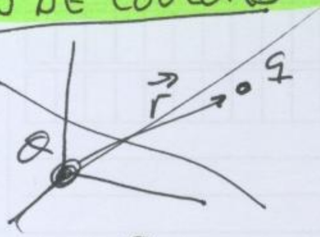
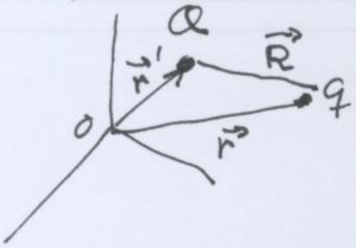
1- ELECTROSTATICA EN EL VACIO

1-1) LEY DE COULOMB



$$\cancel{\vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec u_r}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$$



$$\vec F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\vec u_R \qquad \vec R = \underbrace{\vec r}_{\text{P.CAMPO}} - \underbrace{\vec r\,'}_{\text{P. FUENTE}}$$

PROP.

1) P.PO. DE SUPERPOSICION

$$\vec F = \sum_i \vec F_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ_i}{R_i^2}\vec u_{R_i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i \frac{Q_i\cdot\vec u_{R_i}}{R_i^2}$$

2) $\vec F$ es conservativo. $\nabla\times\vec F = 0$. probar.

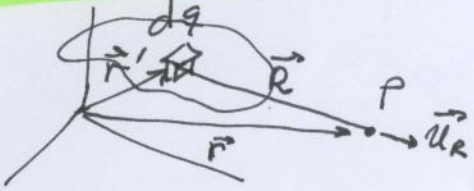
1-2) CAMPO ELECTRICO. $\vec E = \frac{\vec F}{q}$

Para sistema de cargas. $\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i\cdot\vec u_{R_i}}{R_i^2}$ con $\vec R_i = \vec r - \vec r_i$

(REPRESENTACION POR LINEAS DE CAMPO)

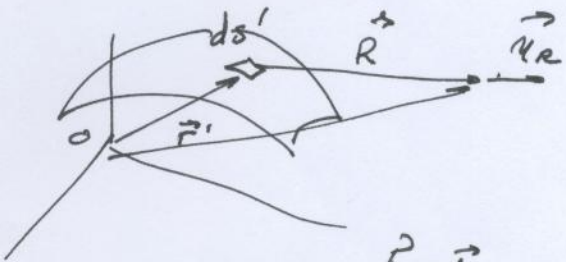
1-3) DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{R^2}\vec u_r$$

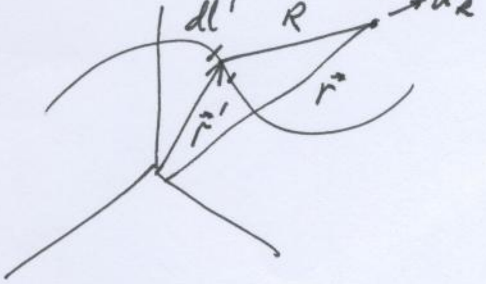


para superficies y hilos y volumenes

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec r\,')\,dv'}{R^2}\vec u_R$$



$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec r\,')\,ds'}{R^2}\vec u_R$$



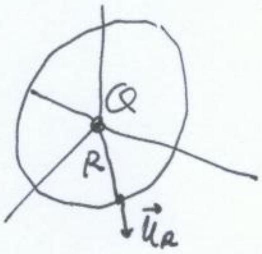
$$E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(\vec r\,').dl'}{R^2}\vec u_r$$

EJEMPLOS: - - ---

1-4) TEOREMA DE GAUSS : DIVERGENCIA DE $\vec{E}$

FLUJO DE $\vec{E}$: $\phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ = nº de líneas de campo que atraviesan S

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_{\text{ESFERA}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\vec{u}_R \cdot dS \cdot \vec{u}_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Este resultado para la esfera es válido para cualquier otra superficie que rodee a la carga Q

En general para cualquier distribución de carga

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q(S)}{\varepsilon_0}$$

Prop: 1) ya que $Q(S) = \int_V \rho\cdot dv \Rightarrow \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \Rightarrow$ T. de diverg.

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{E}\,dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Teorema de Gauss en forma diferencial.

2) A partir de $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{R^2}$ se puede probar que

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{u}_R}{R^2}\right)\cdot\rho(\vec{r}')dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V 4\pi\underbrace{\delta^3(\vec{R})}_{\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')}\rho(\vec{r}')dv' =$$

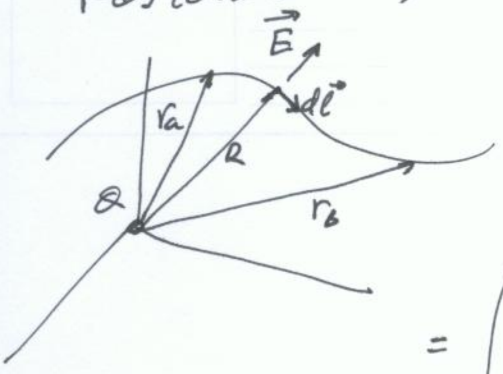
$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cancel{4\pi}\,\rho(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

APLICACIONES : Cálculo de campos eléctricos bajo condiciones de simetría: esfera, cilíndrica o pillbox para planos

EJEMPLOS : - - - -

1-5) EL ROTACIONAL DE $\vec{E}$.

Se comprueba por cálculo directo que $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ con $\vec{E}$ el producido por una carga puntual. (Ya se hizo para mostrar que $\vec{F}$ es conservativa). Para otra forma de verlo es calcular



$$\int_{r_a}^{r_b}\vec{E}\,d\vec{l}=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_R}{R^2}\cdot(dr\,\vec{u}_r+r\,d\theta\,\vec{u}_\theta)=$$

$$=\int_{r_a}^{r_b}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_a}^{r_b}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

Si lo aplico a un contorno cerrado

$$\oint\vec{E}\,d\vec{l}=0 \quad \text{siempre}$$

y por el T.ª de Stókes: $\oint\vec{E}\,d\vec{l}=\int_S\underset{\sim}{\vec{\nabla}\times\vec{E}}\cdot d\vec{S}=0\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=0}$

Para una distribución arbitraria de carga se aplica superposición y se encuentra que este resultado es de validez general.

1-6) POTENCIAL ELECTRICO

Ya que $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ siempre, esto indica que $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ con V cumpliendo $V(\vec{r})-V(\infty)=\int_{\vec{r}}^{\infty}\vec{E}\,d\vec{r}$ con $V(\infty)=0$ origen de potenciales

N. $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-V(r)\Big]_{r_a}^{r_b}=V(\bar{r}_a)-V(\bar{r}_b)$

Para una carga puntual en el origen.

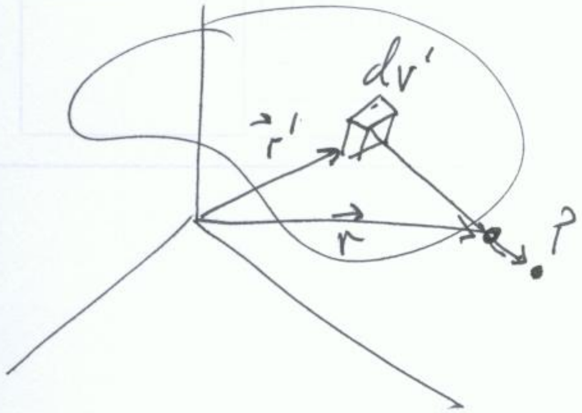
$$V(r)=\int_{\bar{r}}^{\infty}\frac{kq}{r^2}\vec{u}_r\cdot d\vec{r}=-\frac{kq}{r}\Big]_{\bar{r}}^{\infty}=\frac{kq}{r}$$

N: El trabajo hecho por la carga q para ir de $\vec{r}$ a ∞ es

$$W_{r\to\infty}=\int_{\bar{r}}^{\infty}\vec{F}\,d\vec{r}=q\int_{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}=q\cdot V(\vec{r})\Rightarrow\boxed{V(\vec{r})=\frac{W}{q}}$$

$>0\Rightarrow$ la carga nos da energía en su mov.

Si tenemos una distribución de carga, el potencial se calcula aplicando el ppo. de superposición.



$$V(\vec r) = \sum_i \frac{k q_i}{r_i} \to \int_{V'} \frac{k\,dq}{r} \equiv \int_{V'} \frac{k\rho(\vec r\,')dv'}{r}$$

Ejemplos: 1) Varilla finita.
2) hilo infinito. (dif de pot.)
- - -

El potencial cumple una ec. diferencial deducida a partir de la ley de Gauss

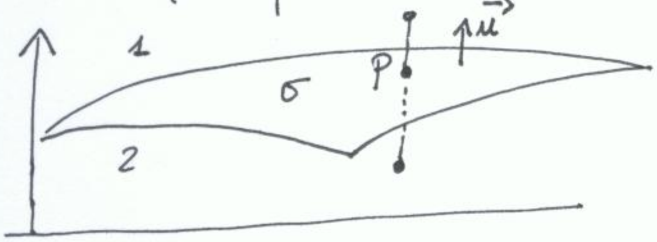
$$\vec\nabla \vec E = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0} \underset{\vec E = -\vec\nabla V}{\Longrightarrow} \vec\nabla(-\vec\nabla V) = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\vec\nabla^2 V = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$$

o bien en su más conocida forma

$$\boxed{\vec\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}}$$ Ec. de Poisson

que junto a condiciones de frontera para V permiten encontrar el potencial $V(\vec r)$ en todo el dominio.

Nota: Dada una superficie cargada con densidad σ uniforme que separa dos medios



$$\vec E_1 - \vec E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec u \quad \text{en el punto P}$$

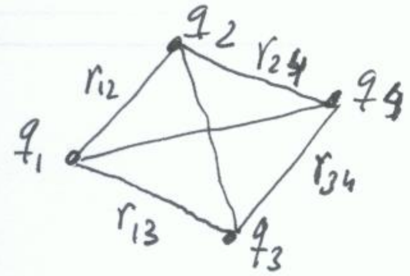
$$V_1 = V_2$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_1 - \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \left(\vec\nabla V \cdot \vec n = \frac{\partial V}{\partial n}\right)$$

El campo es discontinuo pero no el potencial.

1-7) TRABAJO Y ENERGIA

Para formar una distribución de cargas puntuales, partimos de una carga inicial q_1 y vamos trayendo desde el infinito todas las demás cargas una a una hasta formar la distribución.



$$W_1 = \int_{\infty}^{r_{q_2}} q_2 \cdot \vec{E}\, d\vec{r} = -q_2 \cdot V_2 = -q_2 \cdot \frac{k q_1}{r_{12}}$$

el signo (-) viene de que debemos hacer trabajo contra las fuerzas

$$W_2 = -q_3 \cdot V_3 = -q_3 \left(\frac{k q_1}{r_{13}} + \frac{k q_2}{r_{23}} \right)$$

$$W_3 = -q_4 \cdot V_4 = -q_4 \left(\frac{k q_1}{r_{14}} + k\frac{q_2}{r_{24}} + k\frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

La energía gastada en formar la distribución es $W_T = W_1 + W_2 + W_3$

$$W = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + k\frac{q_2 q_4}{r_{24}} + k\frac{q_3 q_4}{r_{34}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot V_i$$

donde V_i es el potencial generado en la posición de la carga q_i sin la contribución de la propia carga.

Para una distribución

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho \cdot V \cdot dv$$

Ejemplo: Distribución esférica de carga uniforme de radio R $\quad W = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

FORMULA ALTERNATIVA

$$\vec{\nabla}(\vec{E} \cdot V) = V\, \vec{\nabla}\vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho V dv = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho V dv = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E} \cdot V \cdot dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{\nabla}(\vec{E} \cdot V) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V\right) dv$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{S_\infty} \underbrace{\vec{E} \cdot V \cdot d\vec{S}}_{\sim \frac{1}{r}} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 dv \equiv \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}^2 dv}$$

LA ENERGIA NO CUMPLE EL PPO. DE SUPERPOSICION.

1-8) CONDUCTORES

Material en cuyo interior $\vec{E}=0$

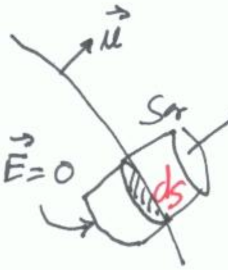
prop.: 1) Si tiene carga, está en su superficie repartida de modo que $\vec{E}=0$

2) La superficie del conductor es equipotencial.

$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=0 \Rightarrow V\equiv cte.$ pero depende de cómo se distribuyen las cargas en su superficie.

3) El campo en la superficie del conductor es perpendicular a ella y de valor $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

este campo es la suma del producido por dS y el producido por el resto del conductor cargado
$\vec{E}=\vec{E}(dS)+\vec{E}(resto)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (fuera), $=0$ (dentro)



$$\int_{S_g}\vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,dS=\frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

4) PRESION ELECTROSTATICA: Cada elemento dS de superficie del conductor está sometido a una fuerza que vale

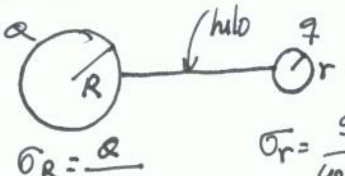
$$F=\sigma dS\cdot E_{ds}$$

donde E_{ds} es el campo que crea el resto de superficie del conductor, excepto dS, sobre dS. Este campo se calcula teniendo en cuenta que la suma de E_{ds} y el campo producido por la propia dS se anula en el interior. y que el campo producido por dS aislado vale $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

~~OJO: No es lo mismo el campo eléctrico en las proximidades de un conductor que el campo EN EL CONDUCTOR~~ | www.sc.ehu.es
~~E_s: Esfera conductora~~

por tanto $E_{ds}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ y la presión $P=\frac{F}{dS}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Consecuencia: La presión sobre las cargas superficiales es tanto mayor cuanto menor sea el radio local..



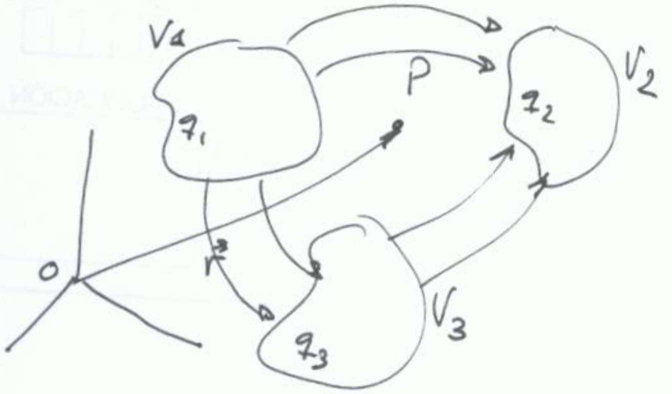
$V_R=\frac{KQ}{R}$, $V_r=\frac{Kq}{r}$

$\sigma_R=\frac{Q}{4\pi R^2}$ $\sigma_r=\frac{q}{4\pi r^2}$

$$\frac{P_R}{P_r}=\frac{\sigma_R^2}{\sigma_r^2}=\frac{Q^2/R^4}{q^2/r^4}=\frac{r^2}{R^2}$$

$$\boxed{P_r=\frac{R^2}{r^2}P_r}$$

5) Sistemas de conductores:



El potencial en P se calcula resolviendo la Ec. de Laplace e imponiendo que la superficie de los conductores sea equipot.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 V = 0 \\ V(\vec{r})\Big|_i = V_i \quad i = 1 \ldots N \end{cases}$$

Nótese que el método alternativo es el cálculo del potencial por el ppo. de superposición conocidas las distribuciones de carga $\sigma_i(\vec{r})\Big|_{\vec{r}_i}$ de cada conductor, lo cual depende de la disposición geométrica de ellos y eso es muy complicado.

Ejemplo: Esfera conductora de Radio R y carga Q. $V \equiv V(r,\theta,\varphi) \equiv V(r)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \\ &V(R) = V_R = \frac{kQ}{R} \\ &V(\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \quad V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

$$V(R) = -\frac{A}{R} + B \Rightarrow A = -R\cdot\frac{kQ}{R} = -kQ$$

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$$

por tanto el potencial para $r > R$ es $\boxed{V(r) = \frac{kQ}{r}}$

6) INFLUENCIA ELECTRICA: Como el potencial constante que adquiere un conductor depende de la distribución de carga en su superficie, cualquier causa que modifique esta distribución puede alterar el valor de su potencial. → INFLUENCIA ELECTRICA.

Ejemplo 1: Cascara esférica de radios R_1 y R_2 descargada.

a) Campo y potencial en todo punto de $\mathbb{R}^3$

b) Se coloca una esfera cargada metálica de radio $R_3 < R_1$ con una carga $+Q$. Campo y potencial en todo punto.

~~Este es un caso de~~ El potencial de la cascara se ve alterado por la presencia de la esfera

POLITÉCNICA "Ingeniamos el futuro"

escuela técnica superior de ingeniería y diseño industrial

1.er APELLIDO

2.º APELLIDO

NOMBRE

TITULACIÓN

ASIGNATURA

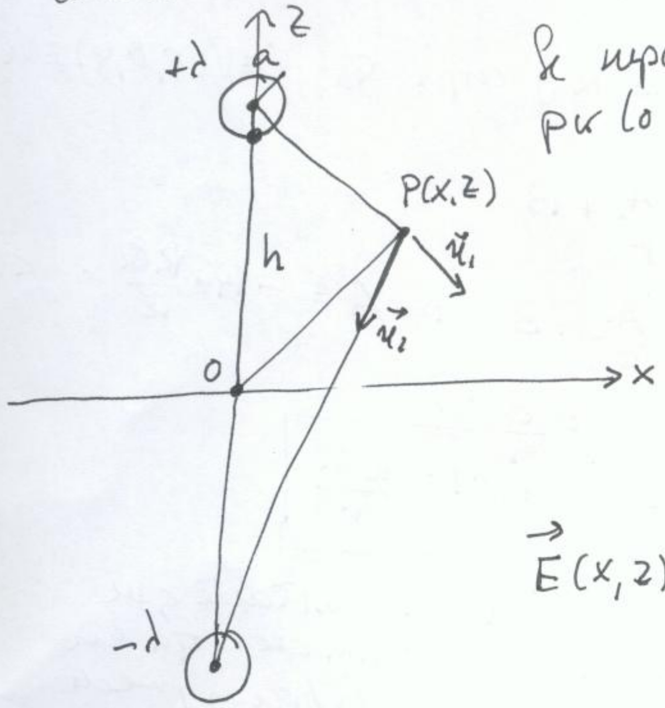
GRUPO FECHA

N.º DE MATRÍCULA

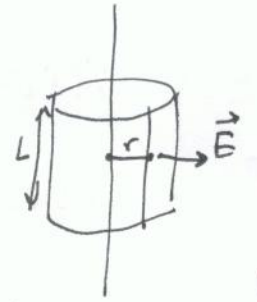
CALIFICACIÓN

Ejercicio:

Dos hilos conductores de radio a se encuentran a una altura h del plano XY y están cargados con densidad lineal de carga $\pm\lambda$ como indica la figura. Calcular el potencial en la superficie del conductor $+\lambda$.



Se supondrá la carga concentrada en el eje por lo que el campo en el punto x, z vale



$$\oint E\,dS = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \lambda \frac{L}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(x,z) = \frac{\lambda\,\vec{u}_1}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(h-z)^2}} + \frac{\lambda\,\vec{u}_2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(h+z)^2}}$$

En particular si $x=0$ $\cancel{V(x,z)=}$ $\vec{E}(z) = \left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(h-z)} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(h+z)}\right](-\vec{k})$

$$\cancel{V(z) = -\frac{dE}{dz} =} \quad V(z)-V(0) = \int_z^0 \vec{E}\,d\vec{z} = -\int_0^z \vec{E}\,d\vec{z} = \int_0^z \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h-z}+\frac{1}{h+z}\right)dz$$

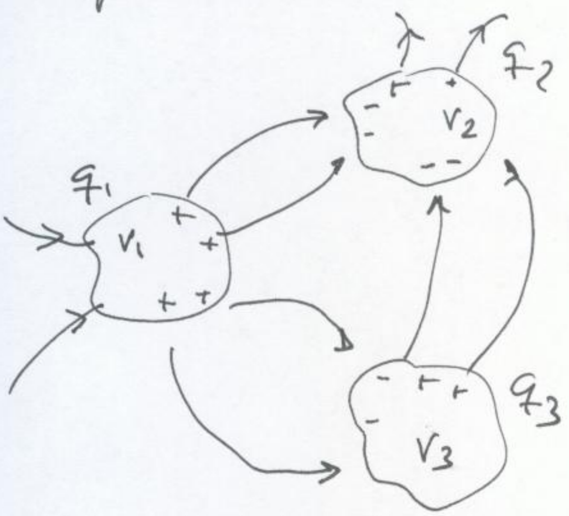
$$= \frac{+\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln (h+z)(h-z)\Big]_0^z = \frac{+\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(h^2+z^2)}{h-z}\Big]_0^z = \frac{+\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h^2+z^2}{h^2 z}$$

Si $z = h-a \Rightarrow V(z)-V(0) = \frac{+\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{[illegible]^2}{[illegible]} = \cancel{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2-(h^2-2ah+a^2)}{h^2}}$

$\frac{2h-a}{a} \approx \frac{2h}{a}$

$= \cancel{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2ah-a^2}{h^2}} \approx \cancel{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2a}{h}}$

Para un sistema de conductores, el potencial de cada uno depende de la carga de todos los demás incluida la del mismo.



$$V_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\, q_j$$ (medio electricam. lineal.)

con $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ y además la matriz (α) admite inversa, pudiéndose escribir

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j \qquad C_{ij} = C_{ji}$$

$$C_{ij} \begin{cases} i \neq j & \text{coef. de influencia} \\ i = j & \text{coef de capacitancia.} \end{cases}$$

Ejemplo 1:

$$V_1 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_I\, d\vec{r} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_{II}\, d\vec{r} =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ_1}{r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{k(Q_2+Q_1)}{r^2} dr =$$

$$\vec{E}_I = \frac{kQ_1}{r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{k(Q_2+Q_1)}{r^2} \quad (r > R_2)$$

$$= \left[-\frac{kQ_1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} + \left[-\frac{k(Q_1+Q_2)}{r}\right]_{R_3}^{\infty} =$$

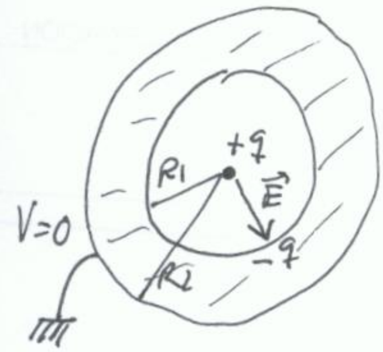
$$= \frac{kQ_1}{R_1} - \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{k(Q_1+Q_2)}{R_3} =$$

$$= kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{kQ_2}{R_3}$$

y $V_2 = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_{II}\, d\vec{r} = \frac{k}{R_3} Q_1 + \frac{k}{R_3} Q_2$

La ddp entre ambos conductores es $\boxed{V_1 - V_2 = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

Ejemplo 2) APANTALLAMIENTO



Desde el exterior la carga +q se apantalla y el campo eléctrico queda confinado al espacio ~~exterior~~ interior. Si desconecto de tierra la capa esférica, ésta queda cargada con −q pero se sitúa en la superficie interna.

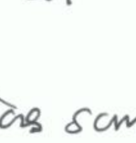
¿El potencial de un conductor, aumenta o disminuye por la presencia de otro conductor?
Depende de las cargas de los conductores y de su disposición geométrica.
Por el ejemplo de antes, $V_2(\infty) = \frac{K}{R_3} Q_2$ muestra que si ponemos el conductor 1 en el interior.

$$V_2 = \frac{K}{Q_3}(Q_2+Q_1) \quad (Q_2>0) \quad \begin{cases} V_2 > V_2(\infty) \text{ si } Q_1>0 \\ V_2 < V_2(\infty) \text{ si } Q_1<0 \\ V_2 = 0 \text{ si } Q_1 = -Q_2 \end{cases}$$

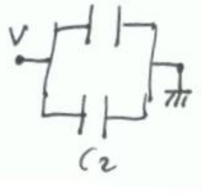
CONDENSADOR: Es un par de conductores sometidos a influencia electrostática de modo que el campo eléctrico queda confinado en un volumen finito. Los conductores tienen cargas iguales y opuestas Q y se define su capacitancia $C = \frac{Q}{V_1-V_2}$

N: Por extensión se define la capacitancia de un conductor aislado como $C = \frac{Q}{V_1}$ siendo Q su carga y V_1 su potencial constante.
Esto supone considerar al 2º conductor como rodeando al 1º y de radio infinito a $V_2=0$

Ejemplos: 1) Condensador esférico
2) Condens. cilíndrico
3) Condens. plano.

Prop.: 1) Asociación de condensadores 

- serie
- paralelo



$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad \left| \quad \begin{matrix} Q = Q_1 + Q_2 \\ C_T \cdot V = C_1 V_1 + C_2 V_2 \\ V_1 = V_2 = V \end{matrix} \right\} \boxed{C_T = C_1 + C_2}$$

7) ENERGIA DE UN SISTEMA DE CONDUCTORES EN INTERACCION

La energía guardada en cargar un conductor aislado es

$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv = \frac{1}{2} V \int_v \rho dv = \frac{1}{2} Q \cdot V$$

$$\int_S \sigma dS = Q$$

(*) reverso

la cual se almacena en el espacio ya que $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} E^2 dv$ y por tanto hay una densidad de energía $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Si tenemos dos conductores en interacción mutua, con una carga $+q$ y $-q$ y una ddp $V = V_1 - V_2$, el trabajo hecho para transportar la carga dq de uno a otro conductor es

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq \Rightarrow W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q \cdot V$$

esta es la energía almacenada por un condensador.

Ejemplo: Para el condensador esférico $V_1 - V_2 = kQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$ y la energía almacenada vale

$$W = \frac{1}{2} Q^2 k \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Esto también se puede calcular por $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2 dv$. Ya que E se limita al espacio entre las esferas. y vale $E = \frac{kQ}{r^2}$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{k^2 Q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\varepsilon_0 Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{cqp}$$

Para un sistema de conductores interaccionantes con cargas Q_i a potenciales V_i la energía almacenada vale $W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$ (*)(ver reverso)

1.er APELLIDO

2.º APELLIDO

NOMBRE

TITULACIÓN

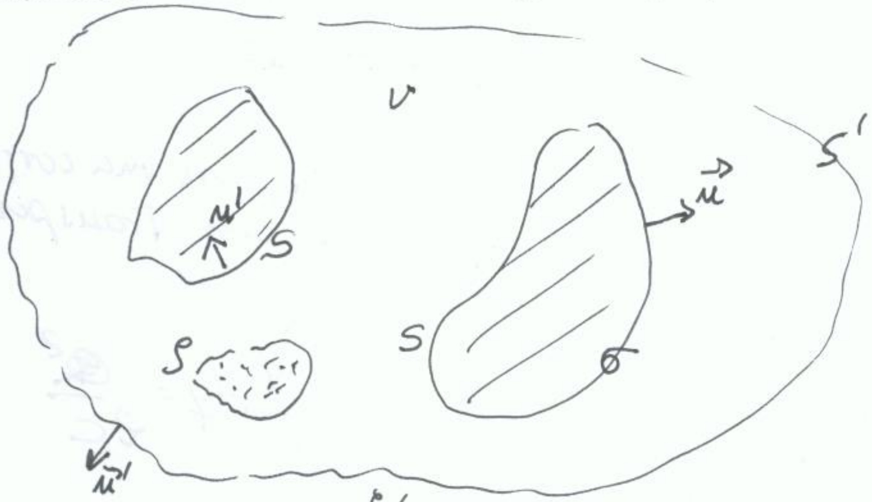
ASIGNATURA

GRUPO FECHA

N.º DE MATRÍCULA

CALIFICACIÓN

Sistema de conductores y energía



CONDUCTORES
y DISTRIBUCIONES
DE CARGA

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2\cancel{\varepsilon_0}} \iiint_V V \underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0} dv + \frac{\varepsilon_0}{2\cancel{\varepsilon_0}} \oiint_S V \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{u}}_{\sigma/\varepsilon_0} dS$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \left(\vec{\nabla}(V\cdot\vec{E}) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V\right) dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_S V\cdot\vec{E}\cdot\vec{u}\, dS.$$

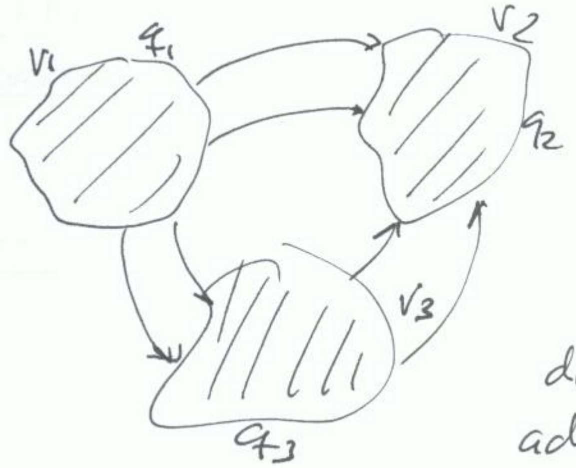
$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \vec{\nabla}(V\cdot\vec{E})\, dv - \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_S V\cdot\vec{E}\vec{u}\, dS$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_S V\cdot\vec{E}\vec{u}'\, dS + \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_{S'} V\cdot\vec{E}\cdot\vec{u}'\, dS}_{\text{Se anula si } S'\to\infty} - \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \vec{E}\,\vec{\nabla}V dv + \overbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_S V\vec{E}\vec{u}\, dS}^{0}$$

Se anula si $S' \to \infty$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{R3} \vec{E}\cdot(-\vec{\nabla}V)\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{R3} \vec{E}^2 dv$$

Para un sistema de conductores arbitrario, la energía vale



$$W = \frac{1}{2}\int_v \rho V dv =$$

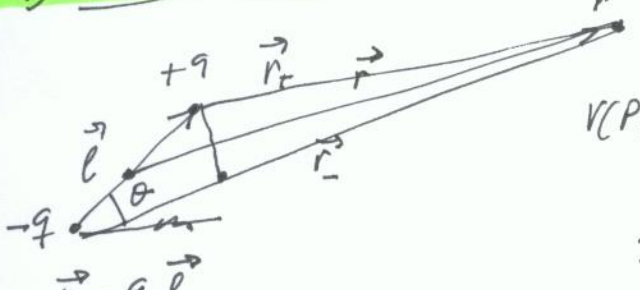
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} Q_i V_i$$

donde V_i son los potenciales finales que adquieren los conductores para formar el sistema. y que son diferentes de los potenciales $V_i(\infty)$ que tienen cuando están aislados.

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i(\infty)}_{\text{energía para cargar los conductores en el infinito.}} + \underbrace{W_{\infty \to FINAL}}_{\text{Trabajo para colocarlos en sus posiciones finales}}$$

con $V_i(\infty)$ los potenciales iniciales

1-9) DIPOLO ELECTRICO

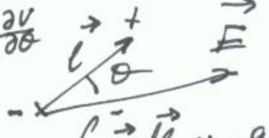


$\vec{p} = q.\vec{l}$

$$V(P) = V_+ + V_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = \frac{kq(r_- - r_+)}{r_+ r_-} \simeq$$

$$\simeq \frac{kq\, l\cos\theta}{r^2} \equiv \frac{k\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

El campo eléctrico se encuentra $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$ $\quad |\vec{E}|^2 = \frac{k^2 p^2 (1+3\cos^2\theta)}{r^6}$



$\underline{N}$: Cuando un dipolo se encuentra en un campo externo $\vec{E}$ su energía potencial vale $E_p = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E} \equiv q\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} \simeq -q\vec{E}\cdot\vec{l} =$
$= -\vec{p}\cdot\vec{E}$

Ejercicio: A partir de $V(P) = V(r,\theta) = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{kp\,\text{sen}\,\theta}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

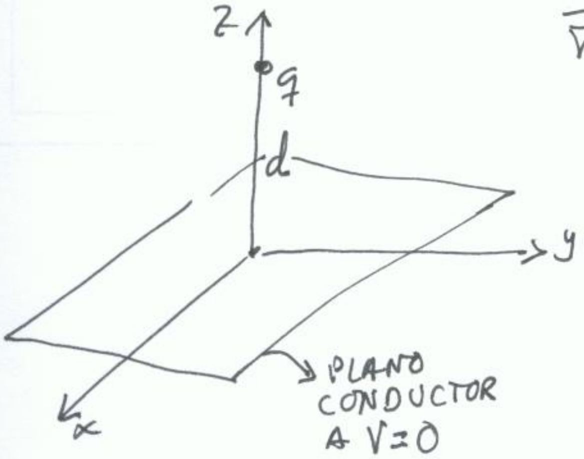
$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{kp}{r^3}(2\cos\theta\, \vec{u}_r + \text{sen}\,\theta\, \vec{u}_\theta)}$$

probar que

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{k}{r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{u}_r - \vec{p}\right)$$

1-10) METODOS ESPECIALES: IMAGENES

Se aplica a situaciones en las que tenemos cargas inducidas por otras cargas presentes. Ejemplo

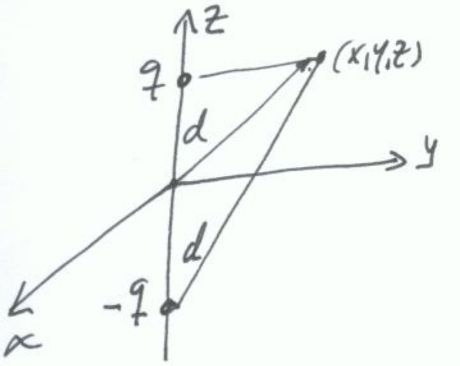


$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\overbrace{\rho(\vec{r})}^{q\delta(z-d)}}{\varepsilon_0} \quad z>0 \quad \rightarrow \text{EC. DE POISSON/LAPLACE}$$

$$\left.\begin{array}{l} V(z=0) = V_0 = 0 \\ V(z\to\infty) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{CONDICIONES DE CONTORNO}$$

Cualquier función V, obtenida por el procedimiento que sea, que cumpla esto es la solución → TEOREMA DE UNICIDAD

El problema es equivalente a (para $z \geq 0$)



$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

$$V(z=0) = 0$$

$$V(z\to\infty) = 0$$

Calculemos la carga inducida en la superficie conductora

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \equiv -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q(z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right]$$

$$\sigma(x,y) = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

La carga total vale

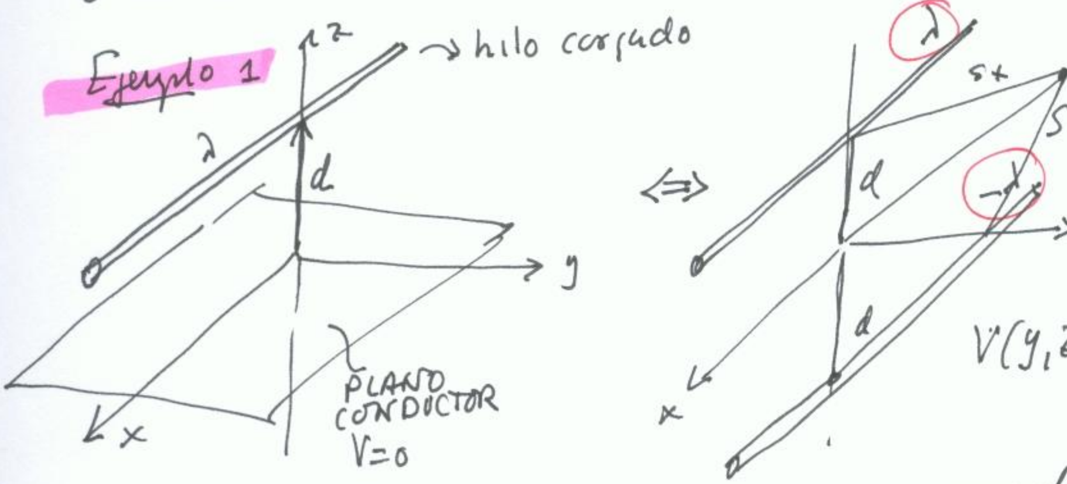
$$Q = \int \sigma\, dS = \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{2\pi r\, dr}_{\text{anillo}} = -qd\int_0^\infty \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\, dr =$$

$$= \left.\frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}}\right|_0^\infty = -q$$ se induce una carga igual y de signo contrario.

El metodo de las imagenes tiene limitaciones. Por ejemplo si queremos calcular la energia almacenada en el sistema carga-plano no debemos calcularlo usando la carga ficticia. Ni siquiera mover dicha carga pues no es real.

Otras situaciones en las que se puede aplicar imagenes es

Ejemplo 1

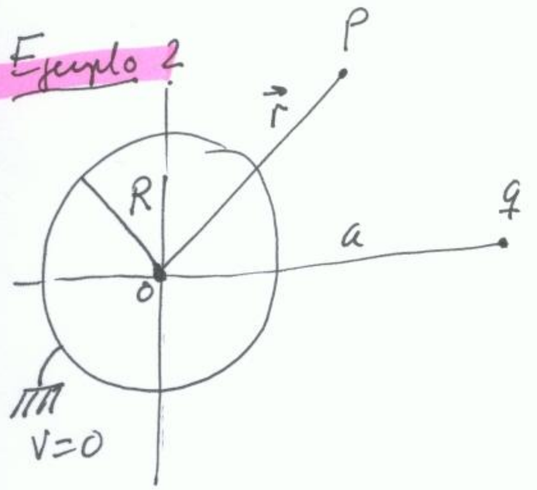


$$V(x,y) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{S_-^2}{S_+^2}\right)$$

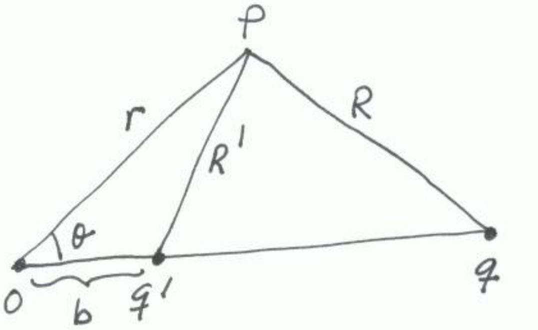
$$V(y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{y^2+(z+d)^2}{y^2+(z-d)^2}\right)$$

El calculo del potencial se hizo en un ejemplo de la pag 7 (vuelta)

Ejemplo 2



↔



$$q' = -\frac{R}{a} q$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

$$V(P) = K\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'}\right)$$ con las propiedades $V(Q) = 0 \ \forall Q \in$ ESFERA

Para el Ejemplo 1 se puede calcular la carga inducida en el plano conductor. (solo dependerá de y) $\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0}$

$$\sigma(y) = -\varepsilon_0 \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2(z+d)}{y^2+(z+d)^2} - \frac{2(z-d)}{y^2+(z-d)^2}\right]_{z=0} = -\frac{\lambda d}{\pi(y^2+d^2)}$$

y la carga total en una cinta de long L a lo largo del eje x

$$q_{ind} = L\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(y)\,dy = -\frac{L\lambda d}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+d^2} = -\frac{L\lambda d}{\pi}\left(\frac{1}{d}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{d}\right)_{-\infty}^{+\infty} = -\lambda \cdot L$$

densidad inducida