TEMA 0 - CONCEPTOS Y METODOS : PROBLEMAS

1- CALCULO DIFERENCIAL

P-1: Calcular el gradiente de las siguientes funciones

1.11/P.15

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$

b) $f(x,y,z) = x^2 \cdot y^3 \cdot z^4$

c) $f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y \cdot \ln z$

a) $\vec{\nabla} f = 2x\,\vec{u}_x + 3y^2\,\vec{u}_y + 4z^3\,\vec{u}_z$

b) $\vec{\nabla} f = 2xy^3z^4 \cdot \vec{u}_x + 3x^2y^2z^4\,\vec{u}_y + 4x^2y^3z^3\,\vec{u}_z$

c) $\vec{\nabla} f = e^x \operatorname{sen} y \ln z\,\vec{u}_x + e^x \cos y \ln z\,\vec{u}_y + e^x \operatorname{sen} y \cdot \frac{1}{z}\,\vec{u}_z$

P-2 | La altura de una colina viene dada por la expresión.

1.12/P.15 $h(x,y) = 10 \cdot (2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$ donde x es la distancia este en Km y, y es la distancia norte de cierta localidad L. Se pide. (h se mide en m)

a) Donde se localiza la cima de la colina?

b) Altura de la colina.

c) Determinar la pendiente en un punto a 1 Km al norte y 1 Km al este de la localidad L. En qué dirección es mas acusada la pendiente en dicho punto?

a) Los extremos de una función $F(x,y,z)$ se encuentran como solución de $\vec{\nabla} F = 0$ ya que el gradiente representa la máxima variación de la función. F. En nuestro caso

$$\vec{\nabla} h = 10(2y - 6x - 18)\,\vec{u}_x + 10(2x - 8y + 28)\,\vec{u}_y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y - 6x - 18 = 0 \\ 2x - 8y + 28 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} \text{2 Km al oeste} \\ \text{3 Km al norte} \end{array}\right\} \text{de L}$$

b) Poniendo en $h(x,y)\Big/_{\substack{x=-2\\ y=3}} = 720$ m

c) Si ponemos $x=1, y=1$. $\vec{\nabla}h = 220(-\vec{u}_x + \vec{u}_y)$

$|\vec{\nabla}h| = 220\sqrt{2} \equiv 311$ m/Km pendiente

y la dirección, es la del gradiente, que como se ve es Nor-oeste

---

P-3 Sea $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ con $\vec{r}(x,y,z)$ y $\vec{r}'(x',y',z')$. Demostrar que

1.13/P.15 a) $\vec{\nabla}(R^2) = 2\vec{R}$

b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{u}_R}{R^2}$

c) Cuanto vale en general $\vec{\nabla}(R^n)$?

$\vec{R} = (x-x')\vec{u}_x + (y-y')\vec{u}_y + (z-z')u_z$ y $R = |\vec{R}| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

a) $\vec{\nabla}(R^2) = \frac{\partial}{\partial x}R^2\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}R^2\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}R^2\vec{u}_z = 2(x-x')\vec{u}_x + 2(y-y')\vec{u}_y + 2(z-z')\vec{u}_z =$

$= 2.\vec{R}$

b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}\vec{u}_z = -1R^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}R\,\vec{u}_x - R^{-2}\frac{\partial}{\partial y}R\vec{u}_y - R^{-2}\frac{\partial}{\partial z}R\vec{u}_z$

pero $\frac{\partial}{\partial x}R = \frac{1}{R}.(x-x')$, $\frac{\partial}{\partial y}R = \frac{1}{R}(y-y')$ y $\frac{\partial}{\partial z}R = \frac{1}{R}(z-z')$, portanto

$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^3}(x-x')\vec{u}_x - \frac{1}{R^3}(y-y')\vec{u}_y - \frac{1}{R^3}(z-z')\vec{u}_z = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\vec{u}_R}{R^2}$ cqd

c) $\vec{\nabla}(R^n) = \frac{\partial}{\partial x}R^n\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}R^n\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}R^n\vec{u}_z = nR^{n-1}\left[\frac{\partial R}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial R}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{u}_z\right] =$

$= nR^{n-1}\cdot\frac{\vec{R}}{R} = n\cdot R^{n-1}\cdot\vec{u}_R$

P-4 Calcular la divergencia de las siguientes funciones vectoriales

1.15/P.18

a) $\vec{v}_a = x^2\,\vec{u}_x + 3xz^2\,\vec{u}_y - 2xz\,\vec{u}_z$

b) $\vec{v}_b = xy\,\vec{u}_x + 2yz\,\vec{u}_y + 3zx\,\vec{u}_z$

c) $\vec{v}_c = y^2\,\vec{u}_x + (2xy + z^2)\,\vec{u}_y + 2yz\,\vec{u}_z$

a) $\vec{\nabla}\vec{v}_a = 2x - 2x = 0$

b) $\vec{\nabla}\vec{v}_b = y + 2z + 3x$

c) $\vec{\nabla}\vec{v}_c = 2x + 2y$

P-5 Calcula la divergencia de $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}_r}{r^2} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

1.16/P.18

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

ya que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} - x\cdot\dfrac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\cdot 2x$

$$= r^{-3} - 3x^2 \cdot r^{-5}$$

Aplicado al cálculo total resulta.

$$\vec{\nabla}\vec{v} = r^{-3} - 3x^2 r^{-5} + r^{-3} - 3y^2 r^{-5} + r^{-3} - 3z^2 r^{-5} =$$

$$= 3r^{-3} - 3(x^2+y^2+z^2)\,r^{-5} = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0$$

aunque en realidad $\vec{\nabla}\vec{v} = 4\pi\delta(\vec{r})$

P-6. Calcular el rotacional. de las funciones vectorials del problema
1.13/P 20 P_4. anterior.

a) $\vec{\nabla}\times\vec{v}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & 3xz^2 & -2xz \end{vmatrix} = -6xz\,\vec{i} + 2z\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$

b) $\vec{\nabla}\times\vec{v}_b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & 2yz & 3zx \end{vmatrix} = -2y\,\vec{i} - 3z\,\vec{j} - x\,\vec{k}$

c) $\vec{\nabla}\times\vec{v}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & 2xy+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = 0$

P-7 Calcula el Laplaciano de las siguientes funciones
1.25/P.24 a) $T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4$

b) $T_b = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$.

c) $T_c = e^{-5x} \sin 4y \cos 3z$

d) $\vec{v} = x^2\,\vec{u}_x + 3xz^2\,\vec{u}_y + 2xz\,\vec{u}_z$

N: El Laplaciano aplicado a un campo vectorial $\vec{\nabla}^2\vec{v} = \vec{\nabla}^2 v_x\,\vec{i} + \vec{\nabla}^2 v_y\,\vec{j} + \vec{\nabla}^2 v_z \cdot \vec{k}$

a) $\vec{\nabla}^2 T_a = \dfrac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T_a}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T_a}{\partial z^2} = 2$

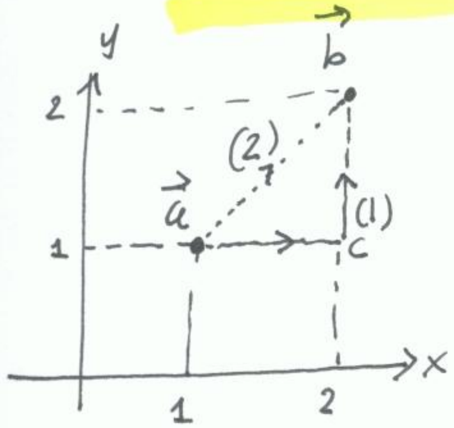
b) $\vec{\nabla}^2 T_b = -3\,T_b = -3 \sin x \sin y \sin z$

c) $\vec{\nabla}^2 T_c = 25\,T_c - 16\,T_c - 9\,T_c = 0$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}^2 v_x = 2 \\ \vec{\nabla}^2 v_y = 6x \\ \vec{\nabla}^2 v_z = 0 \end{array}\right\} \vec{\nabla}^2\vec{v} = 2\,\vec{u}_x + 6x\,\vec{u}_y$

2- CALCULO INTEGRAL

P-1 Calcula la integral de linea de la función $\vec{v} = y^2\vec{u}_x + 2x(y+1)\vec{u}_y$
Ex. 1.6/P.25 desde $\vec{a}=(1,1,0)$ hasta $\vec{b}=(2,2,0)$ a lo largo de los caminos (1) y (2) de la Figura. Cuanto vale $\oint \vec{v}\cdot d\vec{l}$ para el bucle que va de $\vec{a} \xrightarrow[(1)]{} \vec{b} \xrightarrow[(2)]{} \vec{a}$?



a) $\displaystyle\int_{\vec{a}\,(1)}^{\vec{b}} \vec{v}\,d\vec{l} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (v_x dx + v_y dy) =$

$\displaystyle = \int_{\vec{a}}^{\vec{c}} y^2 dx + \int_{\vec{c}}^{\vec{b}} 2x(y+1)\,dy = 1 + 4\int_1^2 (y+1)\,dy =$

$\displaystyle = 1 + 4\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_1^2 = 1 + 4\left[4 - \frac{3}{2}\right] = 1+16-6 = \underline{\underline{11}}$

b) $\displaystyle\int_{\vec{a}\,(2)}^{\vec{b}} \vec{v}\,d\vec{l} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} v_x dx + v_y dy = \int_1^2 [x^2 + 2x(x+1)]\,dx =$

el camino (2) es la recta $y=x$

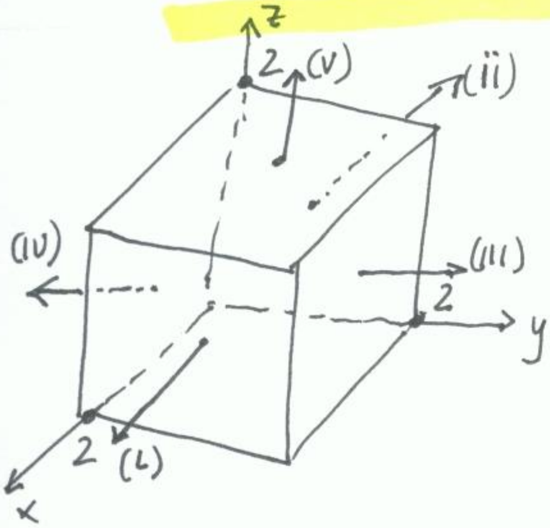
$\displaystyle = \int_1^2 (3x^2+2x)\,dx = x^3+x^2\Big]_1^2 = \underline{\underline{10}}$

c) En cuanto al bucle.

$\displaystyle\oint \vec{v}\,d\vec{l} = \int_{\vec{a}\,(1)}^{\vec{b}} \vec{v}\,d\vec{l} + \int_{\vec{b}\,(2)}^{\vec{a}} \vec{v}\,d\vec{l} = \int_{\vec{a}\,(1)}^{\vec{b}} \vec{v}\,d\vec{l} - \int_{\vec{a}\,(2)}^{\vec{b}} \vec{v}\,d\vec{l} = 11 - 10 = 1$

P-2 Calcular la integral de superficie del campo vectorial

(Ex. 1.7/P.26 $\vec{v} = 2xz\,\vec{u}_x + (x+2)\,\vec{u}_y + y(z^2-3)\,\vec{u}_z$ sobre las cinco caras (excluyendo la del fondo) de la caja cúbica de la figura. Considerar la dirección positiva del vector superficie la saliente de la caja.



(i) $x = 2$, $d\vec{S} = dy\,dz\,\vec{u}_x$

$$\vec{v}\cdot d\vec{S} = 2xz\cdot dy\,dz \equiv 4z\,dy\,dz$$

$$\int_{S_i} \vec{v}\cdot d\vec{S} = 4\int_0^2 dy \int_0^2 z\,dz = 16$$

ii) $x = 0$ $d\vec{S} = dy\,dz\,(-\vec{u}_x)$

$$\vec{v}\cdot d\vec{S} = -2xz\,dy\,dz = 0$$

$$\int_{S_{ii}} \vec{v}\,d\vec{S} = 0.$$

iii) $y = 2$ $d\vec{S} = dx\,dz\,\vec{u}_y$; $\vec{v}\,d\vec{S} = (x+2)\,dx\,dz$

$$\int_{S_{iii}} \vec{v}\,d\vec{S} = \int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 dz = 12$$

iv) $y = 0$ $d\vec{S} = -dx\,dz\,\vec{u}_y$ $\vec{v}\,d\vec{S} = -(x+2)\,dx\,dz$

$$\int_{S_{iv}} \vec{v}\,d\vec{S} = -12$$

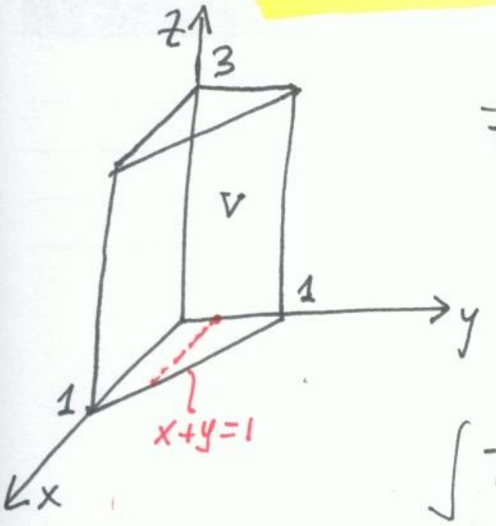
v) $z = 2$ $d\vec{S} = dx\,dy\cdot\vec{u}_z$. $\vec{v}\,d\vec{S} = y(z^2-3)\Big|_{z=2} dx\,dy = y\,dx\,dy$

$$\int_{S_v} \vec{v}\,d\vec{S} = \int_0^2 dx \int_0^2 y\,dy = 4$$

El flujo total vale $\int_S \vec{v}\,d\vec{S} = \underline{\underline{20}}$

P-3 Calcula la integral de volumen de $T = xyz^2$ sobre el prisma de la figura.

Ex. 18/P.27

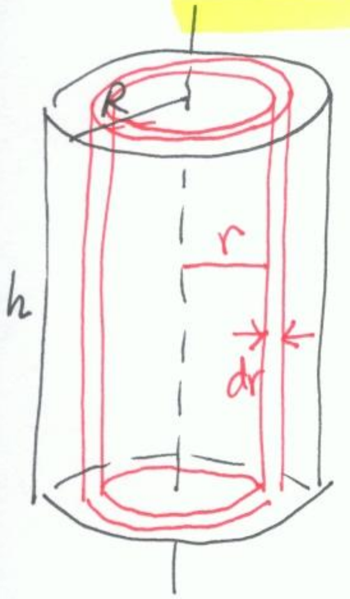


$$\int_V T.dv = \int_0^3 z^2.\left[\int_0^1 y\left\{\int_0^{1-y} x\,dx\right\}dy\right]dz$$

ya que para un valor de y x va de 0 a $1-y$

$$\int_V T dv = \frac{1}{2}\int_0^3 z^2 dz \int_0^1 y(1-y)^2 dy = \frac{3}{8}$$

P-4 Calcula la carga total contenida en un cilindro de radio R y altura h. si la densidad de carga solo depende de la distancia al eje a través de la expresión $\rho(r) = k.r$.



$$Q = \int_V \rho . dv$$

Dado que ρ solo depende de la distancia al eje, se pueden tomar como "elementos" de volumen

$$dv = 2\pi r dr . h$$

$$Q = \int_0^R k.r.2\pi r h dr = 2\pi h k \int_0^R r^2 dr = 2\pi h k \frac{R^3}{3}$$

3- TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO VECTORIAL

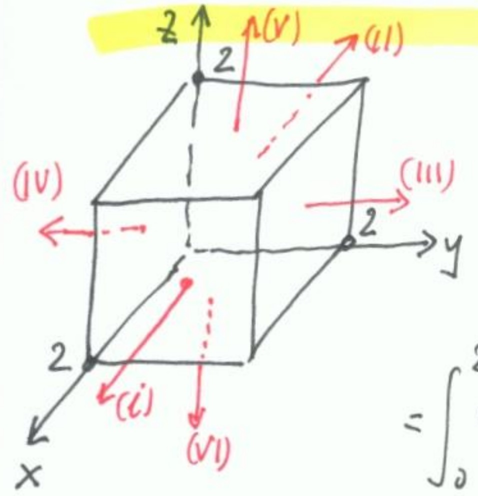
a) PARA GRADIENTE $$\int_{\vec a}^{\vec b} \vec\nabla T\cdot d\vec r = T(\vec b)-T(\vec a)$$

b) PARA DIVERGENCIA $$\int_{Vol}(\vec\nabla\cdot\vec v)\cdot dvol = \oint_S \vec v\cdot d\vec S \quad \text{(T. de Gauss)}$$

c) PARA ROTACIONAL $$\int_S(\vec\nabla\times\vec v)\,d\vec S = \oint_{\mathcal L}\vec v\cdot d\vec l \quad \text{(T. de Stokes)}$$

P-1 Comprobar el Teorema de la divergencia para la función vectorial

1.32/P.33 $\vec v = x\cdot y\,\vec u_x + 2yz\,\vec u_y + 3zx\,\vec u_z$. Como volumen, tómese el cubo de aristas de longitud 2 colocado según indica la figura.



$$\vec\nabla\vec v = y+2z+3x$$

$$\int_V \vec\nabla\vec v\,dv = \int_0^2 dz\left[\int_0^2 dy\left[\int_0^2 dx\,(y+2z+3x)\right]\right] =$$

$$= \int_0^2 dz\left[\int_0^2 dy\underbrace{\left[(y+2z)\cdot x + \frac{3x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2}}_{2(y+2z)+6}\right] =$$

$$= \int_0^2 dz\left[y^2+4zy+6y\right]_{y=0}^{2} = \int_0^2 (4+8z+12)\,dz =$$

$$= 16z+4z^2\Big]_{z=0}^{2} = 32+16 = \underline{\underline{48}}$$

Ahora puedo hacer la integral de superficie.

(i) $d\vec S = dydz\cdot\vec u_x$ $x=2$, $\vec v\cdot d\vec S = 2y\,dydz \Rightarrow \int_{(i)}\vec v d\vec S = \int_0^2 dz\cdot\int_0^2 2y\,dy = 8$

(II) $d\vec S = -dydz\,\vec u_x$, $x=0$ $\vec v\cdot d\vec S = 0 \Rightarrow \int_{(II)}\vec v d\vec S = 0$

(III) $\vec{dS} = dx\,dz\,\vec{u}_y$, $y=2$, $\vec{v}\cdot\vec{dS} = 4z\,dx\,dz \Rightarrow \int_{(III)} \vec{v}\cdot\vec{dS} = \int_0^2 dx \int_0^2 4z\,dz = 16$

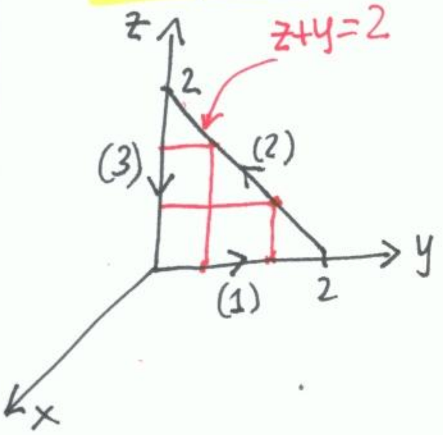
(IV) $\vec{dS} = -dx\,dz\,\vec{u}_y$, $y=0$, $\vec{v}\cdot\vec{dS}=0 \Rightarrow \int_{(IV)}\vec{v}\,\vec{dS}=0$

(V) $\vec{dS} = dx\,dy\,\vec{u}_z$, $z=2$, $\vec{v}\cdot\vec{dS} = 6x\,dx\,dy \Rightarrow \int_{(V)} \vec{v}\,\vec{dS} = \int_0^2 dy\int_0^2 dx\cdot 6x = 24$

(VI) $\vec{dS} = -dx\,dy\,\vec{u}_z$, $z=0 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{dS}=0$ y $\int_{(VI)}\vec{v}\,\vec{dS}=0$

En resumen $\oint\!\!\oint \vec{v}\,\vec{dS} = 48$

P-2 Comprobar el teorema de Stokes para la función vectorial
1.33/P.36 $\vec{v} = x\cdot y\vec{i} + 2yz\vec{j} + 3zx\vec{k}$ usando el área triangular de la figura.



a) $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x\cdot y & 2yz & 3zx \end{vmatrix} = -2y\vec{i} - 3z\vec{j} - x\vec{k}$$

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{v}\cdot\vec{dS} = \underset{\vec{dS}=dy\,dz\,\vec{i}}{\int_S} -2y\,dy\,dz = \int_0^2 dz\left[\int_0^{2-z} -2y\,dy\right] =$$

$$= \int_0^2 dz\left[-(2-z)^2\right] = -8/3$$

b) Si hacemos ahora la integral de circulación de $\vec{v}$

(1) $\int_{(1)} \vec{v}\cdot\vec{dl} = \int_{(1)} 2yz\Big|_{z=0}\,dy = 0$

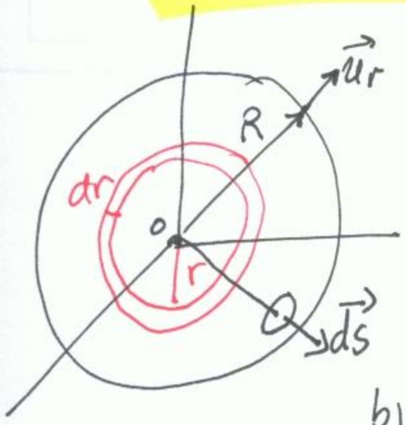
(2) $\int_{(2)} \vec{v}\,\vec{dl} = \int_{(2)} 2yz\,dy + 3zx\,dz \underset{z=2-y}{=} \int_2^0 \left[2y(2-y) + 3(2-y)\cdot \underset{0}{x}\right]dy =$

$= \int_2^0 2y(2-y)\,dy = \left[2y^2 - 2\frac{y^3}{3}\right]_2^0 = -8/3$ y (3) da nulo.

CQP

4 - PRACTICA CON COORDENADAS CURVILINEAS

P-1 Comprobar el teorema de la divergencia para la función $\vec{v}_1 = r^2 \vec{u}_r$
1.38/P.42 usando como volumen, la esfera centrada en el origen y de radio R.



a) $$\vec{\nabla}\vec{v}_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot v_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot r^2) = \frac{1}{r^2}\cdot 4 \cdot r^3 = 4 \cdot r$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_1 \cdot dv = \int_0^R 4 \cdot r \cdot 4\pi r^2 dr = 16\pi \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 4\pi R^4$$

b) $$\int_S \vec{v}_1 \cdot \vec{ds} = \int_S R^2 \cdot dS = R^2 \int_S dS = R^2 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^4$$

P-2: Hacer lo mismo que el problema anterior pero con $\vec{v}_2 = \frac{1}{r^2}\vec{u}_r$
1.38/P.42

a) $$\vec{\nabla}\vec{v}_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\vec{v}_2 \, dv = 0$$

b) $$\int_S \vec{v}_2 \vec{ds} = \frac{1}{R^2}\cdot\int_S ds = \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$

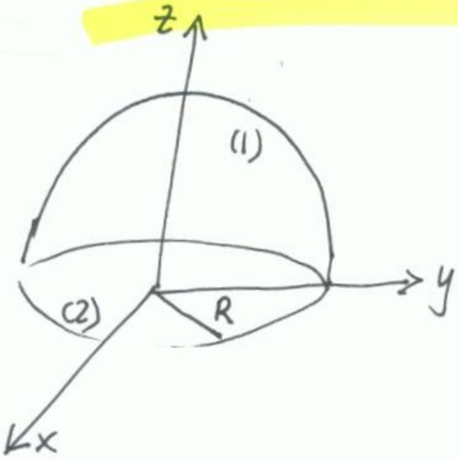
Aparentemente no se cumple el Teorema de Gauss, pero es debido a que $\vec{\nabla}\vec{v}_2 = 0$ excepto en $r=0$ que diverge por lo que $\int_V \vec{\nabla}\vec{v}_2 \, d\vec{v}$ es singular en el origen y debe valer 4π. Mas exactamente

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{v}_2 = 4\pi\,\delta(\vec{r})}$$

P-3 Calcula la divergencia de la función $\vec{v} = r\cos\theta\, \vec{u}_r + r\,\text{sen}\theta\, \vec{u}_\theta + r\,\text{sen}\theta\cos\theta\, \vec{u}_\varphi$

139/P.43

Comprobar el Teorema de Gauss usando como volumen el hemisferio de radio R superior.



a) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot r\cos\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}\theta \cdot r\,\text{sen}\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\,\text{sen}\theta\cos\varphi) =$$

$$= 5\cos\theta - \text{sen}\varphi$$

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{v}\cdot dv = \int_V (5\cos\theta - \text{sen}\varphi)\cdot r^2\text{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^R dr\cdot r^2 \cdot \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi}(5\cos\theta - \text{sen}\varphi)\,d\varphi\right]\text{sen}\theta\, d\theta =$$

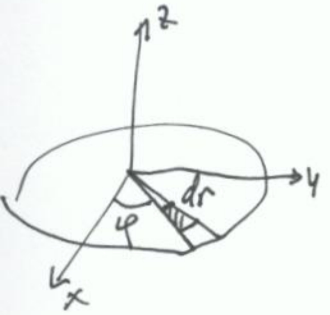
$$= \frac{R^3}{3}\cdot\int_0^{\pi/2}\cdot\left[5\varphi\cos\theta + \cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi}\text{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2} 10\pi\cos\theta\cdot\text{sen}\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{3}R^3$$

b) Hay dos superficies, la esfera y el suelo circular. por tanto

$$\oint_S \vec{v}\,\vec{dS} = \quad (1)\;\; \vec{dS} = R^2\text{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\,.\,\vec{u}_r\,,\quad \vec{v}\cdot\vec{dS} = R^3\text{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_{(1)} \vec{v}\,\vec{dS} = R^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\text{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = 2\pi R^3\left[\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi R^3$$



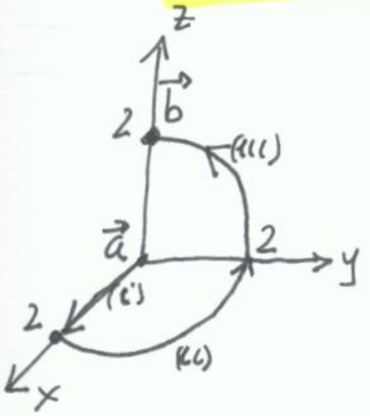
(II) $$\vec{dS} = dr\cdot r\,d\varphi\cdot(-\vec{k}) = -r\,dr\,d\varphi\cdot(\cos\theta\,\vec{u}_r - \text{sen}\theta\,\vec{u}_\theta)\Big|_{\theta=\pi/2}$$

$$= r\,dr\,d\varphi\cdot\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{dS} = r^2\,dr\,d\varphi$$

$$\int_{(II)} \vec{v}\,\vec{dS} = \int_0^R r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi$$

P-4

1.40/P.43 Calcula el gradiente y el laplaciano de $T = r\cdot(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi)$
Convierta T a cartesianas y calcule de nuevo el laplaciano.
Compruebe finalmente el teorema del gradiente usando la trayectoria mostrada en la figura desde $(0,0,0)$, hasta $(0,0,2)$.



$$\vec{\nabla}^2 T = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot T)$$

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi =$$

$$=(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\vec{u}_r + (\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta)\vec{u}_\theta +$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\vec{u}_\varphi$$

$$y\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}T) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta)\right) +$$

$$+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\operatorname{sen}\varphi) = \frac{1}{r^2}\cdot 2r(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}(-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta +$$

$$+\cos^2\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi) - \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\cos\varphi =$$

$$=\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\Big(\cancel{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi \cancel{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \cos^2\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi -$$
$$-\cos\varphi\Big) =$$

$$=\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi - \cos\varphi\right) = 0$$

El campo escalar T en cartesianas es $T = r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi = x+z$

$$y\ \vec{\nabla}^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Para comprobar el teorema del gradiente. $\displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla}T\,d\vec{r} = T(\vec{b}) - T(\vec{a})$

vamos de $\vec{a}\to\vec{b}$ a través de los segmentos (i)→(ii)→(iii)

(I) $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\varphi = 0$, $r: 0 \to 2$, $d\vec{r} = dr \cdot \vec{u}_r$

$$\vec{\nabla} T d\vec{r} = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)\, dr = dr \Rightarrow \int_{(I)} \vec{\nabla} T d\vec{r} = \int_0^2 dr = 2$$

(II) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 2$, $\varphi: 0 \to \frac{\pi}{2}$, $d\vec{r} = r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi = 2 d\varphi\, \vec{u}_\varphi \Rightarrow$

$$\int_{(II)} \vec{\nabla} T d\vec{r} = \int_{(II)} (-\operatorname{sen}\varphi) \cdot 2 d\varphi = -\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -2$$

(III) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta: \frac{\pi}{2} \to 0$ $d\vec{r} = r d\theta\, \vec{u}_\theta = 2 d\theta\, \vec{u}_\theta$

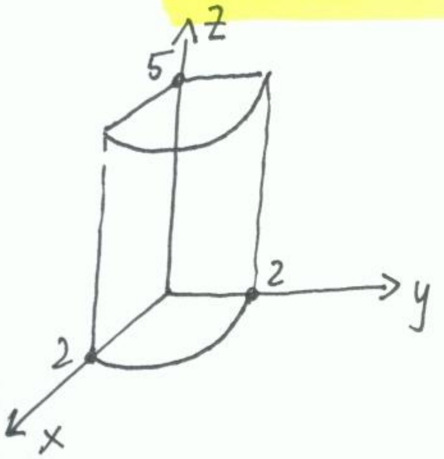
$$\int_{(III)} \vec{\nabla} T d\vec{r} = \int_{(III)} (\cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta)\, 2 d\theta = -\int_{\pi/2}^{0} 2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2$$

Con lo que $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} T \cdot d\vec{r} = 2$

Pero $T(\vec{b}) - T(\vec{a}) = 2 \cdot (1 + 0) - 0 \cdot (\ ) = 2$ CQP

P-5 Encontrar la divergencia de la función $\vec{v} = r(2 + \operatorname{sen}^2\varphi)\vec{u}_r + r \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \vec{u}_\varphi + 3z \cdot \vec{u}_z$ en coordenadas cilíndricas. Comprobar el teorema de Gauss usando el cuarto de cilindro de la figura. Finalmente calcular $\vec{\nabla} \times \vec{v}$

1.42/ P.45



a) $$\vec{\nabla} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 (2 + \operatorname{sen}^2\varphi)\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(3z)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\left(2r(2+\operatorname{sen}^2\varphi)\right) + \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 3 = 2(2+\operatorname{sen}^2\varphi) + \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 3 =$$

$$= 4 + \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi + 3 = 8$$

b) $$\int_V \vec{\nabla}\vec{v}\cdot dv = 8\int_V dv = 8\cdot\frac{1}{4}\cdot(\pi\cdot 2^2\cdot 5) = \underline{\underline{40\pi}}$$

Por otro lado, el flujo hay que calcularlo a través de las 5 superficies.

i) superior: $z=5$, $d\vec{s} = r\,dr\,d\varphi\,\vec{u}_z \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{s} = 15\,r\,dr\,d\varphi \Rightarrow$

$$\int_{(i)} \vec{v}\cdot d\vec{s} = 15\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r\,dr = 15\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = 15\cdot\pi$$

ii) inferior: $z=0$, $d\vec{s} = -r\,dr\,d\varphi\,\vec{u}_z \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{s} = 0$

iii) atrás: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $d\vec{s} = dr\,dz\,\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{s} = r\operatorname{sen}\varphi\underbrace{\cos\varphi}_{0}\,dr\,dz = 0$

iv) izqda: $\varphi = 0$, $d\vec{s} = -dr\,dz\,\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{s} = -r\underbrace{\operatorname{sen}\varphi}_{0}\cos\varphi\,dr\,dz = 0$

v) frontal: $r=2$, $d\vec{s} = r\,d\varphi\,dz\,\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v}\,d\vec{s} = r^2(2+\operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi\,dz$

$$\int_{(v)} \vec{v}\,d\vec{s} = 4\int_0^5 dz \int_0^{\pi/2}(2+\operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi = 20\cdot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 25\cdot\pi$$

De modo que

$$\oint_S \vec{v}\,d\vec{s} = 15\pi + 25\pi = \underline{\underline{40\pi}} \quad \text{cqp}$$