

# Tema 39.- Campos magnéticos creados por corrientes

## §39.1.- Campo magnético creado por un elemento de corriente

Oersted – Biot – Savart – Faraday

$$d\mathbf{B} = k' I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

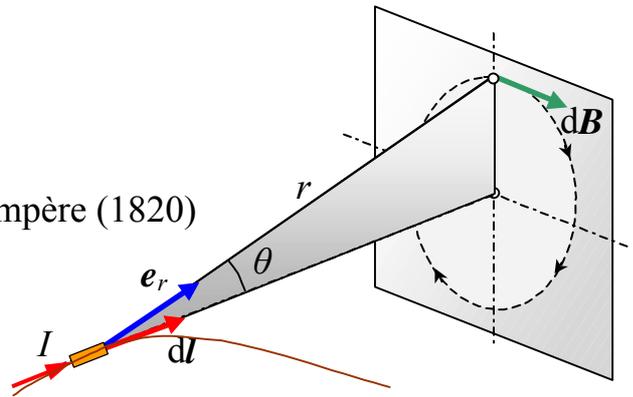
1º ley de Biot y Savart, 1ª ley de Laplace, Ley de Ampère (1820)

Sistema Internacional:

$$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \quad (\text{por definición})$$

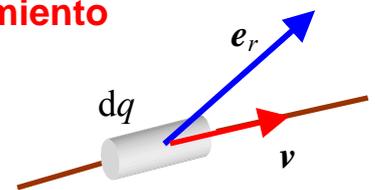
$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{F}}{\text{m}} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \end{array} \right. \rightarrow \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{velocidad de las} \\ \text{ondas electromagnéticas} \end{array} \right)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$



## §39.2.- Campo magnético creado por una carga en movimiento

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$



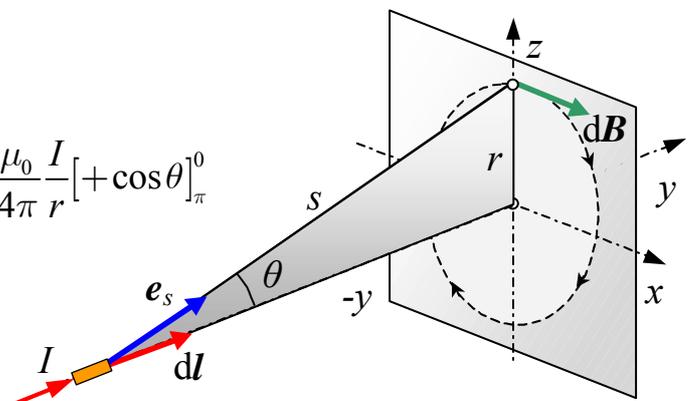
## §39.3.- Campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{|d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_s|}{s^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dy \sin \theta}{s^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = s \sin \theta \\ -y = r \tan \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = r / \sin \theta \\ dy = \frac{r d\theta}{\sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{r d\theta \sin^3 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} [+ \cos \theta]_0^\pi$$

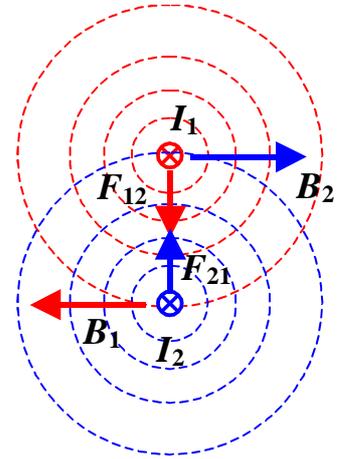
$$\therefore \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}}$$



### §39.4.- Fuerza entre corrientes paralelas

$$\begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{h} \\ B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{h} \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 = I_1 B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{h} l \\ F_2 = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{h} l \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{h}}$$



#### 39.4.a. Definición del amperio

$$\begin{cases} I_1 = 1 \text{ A} \\ I_2 = 1 \text{ A} \end{cases} \quad h = 1 \text{ m} \rightarrow \boxed{\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \times 1 \times 1}{1} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

### §39.5.- Campo magnético creado por una espira circular

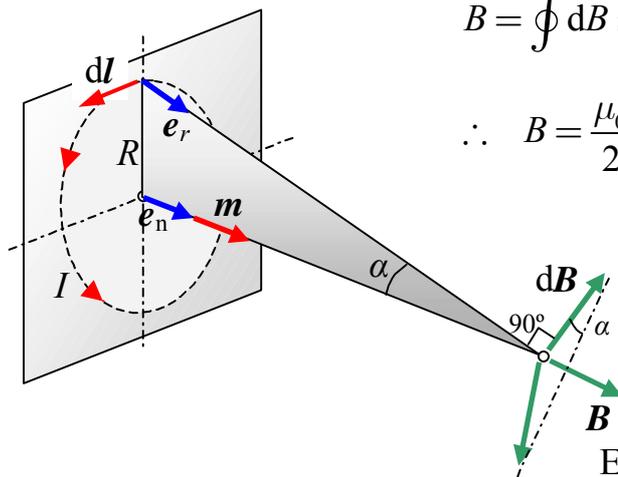
$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{|d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}$$

$$B = \oint d\mathbf{B} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \alpha \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin \alpha (2\pi R)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR}{r^2} \sin \alpha = \boxed{\frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3}} \quad (\text{disminuye con } \frac{1}{r^3})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} \mathbf{e}_n = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\pi R^2}{r^3} \mathbf{e}_n = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{S}{r^3} \mathbf{e}_n$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{r^3}} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}$$



En el centro de la espira:

$$r = R \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{R^3}} \quad (\text{general})$$

N-espiras apretadas (cuadro):  $\mathbf{m} = NIS$

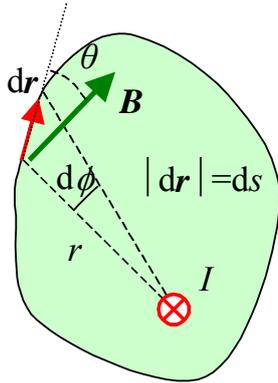
En el centro de un cuadro circular:  $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{R}$

Las espiras recorridas por una corriente se orientan en un campo magnético externo de tal forma que el flujo total que recogen (tanto propio como externo) sea el mayor posible.

(similitud con el dipolo eléctrico)

## §39.6.- Teorema de Ampère

### 39.6.a. Circulación del campo $\mathbf{B}$ .



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \quad r \, d\phi = ds \cos \theta$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \oint_C \frac{ds \cos \theta}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \oint_C d\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I (2\pi) = \mu_0 I$$

$$\therefore \boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum I} \quad (\text{Teorema de Ampère})$$

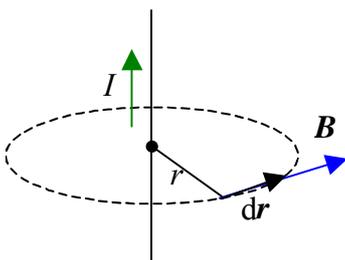
La circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada es proporcional a la suma de las intensidades de corriente que atraviesan cualquier superficie que tenga a esa línea como contorno.

### 39.6.b. Teorema de Ampère en forma diferencial:

$$\left[ \begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \\ \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 \sum I = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right. \rightarrow \boxed{(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}}$$

## §39.7.- Aplicaciones del teorema de Ampère

### 39.7.a. Conductor rectilíneo indefinido



Calculamos la circulación del campo magnético  $\mathbf{B}$  a lo largo de una trayectoria circular (simetrías):

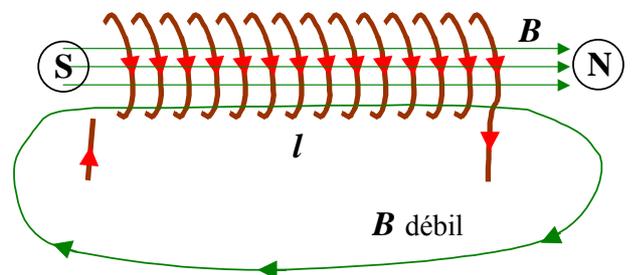
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

Por ser  $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$  en todo el camino de integración, será  $\mathbf{B} d\mathbf{r} = B \, dl$ . Además, el módulo de  $\mathbf{B}$  es el mismo en todos los puntos de la línea de circulación, por lo que resulta:

$$B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}$$

### 39.7.b. Solenoide

Longitud,  $l$ ; n° de espiras,  $N$ ; número de espiras por unidad de longitud,  $n = N/l$



Circulación a lo largo de una línea de campo:  $B l = \mu_0 (nl) I \quad \rightarrow \quad B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$

### 39.7.c. Toroide

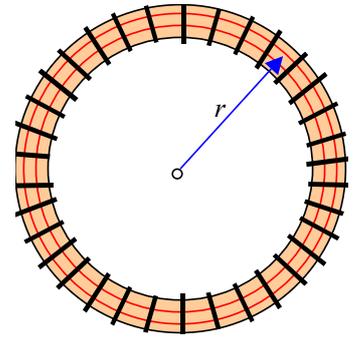
Radio trayectoria de Ampère,  $r$  ; Longitud,  $l=2\pi r$  ; nº de espiras,  $N$  ; número de espiras por unidad de longitud,  $n = N/l$

Circulación a lo largo de una línea de campo:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 NI \quad \rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 2NI}{4\pi r}}$$

El campo no es uniforme, por ser función de la distancia radial  $r$ .

Si  $R_1 \approx R_2$ , será  $l=2\pi R$ :  $B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$



### §39.8.- Ecuaciones de Maxwell:

*“A quien le impulse algo superior a la práctica mezquina, le conviene entender las ecuaciones de Maxwell, simplemente para la satisfacción de su espíritu”.* (J.R. Pierce)

Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q / \epsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Ampère-Maxwell	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
Ley de Faraday de la inducción	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Formuladas en la hipótesis de que no haya materiales dieléctrico o magnéticos.