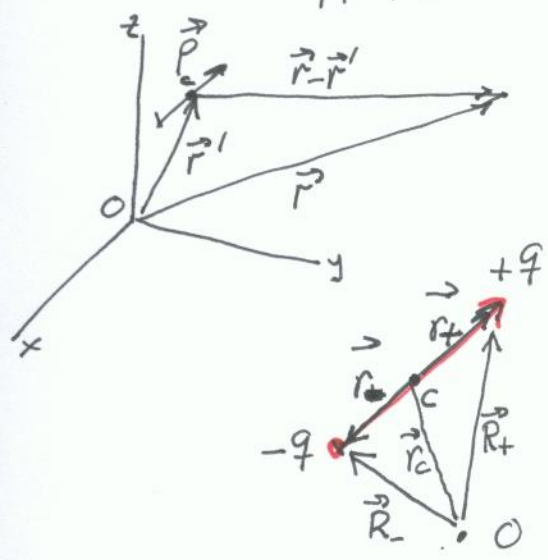


2) - ELECTROSTATICA EN LA MATERIA

MATERIA. $\begin{cases} \text{CONDUCTORES (CARGAS LIBRES)} \\ \text{DIELECTRICOS (AISLANTES) (CARGAS LIGADAS)} \end{cases}$

Recordando que el potencial creado por un dipolo eléctrico es

$$V(\vec{r}) = \frac{k \vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



En presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}$

a) FUERZA:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \cdot \Delta \vec{E}$$

$$= (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (\text{Demostrar}) \quad \Delta E_x = \vec{\nabla} E_x \cdot \vec{l}$$

$$\Delta \vec{E} = (\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

b) MOMENTO:

$$\vec{M}_c = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- =$$

$$= \frac{\vec{l}}{2} \times q \vec{E} + \left(-\frac{\vec{l}}{2}\right) \times (-q \vec{E}) =$$

$$= q \cdot \vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

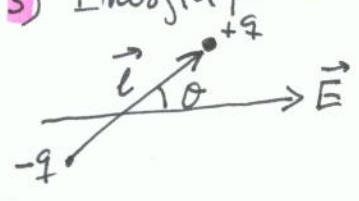
(demostrar que $\vec{M}_c = \vec{M}_0$ en un $\vec{E}$ uniforme)

Tiende a colocar a $\vec{p} \parallel \vec{E}$

Nota: 1) Si $\vec{E}$ es uniforme, NO HAY FUERZA NETA (no desplazamiento) pero SI HAY MOMENTO (giro del dipolo para alinearlo con $\vec{E}$)

$$2) \vec{M}_0 = \vec{r}_- \times \vec{F}_- + \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = (\vec{r}_c + \vec{r}_-) \times \vec{F}_- + (\vec{r}_c + \vec{r}_+) \times \vec{F}_+ = \vec{M}_c + \vec{r}_c \times (\vec{F}_- + \vec{F}_+)$$

3) Energía potencial de un dipolo en un campo externo $\vec{E}$



$$U = qV_+ - qV_- = q(V_+ - V_-) = q \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -$$

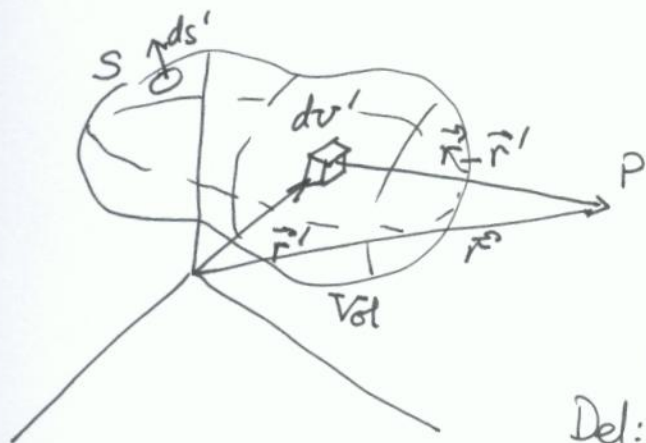
$$= -q \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \vec{E} \cdot \vec{l} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Nota: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$. $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}$

Problemas de dipolos: pag 165 4.5 a 4.9

2.1) DISTRIBUCIONES DE DIPOLOS (materia polarizada)

(15)



$$V(P) = \int_{Vol} \frac{k \vec{P}(dv') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

siendo $\vec{P}(dv')$ el número de dipolos (momentos) dipolo total contenido en dv'

$$\text{Def: Polarización} \cdot \vec{P} = \frac{\vec{P}(dv')}{dv'}$$

momento dipolo por unidad de volumen.

$$V(P) = \int_{Vol} \frac{k \vec{P}(\vec{r}') \cdot d(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

ya que $\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ el potencial se puede poner como

$$V(P) = \int_{Vol} k \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dv' = \int_{Vol} k \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dv' - \int_{Vol} \frac{k (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

par partes

que finalmente se puede poner como

$$V(P) = \oint_{Sup} k \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' + \int_{Vol} k \frac{(-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

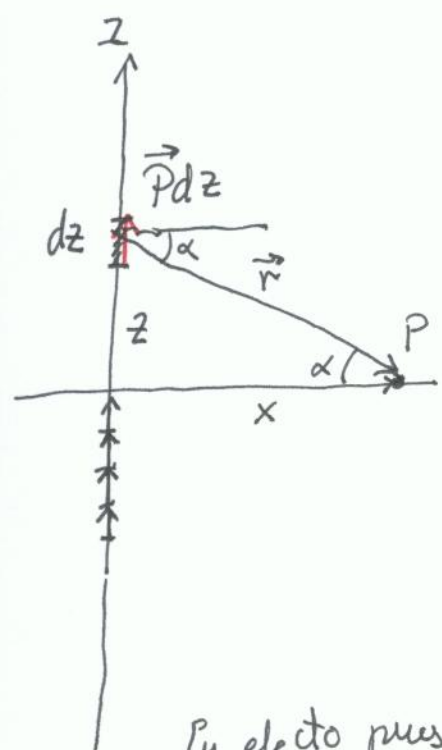
que permiten definir unas distribuciones de carga (ligada a la materia)

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{u} \quad \rho_b = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$$

de modo que el potencial creado por la materia polarizada se escribe

$$V(P) = \oint_{Sup} \frac{k \sigma_b}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' + \int_{Vol} \frac{k \rho_b}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

Ejemplo 1 Distribucion lineal de dipolos iguales con distribucion uniforme de densidad $\vec{P}$ cte.



$$V(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \vec{P} \cdot \vec{r} dz}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k P r \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) dz}{r^3} =$$

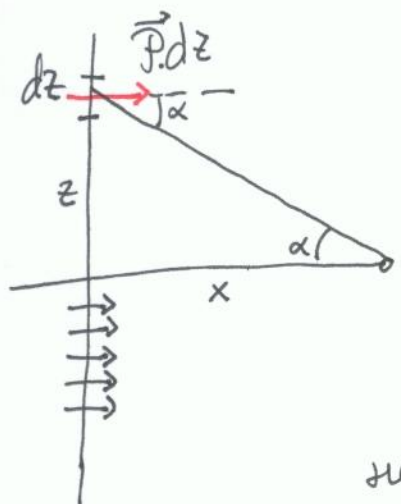
$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k P \sin \alpha}{r^2} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k P \sin \alpha}{x^2 / \cos^2 \alpha} \cdot \frac{x}{\cos \alpha} d\alpha =$$

$\left(\begin{array}{l} \text{Tg } \alpha = \frac{z}{x} \\ \text{Cot } \alpha = \frac{x}{z} \end{array} \right)$

$$= - \frac{k P}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = 0$$

En efecto pues los campos se anulan uno con otros a lo largo de la linea.

Ejemplo 2 Distribucion lineal de dipolos paralelos tambien con dens. const.

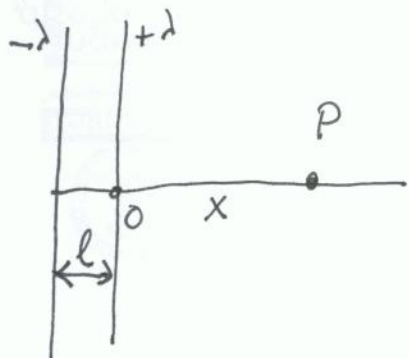


$$V(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \vec{P} \cdot \vec{r} dz}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k P \cos \alpha \cdot dz}{r^2} =$$

$$= \frac{k P}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{2kP}{x} = \frac{2kM|\vec{P}|}{x}$$

siendo $M \equiv \text{n}^\circ$ de dipolos por u de longitud.
 $|\vec{P}| \equiv \text{momento dipolar}$

Este resultado es identico al potencial creado por 2 hilos infinitos con dens. lineal $-\lambda$ y $+\lambda$



$$V_+(P) = 2k\lambda_+ \ln x + \text{cte}$$

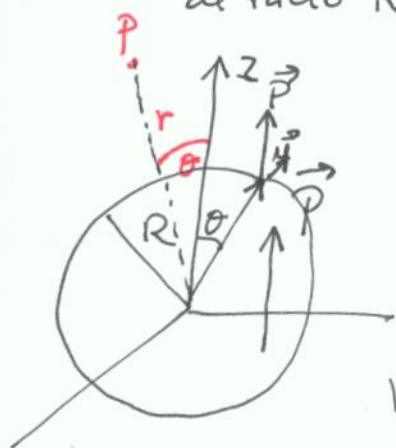
$$V_-(P) = 2k\lambda_- \ln(x+l) + \text{cte}$$

$$V(P) = V_+(P) + V_-(P) = 2k\lambda (\ln x - \ln(x+l)) =$$

$$= 2k\lambda \ln \frac{x}{x+l} \approx 2k\lambda \ln \frac{4}{1+l/x} \approx \frac{2k\lambda l}{x} \quad \text{P}$$

Ejemplo 3 Calcular el campo eléctrico producido por una esfera de radio R polarizada uniformemente

(17)



ya que $\vec{P}$ es constante $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$

pero $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$

Nota: la carga total ligada es

$$q_b = \int \sigma_b \cdot dS = \int P \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= PR^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

$$V(r, \theta) = \int \frac{k \sigma_b \cdot dS}{r}$$

puede probarse que $V(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta$ $r \leq R$

$$V(r, \theta) = \frac{P \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad r \geq R$$

(*) Se puede hacer por Ec. de Laplace $\nabla^2 V = 0$
tanto dentro como fuera y aplicar la CC. en la frontera de la esfera
 $V(r) = 0$ y σ_b en la frontera

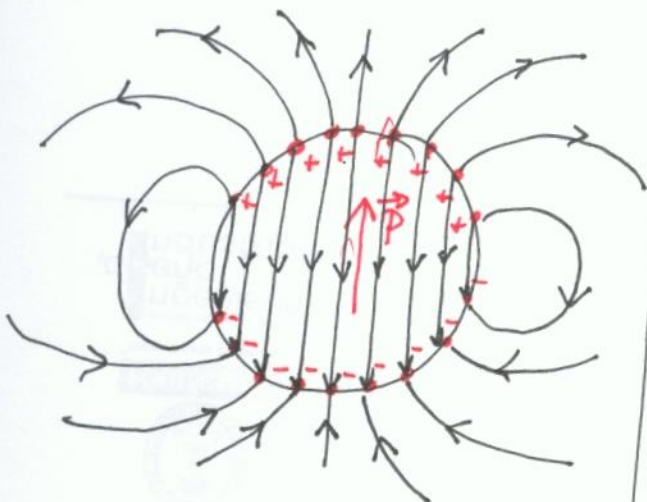
luego $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{u}_z \quad (r < R)$

$= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (r < R) \text{ dentro de la esfera}$

Fuera de la esfera el potencial es idéntico al de un dipolo situado en el origen ya que $\vec{p} = \vec{P} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

y por tanto el campo es el que corresponde a tal configuración,



$$(*) V = \int \frac{k \vec{P} \cdot \vec{u}_r}{r^2} dv = \vec{P} \cdot \int \frac{k \cdot \vec{u}_r}{r^2} dv$$

campo $\vec{E}$ creado por una esfera cargada con densidad uniforme ρ

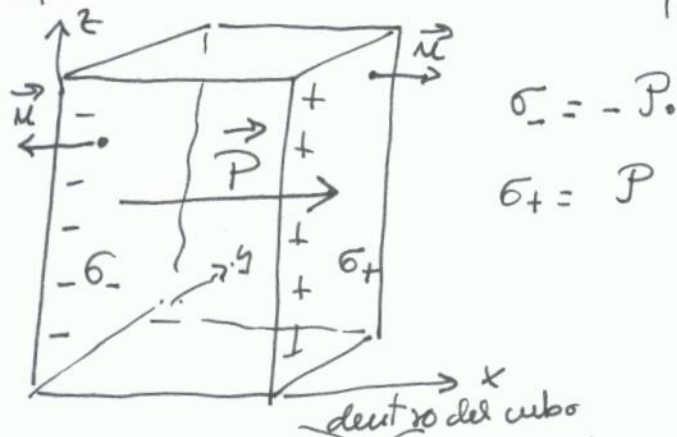
se puede usar T^o de Gauss.

$$r < R \quad \vec{E}(r) = \frac{r \vec{u}_r}{3\epsilon_0}$$

$$r > R \quad \vec{E}(r) = \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Ejemplo 4 Cubo de dielectrico uniformemente polarizado

(18)



$$\sigma_- = -P$$

$$\sigma_+ = P$$

El campo electrico debido a las cargas de polarización en la superficie se puede calcular suponiendo que el campo es uniforme y paralelo al eje x

$$\vec{E}_b = -\frac{\sigma_-}{2\epsilon_0} \vec{L} - \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} \vec{L} = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{L}$$

2.2. LEY DE GAUSS EN MEDIOS DIELECTRICOS

Dentro de un dielectrico puede haber cargas libres y cargas debidas a la polarización del dielectrico. Supongamos que dentro de un dielectrico hay un conductor cargado con Q_L y que este tiene una superficie S_0 . Como el campo electrico tiene como fuentes tanto las cargas libres como las ligadas aplicamos el T^a de Gauss a la superficie gaussiana S_g



$$\oint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_L + Q_P}{\epsilon_0}$$

$$\text{donde } Q_P = \oint_{S_0} \vec{P} \cdot \vec{n}_0 dS_0 + \iiint_V \rho_p dV$$

ya que S_0 es la unica superficie real del dielectrico, y

$$\rho_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_0 \quad \text{y} \quad \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\text{pero } \iiint_V \rho_p dV = \iiint_V -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = -\oint_{S_0} \vec{P} \cdot \vec{n}_0 dS_0 - \oint_{S_g} \vec{P} \cdot \vec{n}_g dS_g, \text{ por tanto}$$

$$Q_P = -\oint_{S_g} \vec{P} \cdot \vec{n}_g dS$$

Aquí tenemos que

$$\oint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_l}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{S_g} \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\oint_{S_g} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = Q_l}$$

(19)

Definimos un nuevo vector llamado ^{desplazamiento eléctrico} $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ con lo que el Teorema de Gauss en dielectricos dice que solo hay que computar la carga libre

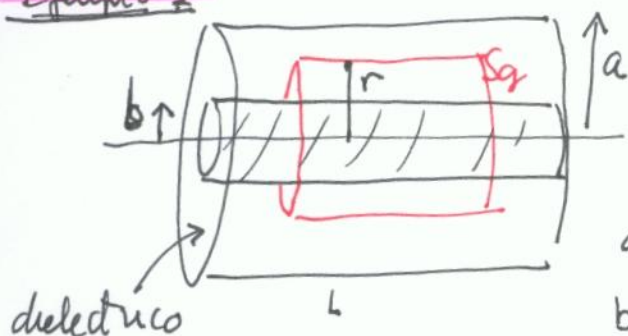
$$\boxed{\oint_{S_g} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l}$$

Nota: otra demostracion mas breve.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \rho_l - \vec{\nabla} \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_l \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_l}$$

Ejemplo 1



conductor cilindrico de radio b con una carga superficial σ constante y uniforme.

a) $r < b$ $E = 0$ por ser un conductor

b) $b < r < a$ $\oint_{S_g} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l$

$$D \cdot 2\pi r \cdot L = \sigma \cdot 2\pi b \cdot L \Rightarrow \boxed{D(r) = \frac{\sigma b}{r}}$$

c) para $r > a$, como no hay polarización $\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$

$$\boxed{E(r) = \frac{\sigma b}{\epsilon_0 r}}$$

Solo en el caso b no podemos determinar $\vec{E}(r)$ y solo $\vec{D}(r)$ ya que no conocemos cuanto vale $\vec{P}$

Notese: desde fuera de un dielectrico la carga total de polarización o ligada es cero y la polarización ~~$\vec{P}$ es uniforme~~ el dielectrico es neutro. Veamos esto a continuacion

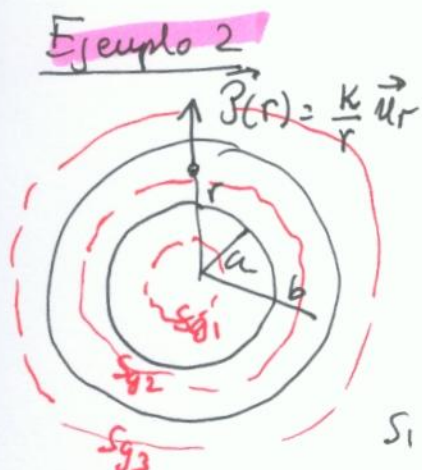
La carga total ligada en un dielectro es

$$Q_b = \oint_S \sigma_b ds + \int_V \rho_b dv = \oint_S \vec{P} d\vec{s} - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv \text{ pro según}$$

$$\text{el teorema de la divergencia } \oint_S \vec{P} d\vec{s} = \oint_S \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv \Rightarrow Q_b = 0$$

Note: EN PRINCIPIO CUALQUIER DIELECTRICO ES ELECTRICAMENTE NEUTRO EN SU TOTALIDAD. (problema 4.31 pag 198)

Ejemplo 2



$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{K}{r} \right) = -\frac{K}{r^2}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{u} = \begin{cases} r=a & \sigma_b = -\frac{K}{a} \\ r=b & \sigma_b = \frac{K}{b} \end{cases}$$

$$\text{Si } r < a \quad \oint_{Sg1} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{g1} = \frac{Q_{Sg1}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\text{Si } a < r < b \quad \oint_{Sg2} \vec{D} d\vec{s} = Q_{enc} = 0 \Rightarrow D(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{P}{\epsilon_0} = -\frac{K}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\text{Si } r > b \quad \oint_{Sg3} \vec{D} d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = -\frac{P}{\epsilon_0} = 0$$

Otra forma de hacerlo. por ejemplo si $a < r < b$

$$\oint_{Sg2} \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_b}{\epsilon_0} \text{ pro}$$

$$Q_b / S_{g2} = \oint_{S_a} \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int_{V_{Sg2}} \rho_b dv = -\frac{K}{a} \cdot 4\pi a^2 + \int_a^r \left(-\frac{K}{r^2} \right) 4\pi r^2 dr =$$

$$= -4\pi K a - 4\pi K (r-a) = -4\pi K r$$

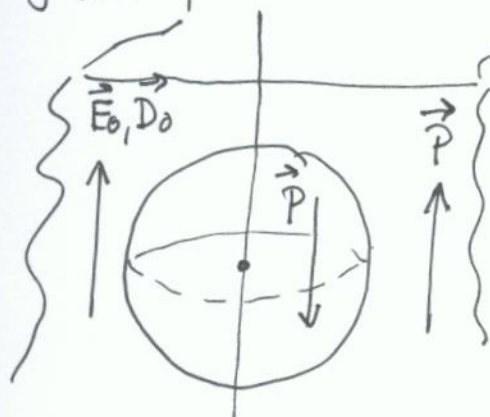
por tanto

$$E = -\frac{4\pi K r}{4\pi r^2 \epsilon_0} = -\frac{K}{\epsilon_0 r} \quad \text{C \& P}$$

Ejemplo 3

En un espacio ocupado por un dieléctrico polarizado en la dirección z (2) se hace una cavidad esférica pequeña. Si el campo eléctrico dentro del dieléctrico es $\vec{E}_0$ de modo que $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$, encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ y el $\vec{D}$ dentro de la cavidad.

Supondremos que la cavidad está llena del mismo dieléctrico pero con polarización contraria. En este caso la polarización del hueco es nula y el campo en el hueco se encuentra suponiendo que la esfera es pequeña



y que $\vec{P}$ producido por la esfera ~~es~~ es uniforme dentro de ella. Recordando el ejemplo 3 de la pag 17

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3} = \vec{D}_0 - \vec{P} + \frac{\vec{P}}{3} = \vec{D}_0 - \frac{2}{3}\vec{P}$$

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$$

Nota final: Sobre el vector desplazamiento. Ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$ podríamos pensar que existe una "ley de Coulomb" por $\vec{D}$, es decir

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_d} \frac{\rho_e(\vec{r}') \cdot \vec{u}_r}{r^2} dV' \quad \underline{\text{FALSO}}$$

ya que esto implicaría que $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ mientras que se cumple que

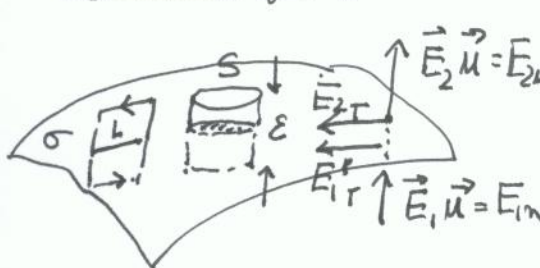
$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} \times \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$$

No hay un potencial para $\vec{D}$ análogo a V para $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$\vec{D}$ no está determinado únicamente por la carga libre y si por cualquier campo vectorial viene determinado por su divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$ y su rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$. Si $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ entonces se puede afirmar que las únicas fuentes de $\vec{D}$ son las cargas libres.

2.3) CONDICIONES DE CONTORNO

Recordemos que para una superficie cargada



The diagram shows a surface with charge density σ . A Gaussian pillbox of height 2ϵ and cross-sectional area S is used to find the normal component of the electric field. A rectangular loop of length L is used to find the tangential component. The electric field is $\vec{E}_1$ above and $\vec{E}_2$ below the surface.

$$\left[\begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ E_{1T} - E_{2T} = 0 \end{array} \right] \quad \leftarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

en la interfaz

$$\leftarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

y en términos del potencial. $V_1 = V_2$ (en la superficie). El potencial ha de ser continuo pues en caso contrario $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ no tendría sentido.

Además

$$\left[\frac{\partial V_2}{\partial n} - \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right] \text{ en la interfaz.}$$

Si se utiliza $\vec{D}$, en una interfaz con carga libre σ_L se tendrá:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_L$$

mientras que los componentes paralelos o tangenciales dan:

$$\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_L (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 (E_{2T} - E_{1T}) + P_{2T} - P_{1T} = P_{2T} - P_{1T}$$

luego

$$D_{2T} - D_{1T} = P_{2T} - P_{1T}$$

2.4) DIELECTRICOS LINEALES ¿QUE POLARIZA UN DIELECTRICO?

Lo que polariza un dielectrico es la aplicacion de un campo electrico de modo que para muchas sustancias y siempre que $\vec{E}$ no sea muy intenso.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

↓
susceptibilidad electrica

esto caracteriza a los DIELECTRICOS LINEALES. $\vec{E}$ es el campo total.

Para estos dielectricos lineales

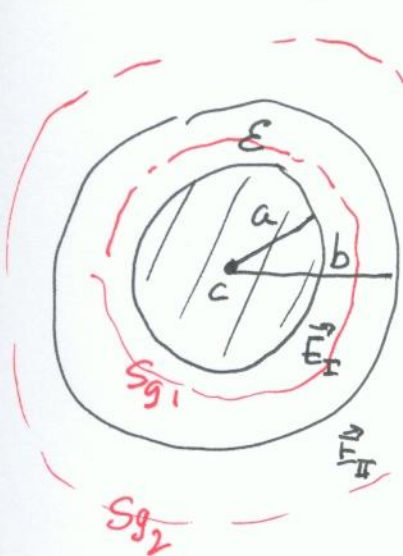
(23)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ es la permutividad absoluta del material.

ya $\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ se le llama permutividad relativa del material

Ejemplo 1: Esfera ^{metal} de radio a cargada con Q y rodeada por una capa espesa de radio exterior b de un dielectrico ϵ .
Calcular el potencial en el centro (en realidad el potencial de la esfera).



$$V_c = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_I \cdot d\vec{r} + \int_b^\infty \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r}$$

campo en la zona I $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$ con

$$\int_{Sg_1} \vec{D}_I \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \vec{D}_I = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad (a < r < b) \text{ luego}$$

$$\vec{E}_I = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{u}_r$$

y el campo en la zona II: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$ con $\int_{Sg_2} \vec{D}_{II} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \vec{D}_{II} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r$ $r > b$

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

por tanto,

$$V_c = \int_a^b \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr + \int_b^\infty \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right)$$

Por otro lado

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e \cdot Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{u}_r = P_r \vec{u}_r + 0 P_\theta + 0 P_\phi$$

(24)

y además puede verse que

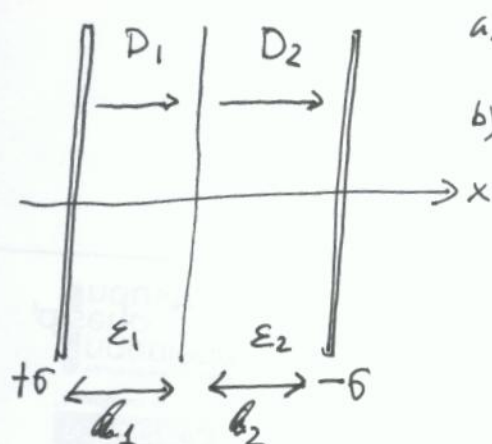
$$\oint_P \vec{P} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon} \right) = 0$$

no hay
carga ligada
en el interior

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \begin{cases} - \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon a^2} & \text{en } r=a \\ + \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon b^2} & \text{en } r=b \end{cases}$$

Nota: Ya que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ parece que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
sin embargo esto no es cierto solo si el dielectrico
llena todo el espacio y χ_e sea constante de verdad.
Porque en la frontera entre dos dielectricos con distinta χ_e
 $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \times (\chi_e \vec{E})$ con χ_e variable de un medio a otro.
por lo que $\vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$ en algunos sitios.

Ejemplo 2: Condensador con dielectrico compuesto.



a) $D_1 = D_2 = \sigma$

b) $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$ y $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_2}$

c) $P_1 = \epsilon_0 \chi_e E_1 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 = \sigma \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) = \sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$

$P_2 = \sigma \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right) = \sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$

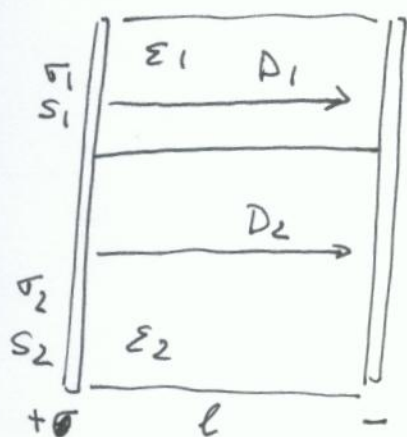
d) $V_+ - V_- = \int_+^- E dx = \int_a^b E_1 dx + \int_b^a E_2 dx = \frac{\sigma}{\epsilon_1} l_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_2} l_2$

Comentarios al problema

(26)

El campo $\vec{E}$ o $\vec{D}$ en las zonas I y II se compone de la superposición de los campos de las dos placas. Como estas son de área infinita, podemos suponer que el teorema de Gauss se puede aplicar a un cilindro que atraviese las placas como si estuviese en el vacío para $\vec{D}$ al que solo le afectan las cargas libres. En cambio para $\vec{E}$ hay que tener en cuenta la carga encerrada en la gaussiana tanto libre como ligada. Como se ve, el uso de D simplifica mucho aunque se pierde información sobre las cargas ligadas.

Ejemplo-3 Otro condensador con dieléctricos compuestos



$$D_1 = \sigma_1 \quad D_2 = \sigma_2$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$$

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_+^- \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = E_1 \cdot l = E_2 \cdot l$$

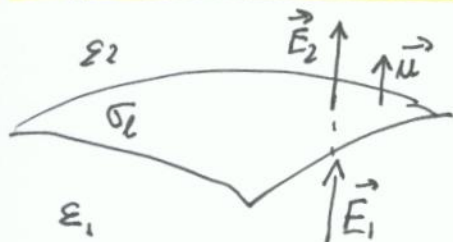
$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{E_1 l} = \frac{\sigma_1 S_1}{E_1 l} + \frac{\sigma_2 S_2}{E_2 l} =$$

$$= \frac{\epsilon_1 S_1}{l} + \frac{\epsilon_2 S_2}{l} = C_1 + C_2$$

Nota: Se supone que en la interfaz no hay cargas de polarización ligadas aunque esto es solo una aproximación.

Ejercicios 4.20 y 4.21 Griffiths

2.5) CONDICIONES DE CONTORNO CON DIELECTRICOS LINEALES (27)



$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_L$$

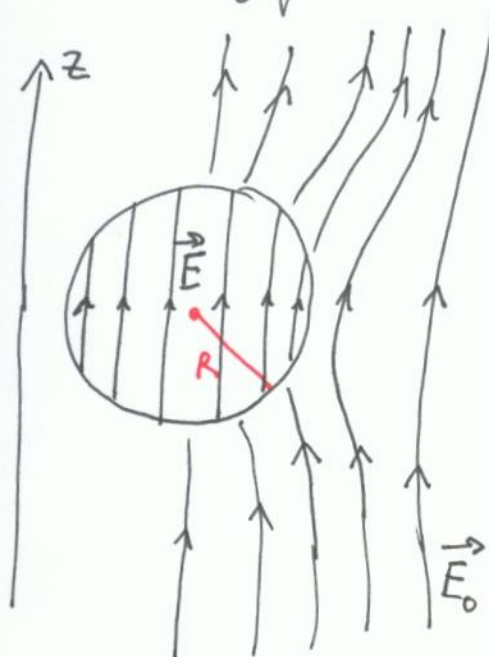
$$(D_{2n} - D_{1n} = \sigma_L)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\sigma_L$$

$$V_2 = V_1 \text{ (continuidad)}$$

Todo calculado en puntos de la superficie de separación o interfaz.

Ejemplo 1: Esfera dieléctrica homogénea colocada en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$. Campo eléctrico dentro de la esfera.



$$V_{in} = V_{out} \text{ en } r = R$$

$$\epsilon \frac{\partial V_{in}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r} \text{ en } r = R$$

$$V_{out} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad r \gg R$$

(campo inalterado)

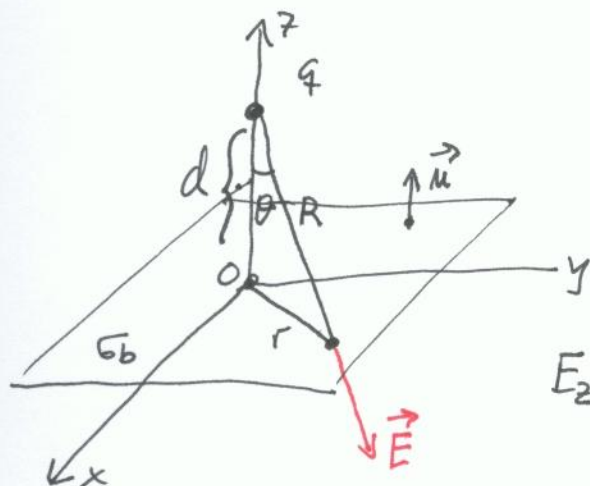
Sol: $\vec{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (r < R)$

(UNIFORME)

REFLEXIONES

- 1) una vez que sustituimos el dieléctrico por sus cargas de polarización la permitividad a emplear es ϵ_0
- 2) $\vec{E}$ es conservativo en electrostática, en cambio $\vec{D}$ no lo es puesto que depende de la polarización $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ($\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$)

Ejemplo 2: Carga q a una distancia d sobre un semiespacio
 (Example 4.8) relleno con material dielectrico χ_e . Calcular la fuerza
 sobre la carga.



Sobre el plano xy se inducen cargas
 ligadas de signo opuesto

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

$$E_z = E_z^q + E_z^{\sigma_b} = -\frac{kq}{r^2 + d^2} \cos\theta - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0}$$

por tanto $\sigma_b = \epsilon_0 \chi_e \left(-\frac{kq d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right) \Rightarrow \sigma_b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\chi_e}{2 + \chi_e} \right) \cdot \frac{q d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$
 $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

la carga total ligada.

$$q_b = \int_0^\infty \sigma_b(r) \cdot 2\pi r dr = -\frac{\chi_e q d}{2 + \chi_e} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} dr =$$

$$= +\frac{\chi_e q d}{2 + \chi_e} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right]_0^\infty = -\frac{\chi_e q d}{2 + \chi_e} \cdot \frac{1}{d} =$$

$$= -\left(\frac{\chi_e}{2 + \chi_e} \right) q$$

Si fuera un plano conductor. $\chi_e \rightarrow \infty$
 y $q_b = -q$ (carga inducida)

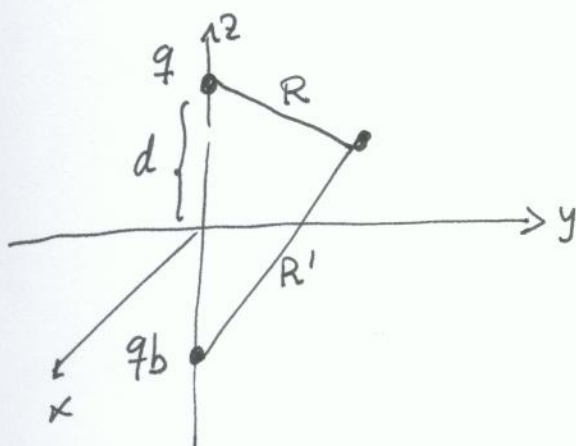
y el campo eléctrico en la posición de la carga
 debido a esta carga ligada está dada por $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b}{R^2} \vec{u}_R ds$

Sin embargo podemos emplear el método de las **IMAGENES**
 situando la carga q_b en la posición imagen $(0,0,-d)$ eliminando
 el dielectrico con esta operación. Con ello se puede calcular el
 campo y potencial para $z > 0$. Si en cambio ponemos la carga q_b
 junto a q en $(0,0,d)$ se puede calcular el campo y potencial
 para $z < 0$

En resumen,

(29)

$$\text{Si } z > 0 \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{qb}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$



El potencial satisface la ec. de Poisson

$$\nabla^2 V = 0 \quad z > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{kqx}{R^{3/2}} - \frac{kqb x}{R'^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{kq}{R^{3/2}} + \frac{3kqx^2}{R^{5/2}} - \frac{kqb}{R'^{3/2}} + \frac{3kqb x^2}{R'^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{kq}{R^{3/2}} + \frac{3kq y^2}{R^{5/2}} - \frac{kqb}{R'^{3/2}} + \frac{3kqb y^2}{R'^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{kq}{R^{3/2}} + \frac{3kq(z-d)^2}{R^{5/2}} - \frac{kqb}{R'^{3/2}} + \frac{3kqb(z+d)^2}{R'^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

y además se verifica la condición de contorno en la frontera* (plano x, y) ya que para $z < 0$ hay que colocar la carga qb junto a q

$$\text{Si } z < 0 \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q+qb}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right]$$

*y también la continuidad del potencial en $z=0$

En efecto: ha de verificarse que $\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^+} - \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = -\sigma_b$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^+} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{kq(z-d)}{R^{3/2}} - \frac{kqb(z+d)}{R'^{3/2}} \right]_{z=0^+} = \frac{kqd}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{kqbd}{(r^2+d^2)^{3/2}} \\ &= \frac{kd}{(r^2+d^2)^{3/2}} (q - qb) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} \cdot (q - qb) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(q+qb)(z-d)}{R^{3/2}} \right]_{z=0^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q+qb)d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

de donde

(30)

$$\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} (q-q_b) - \frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} (q+q_b) =$$

$$= \frac{d}{4\pi(r^2+d^2)^{3/2}} [(q-q_b) - (q+q_b)] = \frac{-2q_b d}{4\pi(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\chi_e q d}{(2+\chi_e) 4\pi(r^2+d^2)^{3/2}} - \sigma_b$$

Por tanto la solución encontrada satisface la ecuación COR en los dos semiespacios $z > 0$ y $z < 0$ y además verifica la condición de frontera en el plano $xy \Rightarrow$ por el teorema de unicidad esta es la solución al problema.

Nota: NUNCA COLOCAR UNA CARGA IMAGEN EN LA REGION DONDE SE HA DE EVALUAR EL POTENCIAL.

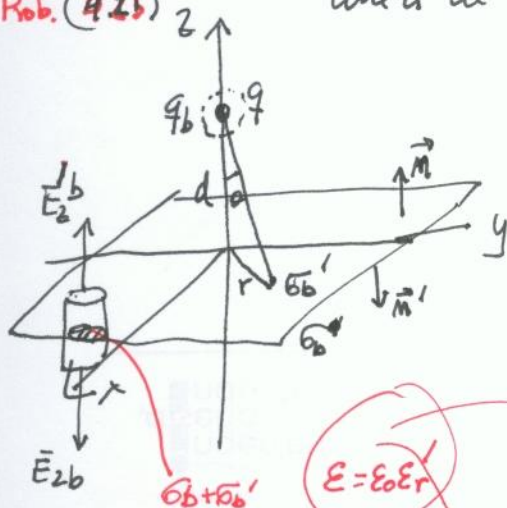
El resultado final del problema es que la fuerza sobre la carga q es debida exclusivamente a la carga imagen q_b colocada en $z < 0$

y vale

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_b}{(2d)^2} \vec{u}_k = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\chi_e}{2+\chi_e} \right) \frac{q^2}{4d^2} \vec{u}_k$$

Ejemplo-3: Ahora la región $z > 0$ está llena de un dielectrico con susceptibilidad χ_e' . Potencial en cualquier parte

Rob. (425)



$$\sigma_b' = \vec{P} \cdot \vec{n}' = -\epsilon_0 \chi_e' E_z' \quad (\text{en la cara superior de la interfaz})$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \chi_e E_z \quad (\text{en la cara inferior de la interfaz})$$

$$E_z' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d}{(r^2+d^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_b + \sigma_b'}{2\epsilon_0} E_{z'b}$$

$$E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b + \sigma_b'}{2\epsilon_0} E_{z'b}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Temase en cuenta que son dos dielectricos y una interfaz de separación con lo que a ambos lados de la interfaz habrá diferente densidad de carga superficial de polarización σ_b y σ_b'

resolviendo para σ_b y σ_b' se encuentra que:

(31)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= -\epsilon_0 \chi_e \left[\frac{q d / \epsilon_r'}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_b + \sigma_b'}{2\epsilon_0} \right] \\ \sigma_b' &= -\epsilon_0 \chi_e' \left[\frac{q d / \epsilon_r'}{4\pi \epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_b + \sigma_b'}{2\epsilon_0} \right] \end{aligned} \right\} \text{ Sistema de ECS en } \sigma_b \text{ y } \sigma_b'$$

y a partir de estas expresiones

$$\frac{\sigma_b'}{\chi_e'} - \frac{\sigma_b}{\chi_e} = \frac{1}{2\pi} \frac{q d / \epsilon_r'}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \Rightarrow \sigma_b' = \chi_e' \left[\frac{\sigma_b}{\chi_e} + \frac{1}{2\pi} \frac{q d / \epsilon_r'}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

y resolviendo finalmente se encuentra que

$$\sigma_b = \frac{-q d}{4\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \frac{\chi_e}{\left(1 + \frac{\chi_e + \chi_e'}{2}\right)}$$

$$\sigma_b' = \frac{q d}{4\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \frac{\epsilon_r \chi_e' / \epsilon_r'}{\left(1 + \frac{\chi_e + \chi_e'}{2}\right)}$$

La carga (dens.) total en la interfaz es $\sigma_t = \sigma_b + \sigma_b' = \frac{q d}{4\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \frac{(\chi_e' - \chi_e)}{\epsilon_r' \left(1 + \frac{\chi_e + \chi_e'}{2}\right)}$

y la carga total sobre la interfaz

$$q_t = \int_S \sigma_t \cdot dS = \frac{(\chi_e' - \chi_e) \cdot q}{2\epsilon_r' \left(1 + \frac{\chi_e + \chi_e'}{2}\right)} = \left(\frac{\epsilon_r' - \epsilon_r}{\epsilon_r' + \epsilon_r} \right) \cdot \frac{q}{\epsilon_r'}$$

y empleando el método de las imágenes, colocamos en $(0, 0, -d)$ una carga q_t ~~que~~ lo cual me permite calcular el potencial en cualquier punto $z > 0$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{q / \epsilon_r'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q_t}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (z > 0)$$

y para $z < 0$ ponemos q_t junto a q y evaluamos el potencial como si estuvieramos en el vacío.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q/\epsilon_r' + q_t}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \quad (\text{para } z < 0)$$

(32)

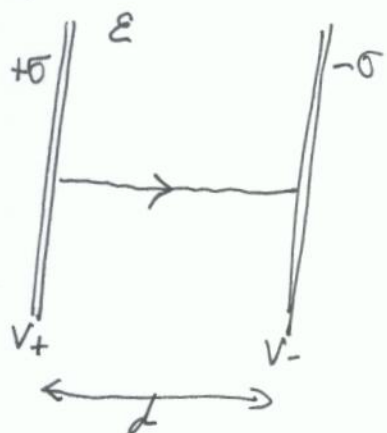
$$\text{ya que } \frac{q}{\epsilon_r'} + q_t = \frac{q}{\epsilon_r'} \left(1 + \frac{\epsilon_r' - \epsilon_r}{\epsilon_r' + \epsilon_r} \right) = \frac{2q}{\epsilon_r' + \epsilon_r}$$

2.6) ENERGIA EN PRESENCIA DE DIELECTRICOS

Para cargar un condensador se necesita gastar una energia de

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

En C va la constante dielectrica del medio. Por ejemplo por el condensador plano



$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} d\vec{l} = \frac{\sigma d}{\epsilon} = \frac{Q \cdot d}{S \epsilon}$$

y portanto

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{Q}{Q \cdot d / S \cdot \epsilon} = \epsilon \cdot \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

Ya que la capacidad es ϵ_r veces mayor con dielectrico, la energia necesaria se incrementa en el mismo factor. Ademàs segùn x oio', la energia para establecer un sistema de conductores con sus potenciales finales y coras se encuentra que

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E} \cdot \vec{E} \, d\sigma \quad (\text{vase' pag 10 reverso})$$

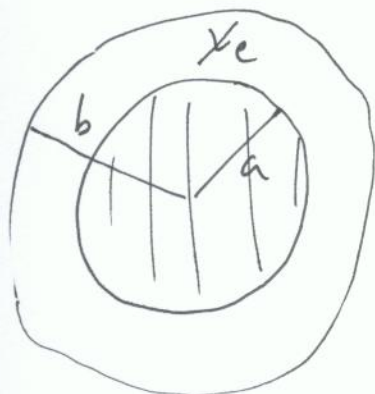
como ahora hay que incrementar $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E} \cdot \vec{E} \, d\sigma = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\sigma$$

Ejemplo 1

(Problem 4.26) Esfera conductora de radio a rodeada de un dielectrico de radio exterior b y χ_e . Energia de la esfera tiene carga Q

(33)



$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r & r > a \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{u}_r & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & r > b \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{2} \int_a^b \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \int_b^\infty \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

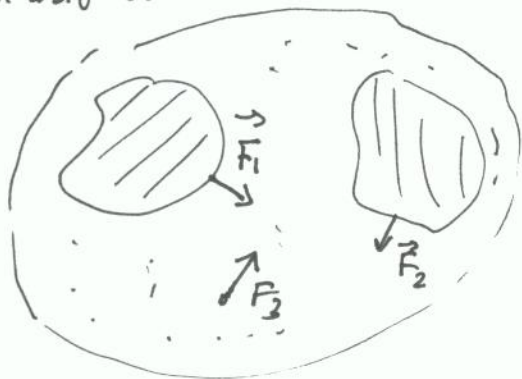
$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0} \int_b^\infty \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr + \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \right]$$

$$\text{con } \epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

2.7) FUERZAS SOBRE DIELECTRICOS Y CONDUCTORES

En un sistema de conductores y dieléctricos, estas se encuentran sometidos a fuerzas que dependen del estado eléctrico del sistema. Sobre cada parte del sistema actúan unas fuerzas (internas) debidas al resto del sistema. ^{externa}



$$dW_n = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$dW_n = \underbrace{\sum_i -dU_i}_{-dW} + \underbrace{\sum_j \vec{F}_j^{NC} \cdot d\vec{r}_j}_{dW^{NC}}$$

Igualando las dos expresiones

$$\sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dW_{INT} + dW_{EXT}$$

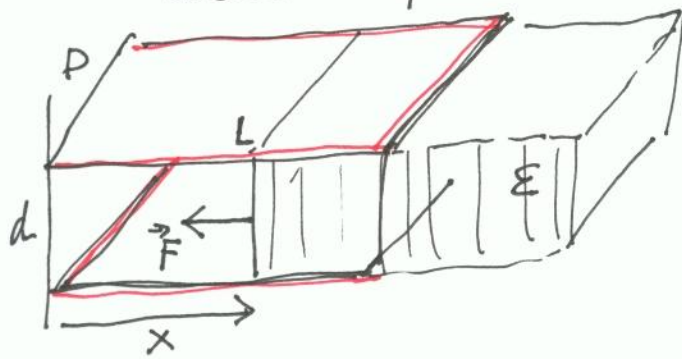
que establece el balance energético en un proceso infinitesimal. Si un elemento del sistema, sea conductor o dieléctrico, se desplaza $d\vec{r}$ por la acción que las fuerzas

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dW_{INT} + dW_{EXT}$$

las fuerzas externas realizan un trabajo dW_{EXT} que compensa la pérdida de energía interna $-dW_{INT}$. En caso de que el sistema de conductores esté aislado $dW_{EXT} = 0$ y se tendrá:

que
$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dW_{INT}$$

Ejemplo 1: Condensador plano aislado con carga Q , y un dieléctrico parcialmente introducido entre las placas



$$F = - \frac{dW_{INT}}{dx} \Big|_Q$$

$$\text{donde } W_{INT} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La capacidad del condensador es

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 D x}{d} + \frac{\epsilon D(L-x)}{d}$$

con lo que $\frac{dW_{INT}}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \left(\frac{\epsilon_0 D}{d} - \frac{\epsilon D}{d} \right)$

y finalmente $F = -\frac{dW_{INT}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{V^2 D}{d} (\epsilon_0 - \epsilon) = \frac{1}{2} \frac{V^2 D}{d} \epsilon_0 (1 - \epsilon_r)$

$$F = -\frac{D}{2d} V^2 \epsilon_0 \chi_e$$

que reduce a introducir el dieléctrico en el condensador pues ello hace disminuir la W_{INT} ($C \uparrow$ con ϵ)

Ejemplo 2: El mismo sistema anterior pero ahora las placas están conectadas a una batería que mantiene V constante

Ahora ya no se trata de un sistema aislado. Las baterías hacen Trabajo para mantener V constante aumentando la carga de las placas por lo que

$$dW_{ext} = V \cdot dQ \quad \begin{matrix} \uparrow \\ C = \frac{Q}{V} \end{matrix} = V^2 dC$$

$$dW_{int} = \frac{1}{2} V^2 dC$$

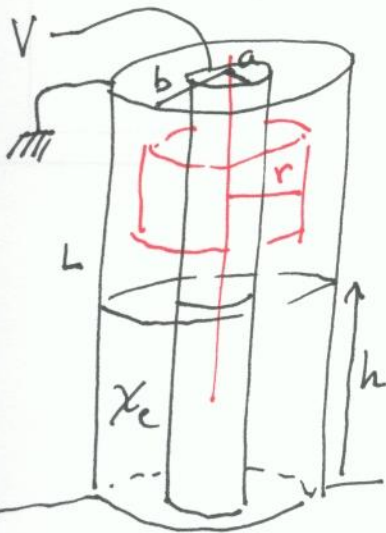
de modo que $F \cdot dx = -\frac{1}{2} V^2 dC + V^2 dC = \frac{1}{2} V^2 dC \Rightarrow F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$

con $\frac{dC}{dx} = \frac{\epsilon_0 D}{d} - \frac{\epsilon D}{d} = (\epsilon_0 - \epsilon) \cdot \frac{D}{d}$

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{D}{d} \epsilon_0 (1 - \epsilon_r) = -\frac{D}{2d} V^2 \epsilon_0 \chi_e$$

mismo resultado de antes.

Ejemplo 3 Condensador cilíndrico de radios a y b y un dieléctrico líquido de densidad ρ y χ_e . Si el potencial es V hasta qué altura subirá el líquido?



EQUILIBRIO: $F_e = F_g$

sumando $F_e = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dh}$

$F_g = \text{Vol} \cdot \rho \cdot g = \pi(b^2 - a^2) \rho h g$

por tanto todo se reduce a calcular $\frac{dC}{dh}$ o bien la capacidad del conjunto.

Supongamos una longitud L de condensador. La capacidad de un condensador cilíndrico de longitud l con densidades de carga $+\sigma$ y $-\sigma$ superficial vale (en el vacío)

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot 2\pi a \cdot l}{\frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \\ E \cdot 2\pi r l = \frac{\sigma \cdot 2\pi a l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln b/a}$$

En nuestro caso la capacidad total es la suma de $C = C_1 + C_2$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 (L-h)}{\ln b/a} + \frac{2\pi \epsilon \chi_e h}{\ln b/a} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln b/a} (L-h + \epsilon \chi_e h) = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln b/a} (L + h \chi_e)$$

por tanto $\frac{dC}{dh} = \frac{2\pi \epsilon_0 \chi_e}{\ln b/a}$ y entonces

$$\frac{1}{2} V^2 \frac{2\pi \epsilon_0 \chi_e}{\ln b/a} = \pi(b^2 - a^2) \rho h \Rightarrow$$

$$h = \frac{\epsilon_0 \chi_e V^2}{\rho(b^2 - a^2) g \ln b/a}$$