Graaff en el museo de ciencias de Boston produciendo descargas espectaculares sobre la jaula de alambre conectada a tierra donde se encuentra el operador.

3.5 Superficies equipotenciales

✚ **Ruptura dieléctrica:** Muchos materiales no conductores se ionizan en campos eléctricos muy altos y se convierten en conductores. Este fenómeno, llamado **ruptura dieléctrica**, tiene lugar cuando la intensidad del campo eléctrico es $3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MN/C}$.

Ejemplo 3.9: Un conductor esférico tiene un radio de 30 cm. (a) ¿Cuál es la carga máxima que puede situarse en la esfera sin que se produzca la ruptura dieléctrica del aire que la rodea? (b) ¿Cuál es el potencial máximo de la esfera?

Ejemplo 3.10: Dos conductores esféricos cargados de radios $R_1 = 6 \text{ cm}$ y $R_2 = 2 \text{ cm}$ (figura 3.17) están separados por una distancia mucho mayor de 6 cm y conectados por un alambre conductor largo y delgado. Una carga total $Q = +80 \text{ nC}$ se sitúa en una de las esferas. (a) ¿Cuáles la carga de cada esfera? (b) ¿Cuál es el campo próximo a la superficie de cada esfera? (c) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?

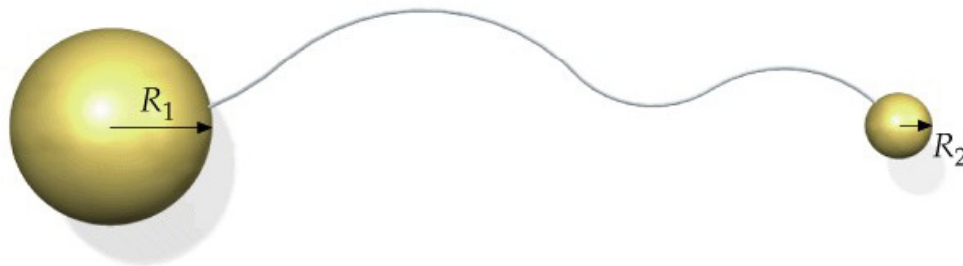


Figura 3.17: Representación esquemática de la situación descrita en el ejemplo 3.10.

3.5 Superficies equipotenciales

Cuando una carga se sitúa en un conductor de forma no esférica, como el de la figura 3.18, la superficie de éste será equipotencial, pero la densidad superficial de carga y el campo eléctrico justo en el exterior variarán de un punto a otro. Cerca de un punto de radio de curvatura pequeño, tal como el punto A de la figura, la densidad de carga superficial y el campo eléctrico serán grandes, mientras que cerca de un punto de radio de curvatura grande como el B, estas magnitudes serán pequeñas.

$$\sigma \approx \frac{\epsilon_0 V}{R} ; E \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (R = \text{radio de curvatura})$$

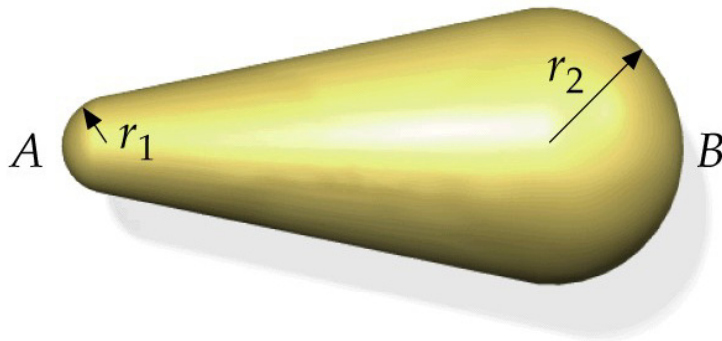


Figura 3.18: (a) Conductor no esférico. Al cargarlo eléctricamente, se producirá un campo eléctrico más intenso cerca del punto A, donde el radio de curvatura es más pequeño, que cerca del punto B, donde el radio de curvatura es más grande.

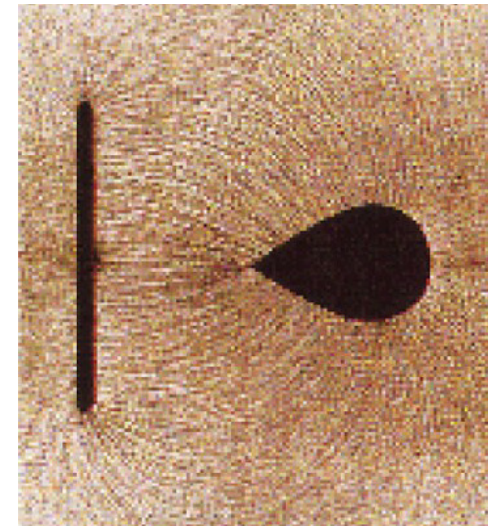


Figura 3.19: Líneas de campo eléctrico próximas a un conductor no esférico y a una placa cuyas caras están cargadas con cargas iguales y opuestas.

CAPÍTULO 4

Energía electrostática y capacidad

Índice del capítulo 4

- 4.1 Energía potencial electrostática.
- 4.2 Capacidad.
- 4.3 Almacenamiento de energía eléctrica.
- 4.4 Asociación de condensadores.
- 4.5 Dieléctricos.
- 4.6 Estructura molecular de un dieléctrico.

4.1 Energía potencial electrostática

✚ La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una distancia infinita hasta sus posiciones finales.

✚ La energía potencial electrostática U de un sistema de n cargas puntuales viene dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j \neq i}^n \frac{kq_j}{r_{j,i}}$$

✚ Consideremos un conductor esférico de radio R . Su energía potencial electrostática se determina del siguiente modo:

$$dU = Vdq = \frac{kq}{R} dq \Rightarrow U = \frac{k}{R} \int_0^Q q dq = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2} QV$$

✚ Para una serie de conductores de forma arbitraria:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

4.1 Energía potencial electrostática

Ejemplo 4.1: Los puntos A , B , C y D son los vértices de un cuadrado de lado a , como indica la figura 4.1. Cuatro cargas puntuales de valor q se encuentran inicialmente en reposo y separadas una distancia infinita. (a) Calcular el trabajo necesario para situar cada una de las cargas puntuales en el vértice del cuadrado, determinando por separado el trabajo correspondiente al transporte de cada carga a su posición final. (b) Demostrar que la primera ecuación de la transparencia anterior expresa correctamente el trabajo total.

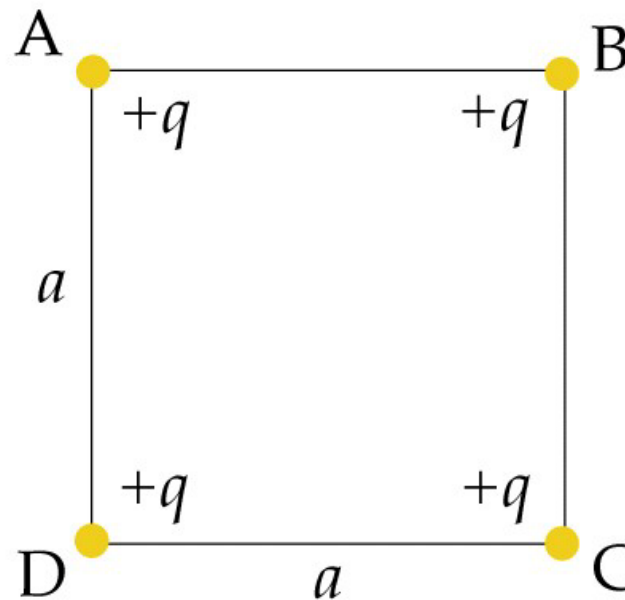


Figura 4.1

4.2 Capacidad

✚ El potencial de un único conductor aislado, que contiene una carga Q , es proporcional a esta carga y depende del tamaño y forma del conductor. En general, cuanto mayor es la superficie del conductor, mayor es la cantidad de carga que puede almacenar para un determinado potencial.

✚ El cociente entre la carga Q y el potencial V de un conductor aislado es su **capacidad**:

$$C = \frac{Q}{V}$$

✚ Esta magnitud mide la “capacidad” de almacenar carga para una determinada diferencia de potencial. Como el potencial es siempre proporcional a la carga, la capacidad no depende de Q o V , sino sólo del tamaño y forma del conductor. La capacidad de un conductor esférico es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$$

✚ La unidad del SI de capacidades es el **faradio** (F): $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$

✚ Como el faradio es una unidad relativamente grande, se utilizan frecuentemente submúltiplos como el microfaradio ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) el picofaradio ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$) .

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m}$$

4.2 Capacidad

✚ **Condensadores:** Un sistema de dos conductores portadores de cargas iguales y opuestas constituye un condensador.

✚ **Condensador de placas paralelas:**

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

(d = distancia entre placas; A = área de las placas)

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

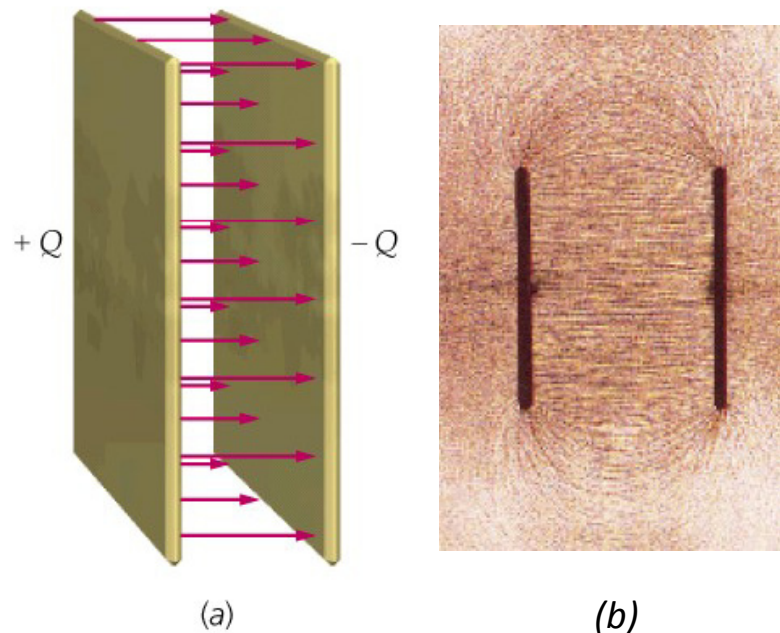


Figura 4.2: (a) Las líneas de campo entre las placas de un condensador plano están igualmente espaciadas, lo que indica que el campo es uniforme en esa región. (b) Líneas de campo en un condensador de placas paralelas visualizadas con porciones de hilo suspendidas en aceite.

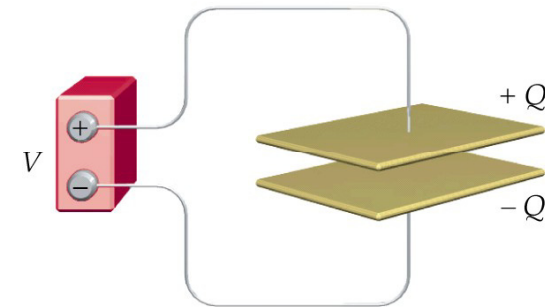


Figura 4.3: Cuando los conductores de un condensador se conectan a los terminales de una batería, ésta transfiere carga de un conductor al otro hasta que la diferencia de potencial entre los conductores es igual a la que existe entre los bornes de la batería.

4.2 Capacidad

Ejemplo 4.2: Un condensador placas plano-paralelas está formado por dos conductores cuadrados de lado 10 cm separados por 1 mm de distancia. (a) Calcular su capacidad. (b) Si este condensador está cargado con 12 V, ¿cuánta carga se transfiere de una placa a la otra?

Solución: (a) 88.5 pF; (b) 1.06 nC.

Ejemplo 4.3: Determinar la expresión de la capacidad de un conductor cilíndrico formado por dos conductores de longitud L . Un cilindro tiene un radio R_1 y el otro es una corteza cilíndrica coaxial de radio interno R_2 , siendo $R_1 < R_2 < L$, como indica la figura 4.4.

Solución:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)}$$

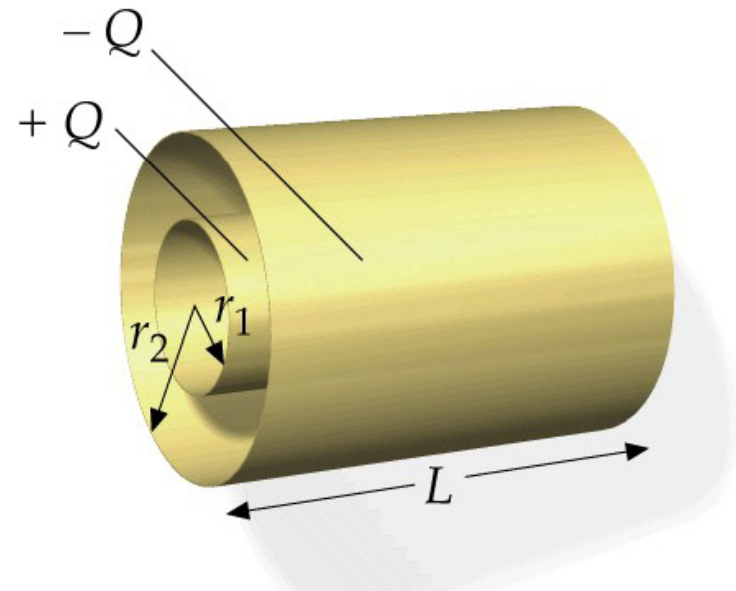
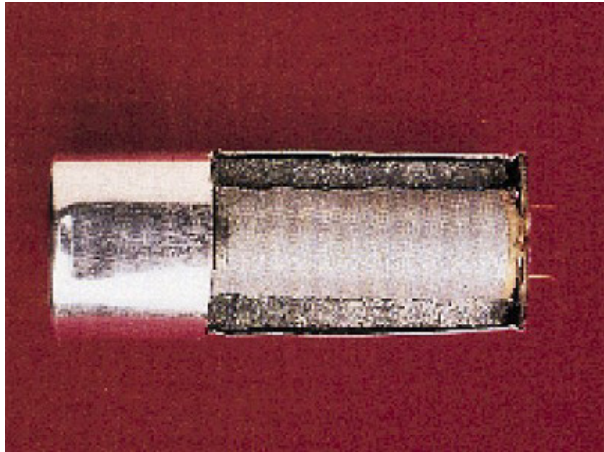
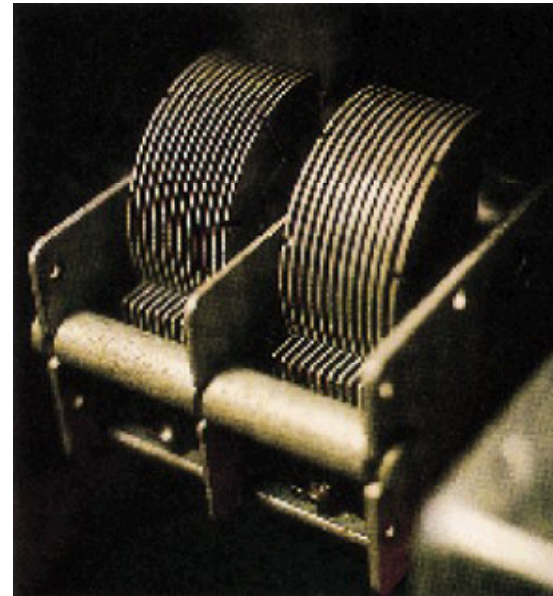


Figura 4.4

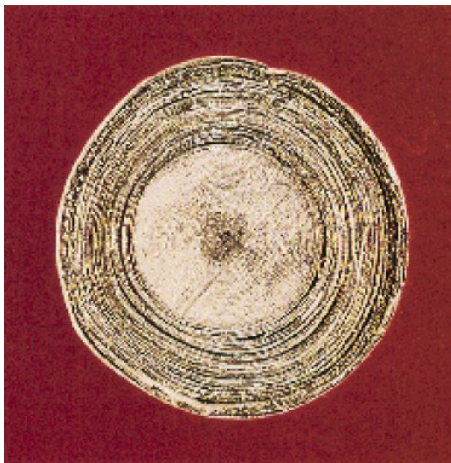
4.2 Capacidad



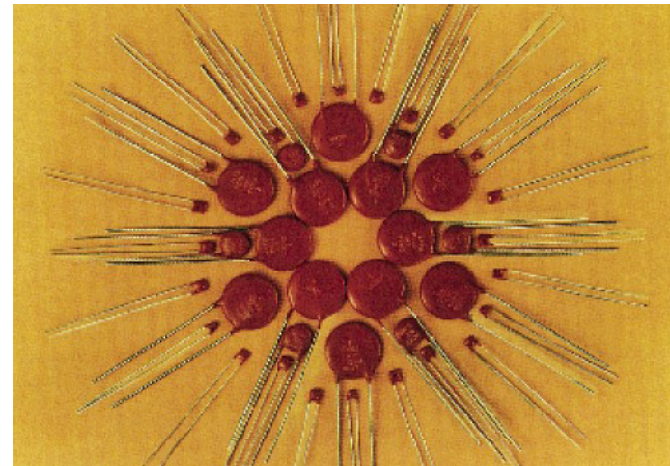
Corte transversal de un condensador de 200 μF utilizado en una lámpara de descarga electrónica.



Condensador variable con espaciado de aire. Las placas semicirculares giran entre las placas fijas cambiando la capacidad.



Sección transversal de un condensador de lámina enrollada.



Condensadores cerámicos con aplicaciones en los circuitos electrónicos.

4.3 Almacenamiento de energía eléctrica

La energía electrostática almacenada en un condensador se calcula del siguiente modo (ver figura 4.5):

$$dU = Vdq = \frac{q}{C} dq$$

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

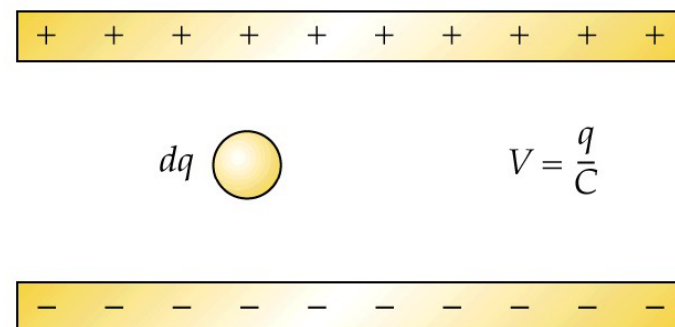


Figura 4.5: Cuando una pequeña cantidad de carga dq se mueve desde un conductor negativo hacia uno positivo su energía potencial se incrementa en $dU = V dq$, donde V es la diferencia de potencial entre los conductores.

Ejemplo 4.4: Proceso de carga de un condensador de placas plano-paralelas con una batería.

Un condensador de placas plano-paralelas y cuadradas, de lado 14 cm y separadas 2 mm, se conecta a una batería y se carga a 12 V. (a) ¿Cuál es la carga del condensador? (b) ¿Cuánta energía se almacena originalmente en el condensador? (c) Se desconecta entonces la batería del condensador y la separación de las placas se incrementa en 3.5 mm. ¿En cuánto se incrementa la energía al modificar la separación de las placas?

Solución: (a) 1.04 nC; (b) 6.24 nJ; 4.68 nJ.

4.3 Almacenamiento de energía eléctrica

✚ En el proceso de carga de un condensador se crea un campo eléctrico entre las placas. El trabajo necesario para cargar el condensador puede considerarse como el requerido para crear el campo eléctrico. Es decir, la energía almacenada en el condensador reside en el campo eléctrico y por ello se llama **energía del campo electrostático**.

✚ Consideremos un condensador de placas paralelas:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad)$$

La energía por unidad de volumen (**densidad de energía**) viene dada por:

$$u_e = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Ejemplo 4.5: Demostrar la validez de la expresión anterior para la densidad de energía del campo electrostático en el caso de un conductor esférico con carga Q (ver figura 4.6).

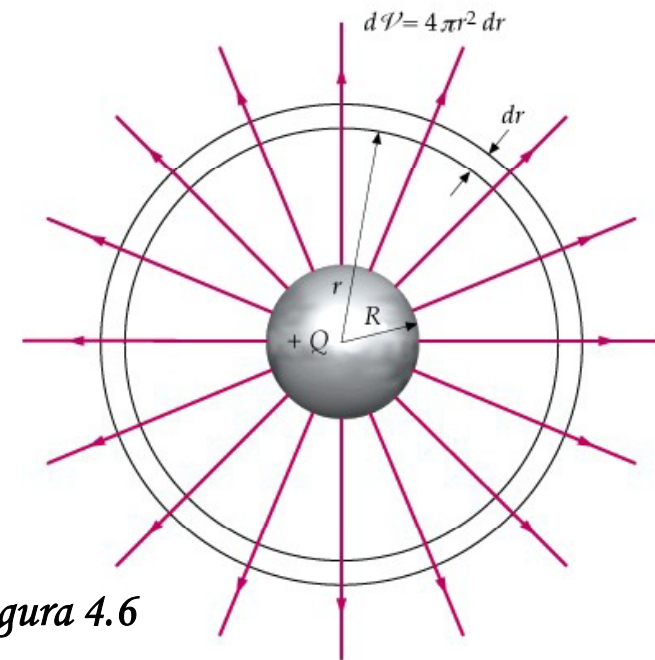


Figura 4.6

4.4 Asociación de condensadores

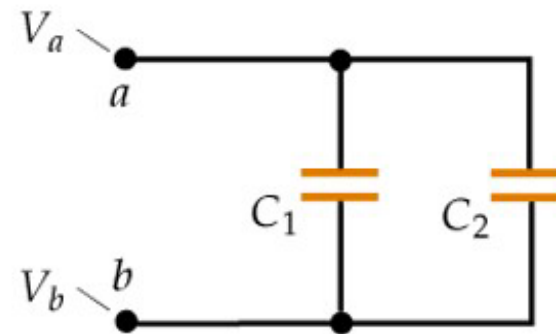
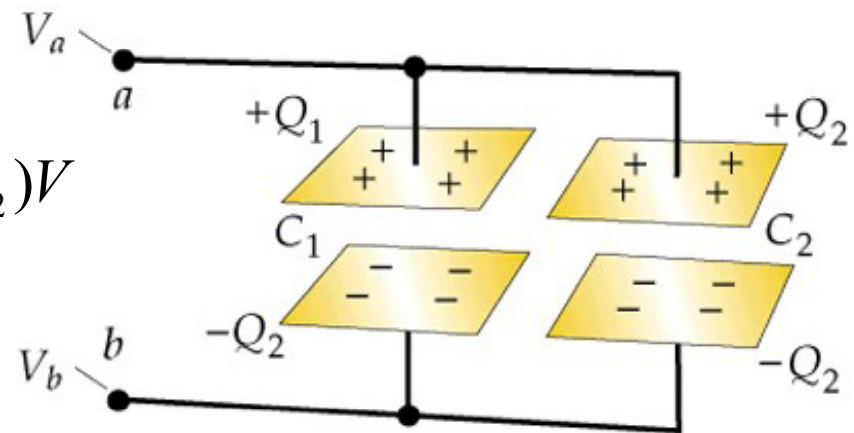
✚ **Asociación de condensadores en paralelo:** Cuando dos condensadores se conectan como en la figura 4.7, de tal modo que las placas superiores e inferiores de los dos condensadores están unidas por un alambre conductor y, por tanto, existe una misma diferencia de potencial entre sus placas, se dicen que están conectados en **paralelo**.

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V$$

$$Q_{Total} = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

$$C_{eq} = \frac{Q_{Total}}{V} = C_1 + C_2$$

Figura 4.7: Dos condensadores en paralelo. Las placas superiores están conectadas entre sí y se encuentran, por lo tanto, al mismo potencial V_a ; las placas inferiores están igualmente conectadas entre sí y, por lo tanto, tiene un potencial común V_b .



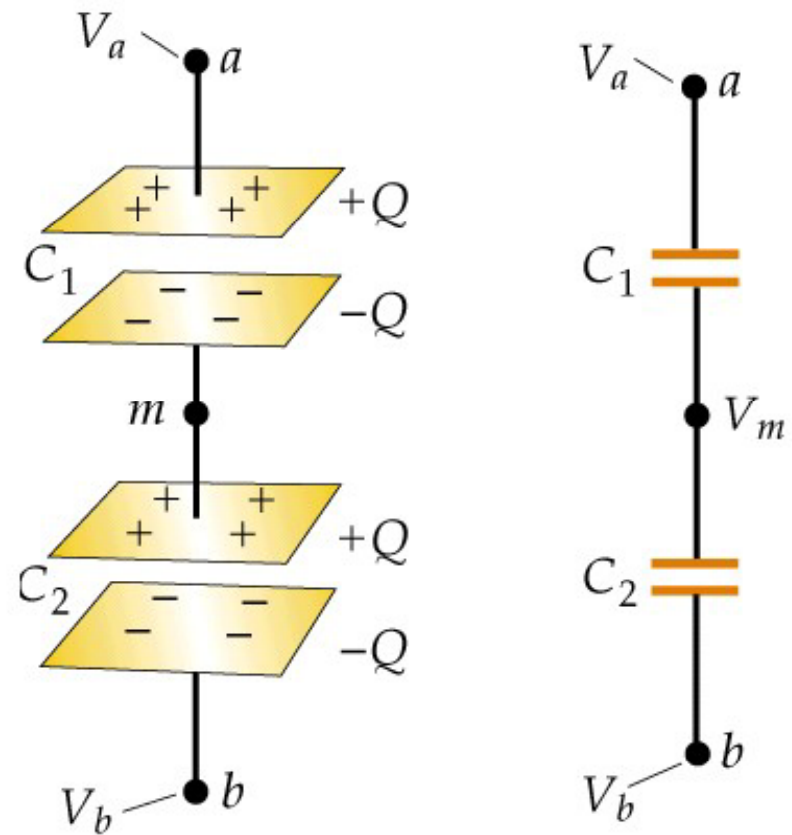
4.4 Asociación de condensadores

✚ **Asociación de condensadores en serie:** En la figura 4.8 se representa la conexión de dos condensadores de tal forma que la diferencia de potencial a través de ambos es igual a la suma de las diferencias de potencial a través de cada uno de ellos. Esta forma de conexión se denomina en **serie**.

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \text{ y } V_2 = \frac{Q}{C_2}$$
$$V_{Total} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Figura 4.8: Dos condensadores en serie. La carga total de las placas interconectadas de los dos condensadores es cero. La diferencia de potencial entre la primera placa del primero y la última del segundo es la suma de las diferencias de potencial entre las placas de cada uno de los condensadores.



4.4 Asociación de condensadores

Ejemplo 4.6: Considere el circuito de la figura 4.9.

Inicialmente el interruptor está abierto y los condensadores descargados. Se cierra el interruptor y los condensadores se cargan. Cuando los condensadores quedan completamente cargados, abrimos el circuito y el voltaje en circuito abierto queda restablecido. (a) ¿Cuál es el potencial de cada conductor? (b) ¿Cuál es la carga de cada una de las placas de los condensadores? (c) ¿Cuál es la carga total que pasa a través de la batería?

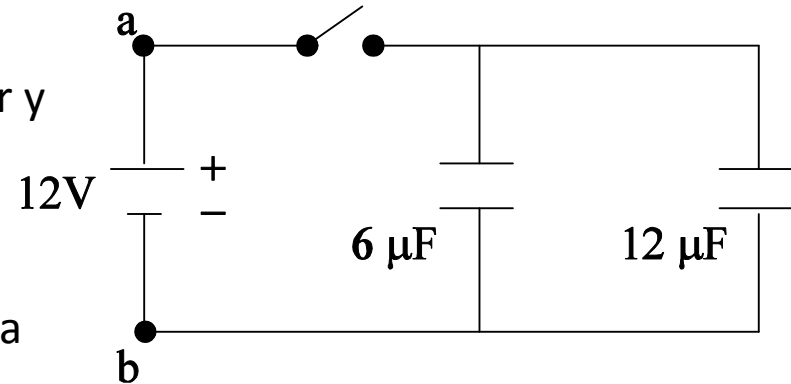


Figura 4.9

Ejemplo 4.7: Considere el circuito de la figura 4.10.

Inicialmente el interruptor está abierto y los condensadores descargados. Se cierra el interruptor y los condensadores se cargan. Cuando los condensadores quedan completamente cargados, abrimos el circuito y el voltaje en circuito abierto queda restablecido. (a) ¿Cuál es el potencial de cada conductor? (b) ¿Cuál es la carga de cada una de las placas de los condensadores? (c) ¿Cuál es la carga total que pasa a través de la batería?

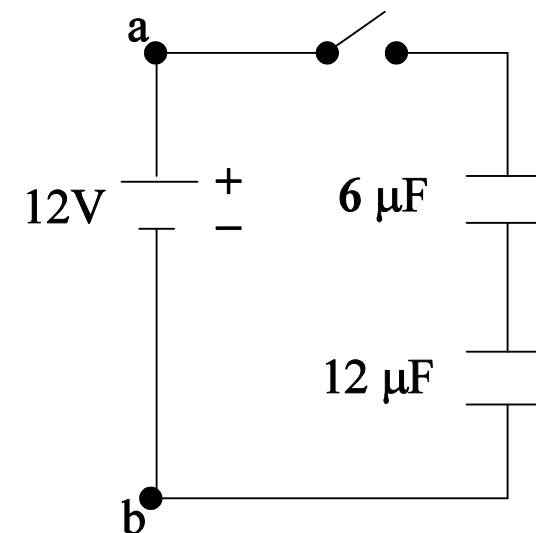


Figura 4.10

4.5 Dieléctricos

✚ Un material no conductor como, por ejemplo, el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieléctrico**. Michael Faraday descubrió que cuando el espacio entre los dos conductores de un condensador se ve ocupado por un dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor κ que es característico de un dieléctrico. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas se debilita por causa del dieléctrico.

✚ Si el campo eléctrico original entre las placas de un condensador sin dieléctrico es E_0 , el campo en el interior del dieléctrico introducido entre las placas es

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

donde κ es la **constante dieléctrica**. En un condensador de placas paralelas separadas por una distancia d , la diferencia de potencial V entre las placas es

$$V = Ed = \frac{E_0 d}{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \kappa \frac{Q}{V_0} \Rightarrow C = \kappa C_0$$

✚ La capacidad de un condensador de placas paralelas lleno de un dieléctrico (κ) es:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \quad \text{donde } \epsilon = \kappa \epsilon_0 \text{ es la permitividad del dieléctrico}$$

4.5 Dieléctricos

Ejemplo 4.8: Un condensador plano tiene placas cuadradas de lado 10 cm y separación $d = 4$ mm. Un bloque de dieléctrico de constante $\kappa = 2$ tiene dimensiones 10 cm x 10 cm x 4 mm. (a) ¿Cuál es la capacidad sin dieléctrico? (b) ¿Cuál es la capacidad si el bloque de dieléctrico llena el espacio entre las placas? (c) ¿Cuál es la capacidad si un bloque dieléctrico de dimensiones 10 cm x 10 cm x 3 mm se inserta en el condensador cuyas placas están separadas 4 mm?

✚ **Energía almacenada en presencia de un dieléctrico:**

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad)$$

La energía por unidad de volumen es

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2$$

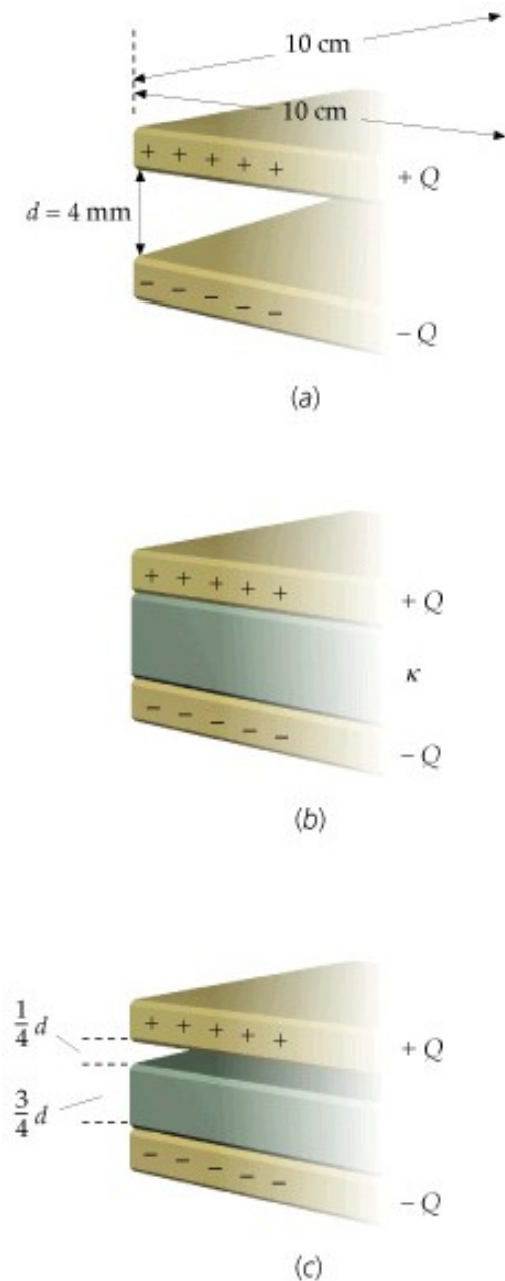


Figura 4.11

4.5 Dieléctricos

Ejemplo 4.9: Dos condensadores de placas plano-paralelas, cada uno con una capacidad $C_1 = C_2 = 2 \mu\text{F}$, están conectados en paralelo a través de una batería de 12 V. Determinar (a) la carga de cada condensador y (b) la energía total almacenada en los condensadores.

Solución: (a) $Q_1 = 13.7 \mu\text{C}$ y $Q_2 = 34.3 \mu\text{C}$; (b) $165 \mu\text{J}$.

Ejemplo 4.10: Determinar (a) la carga en cada condensador y (b) la energía total almacenada en los condensadores del ejemplo 4.9, si el dieléctrico se inserta en uno de los condensadores mientras la batería está todavía conectada.

Solución: (a) $U_1 = 144 \mu\text{J}$ y $U_2 = 360 \mu\text{J}$; (b) $504 \mu\text{J}$.

4.6 Estructura molecular de un dieléctrico

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas de un condensador porque sus moléculas producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto al del campo externo producido por las placas. Este campo se debe a los momentos dipolares eléctricos de las moléculas del dieléctrico.

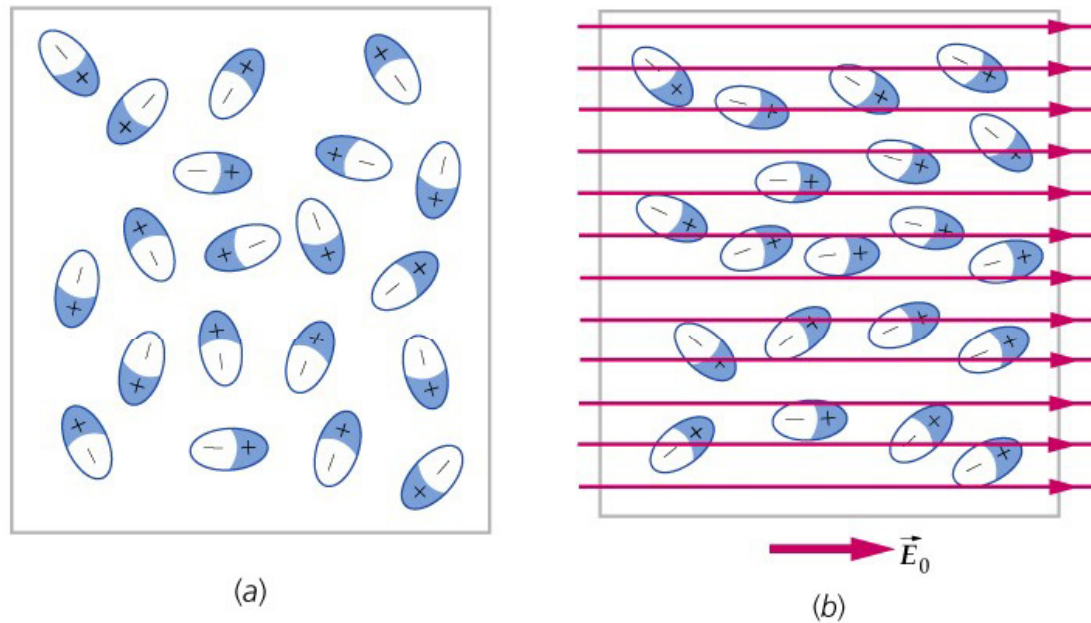


Figura 4.13: (a) Dipolos eléctricos pertenecientes a un dieléctrico polar orientados al azar en ausencia de un campo externo. (b) En presencia de un campo externo los dipolos se alinean paralelamente al campo de modo parcial.

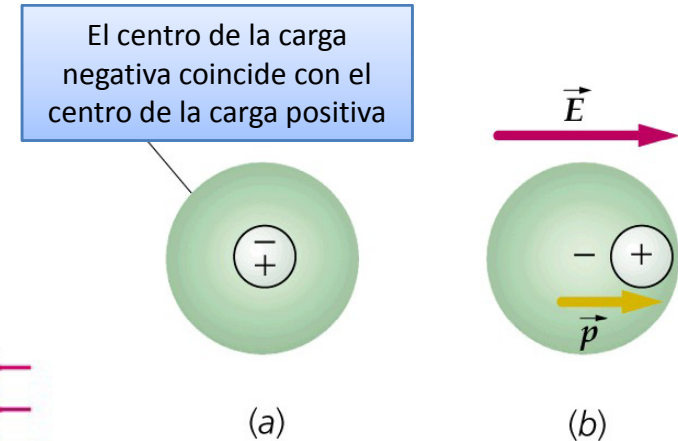


Figura 4.12: Diagramas esquemáticos de las distribuciones de carga de un átomo o molécula no polar. (a) En ausencia de campo eléctrico externo, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. (b) En presencia de un campo eléctrico externo, los centros de la carga positiva y negativa se desplazan produciendo un momento dipolar inducido en la dirección del campo externo.

4.6 Estructura molecular de un dieléctrico

El efecto neto de la polarización de un dieléctrico en un condensador es la creación de una carga superficial sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas (ver figura 4.14). Esta carga superficial, ligada al dieléctrico, se denomina **carga ligada** porque no puede desplazarse como la carga libre que existe en las placas del condensador.

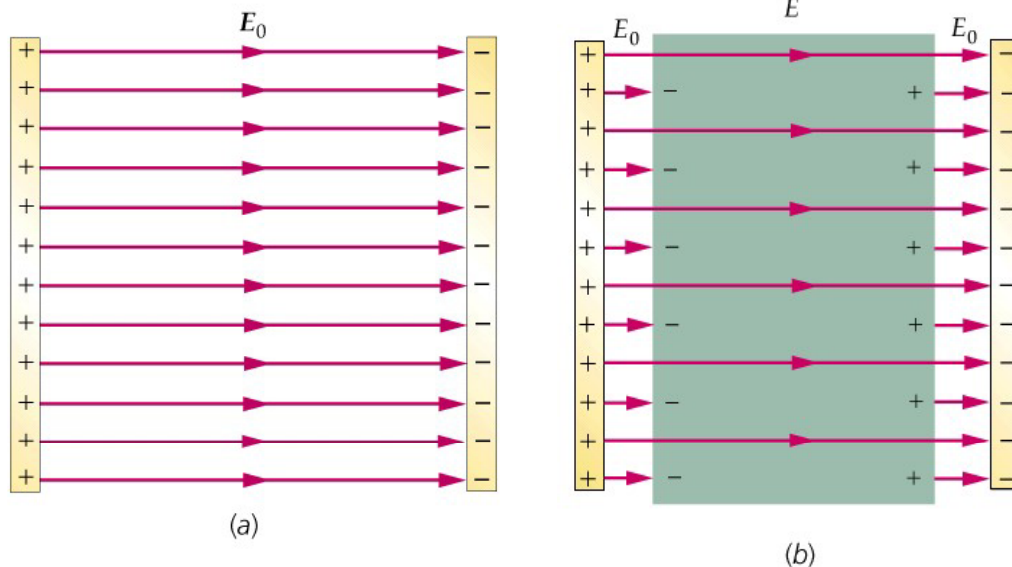


Figura 4.15: Campo eléctrico entre las placas de un condensador (a) sin dieléctrico y (b) con un dieléctrico. La carga superficial en el dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas.

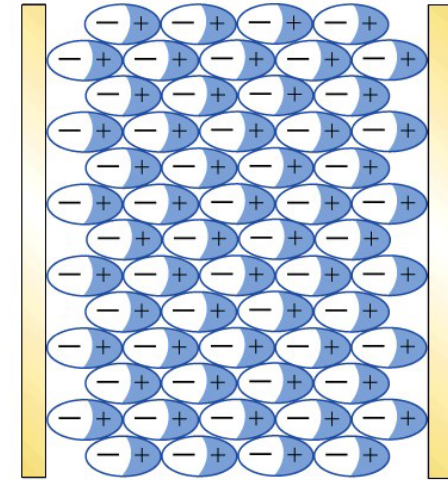


Figura 4.14: Cuando se sitúa un dieléctrico entre las placas de un condensador, el campo eléctrico polariza sus moléculas. El resultado es una carga ligada a la superficie del dieléctrico que produce su propio campo, el cual se opone al campo externo.

4.6 Estructura molecular de un dieléctrico

Ejemplo 4.11: Un átomo de hidrógeno está formado por un núcleo de un protón de carga $+e$, y un electrón de carga $-e$. La distribución de carga del átomo tiene simetría esférica, de modo que el átomo es no polar. Consideremos un modelo en el cual el átomo de hidrógeno consiste en una carga puntual positiva $+e$ situada en el centro de una nube esférica cargada uniformemente de radio R y carga total $-e$. Demostrar que cuando el átomo como este se sitúa en un campo eléctrico externo uniforme $\vec{E}$, el momento dipolar inducido es proporcional a $\vec{E}$, es decir, $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, donde α se conoce con el nombre de **polarizabilidad**.

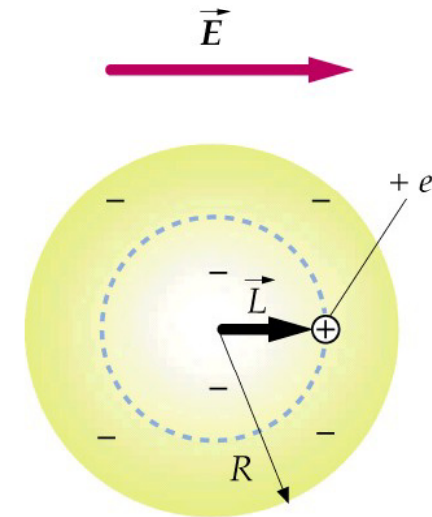


Figura 4.16

Ejemplo 4.12: Demostrar que la densidad de carga ligada σ_b de las superficies de un dieléctrico está relacionada con la constante dieléctrica κ y la densidad de carga libre σ_f del siguiente modo:

$$\sigma_b = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \sigma_f$$

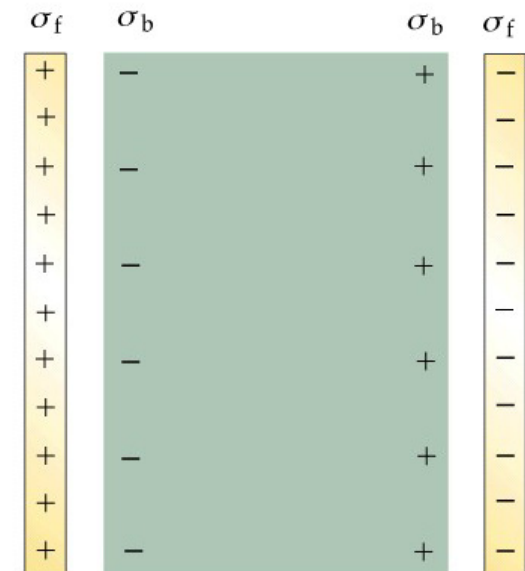


Figura 4.17