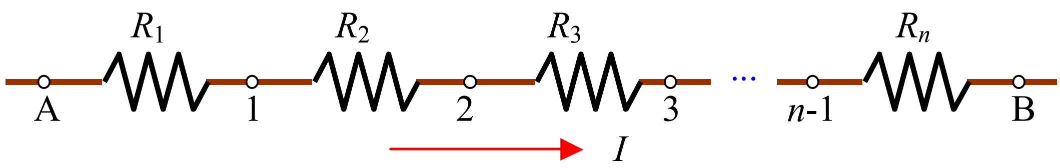
Tema 36.- Circuitos de Corriente Continua

§36.1.- Asociación de resistencias

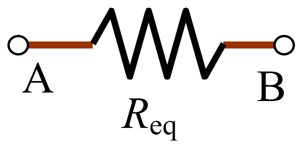
36.1.a. Resistencias en serie

- Misma intensidad en todas ellas
- Se reparten las tensiones: $I = \dfrac{V_1}{R_1} = \dfrac{V_2}{R_2} = \ldots$



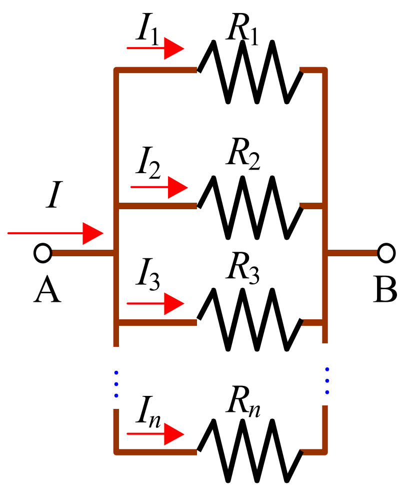
$$V_{A1} = IR_1 \qquad V_{12} = IR_2 \qquad V_{23} = IR_3 \qquad \ldots$$

$$V_{AB} = I\left(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\right) = IR_{eq} \quad \rightarrow$$
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots = \sum R_i$$



36.1.b. Resistencia en paralelo

- Misma tensión en todas ellas
- Se reparten las intensidades: $V = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \ldots$



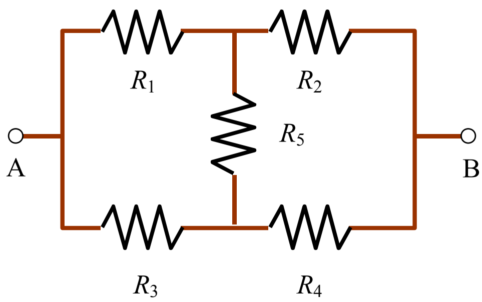
$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} \qquad \ldots$$

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots =$$
$$= V_{Ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\right) = \frac{V_{AB}}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots = \sum \frac{1}{R_i}$$

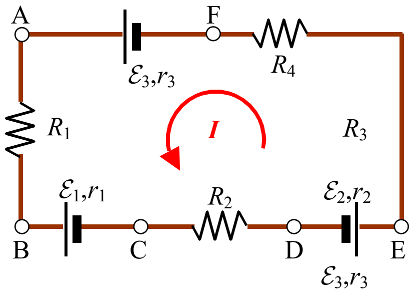
36.1.c. Asociación mixta de resistencias

- Método general de Maxwell.
- Reducir por simetrías.



§36.2.- Circuito con varios generadores y resistencias en serie

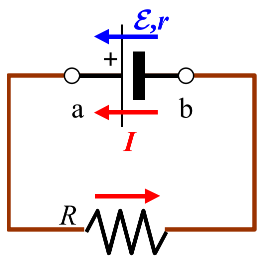
$$I = \frac{\Sigma\mathcal{E}}{\Sigma R} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{suma algebráica de las f.e.m.} \\ \longrightarrow \text{suma de las resistencias} \end{array}$$



En efecto: $\begin{cases} V_{AB} = IR_1 \\ V_{BC} = Ir_1 + \mathcal{E}_1 \\ V_{CD} = IR_2 \\ V_{DE} = Ir_2 - \mathcal{E}_2 \\ V_{EF} = IR_3 \\ V_{FA} = Ir_3 - \mathcal{E}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{AA} = I(r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 + R_3) + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 0 \\ I = \dfrac{-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 + R_3} = \dfrac{\Sigma\mathcal{E}}{\Sigma R} \end{cases}$

§36.3.- Fuente de tensión y fuente de intensidad

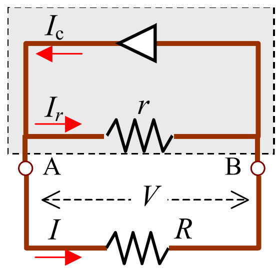
36.3.a. Fuente de tensión



Elemento activo del circuito capaz de mantener una diferencia de potencial entre sus terminales.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad \rightarrow \quad \boxed{V = IR = \frac{R}{R + r}\mathcal{E}}$$

36.3.b. Fuente de Intensidad

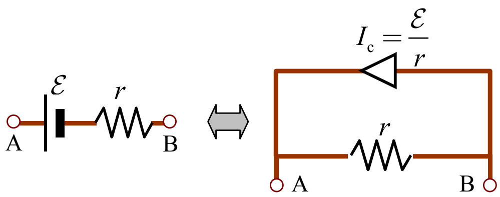


Elemento activo que suministra una intensidad constante al circuito

$$I = I_c - I_r = I_c - \frac{V}{r} = I_c - \frac{I\,R}{r} \quad \rightarrow \quad I_c = I\left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{I = \frac{r}{R + r} I_c} \quad \rightarrow \quad V_{ab} = IR = \frac{r}{R + r} R I_c = \frac{R}{R + r}\mathcal{E}$$

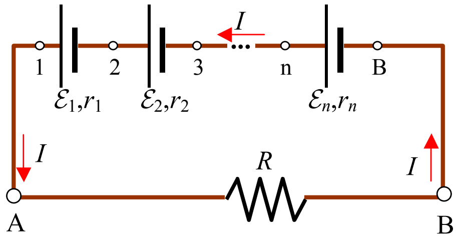
Una *fuente de tensión* será ***equivalente*** a una determinada fuente de intensidad cuando al conectarlas al mismo resistor R suministren igual intensidad.



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{I_c\, r}{R + r} \quad \rightarrow \quad I_c = \frac{\mathcal{E}}{r} \quad \text{(intensidad en corto)}$$

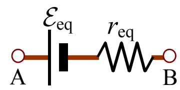
§36.4.- Asociación de generadores

36.4.a. Generadores en serie

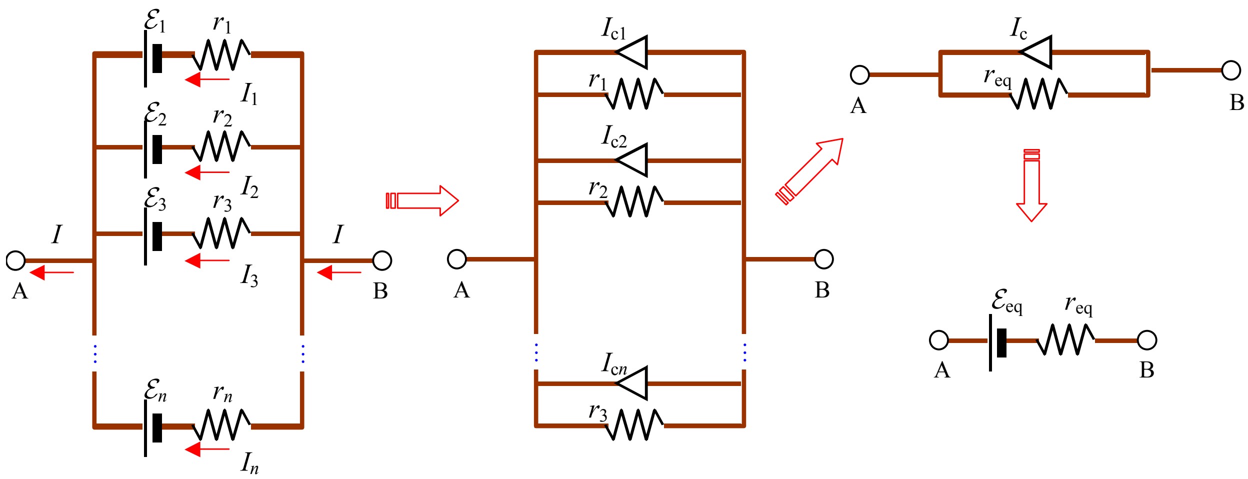


- Por todos ellos circula la misma intensidad
- Generador equivalente:

$$V_{AB} = -I(r_1 + r_2 ... + r_n) - (-\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 ... - \mathcal{E}_n) =$$
$$= (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 ... + \mathcal{E}_n) - I(r_1 + r_2 ... + r_n) = \mathcal{E}_{eq} - Ir_{eq}$$
$$\therefore \begin{cases} \mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 ... + \mathcal{E}_n = \sum \mathcal{E}_i \\ r_{eq} = r_1 + r_2 + ... + r_n = \sum r_i \end{cases}$$



- Si todos son iguales: $\mathcal{E}_{eq} = n\mathcal{E} \qquad r_{eq} = nr$



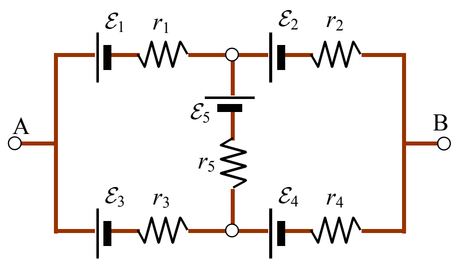
36.4.b. Generadores en paralelo

- La diferencia de potencial en bornes es la misma en todos ellos.
- Sustituimos las fuentes de tensión por las fuentes de intensidad equivalentes:

$$I_{eq} = \sum I_{c,i} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{r_3} + ... = \sum \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} \quad \rightarrow \quad \therefore \begin{cases} \mathcal{E}_{eq} = I_{eq} r_{eq} \\ \dfrac{1}{r_{eq}} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + ... = \sum \dfrac{1}{r_i} \end{cases}$$

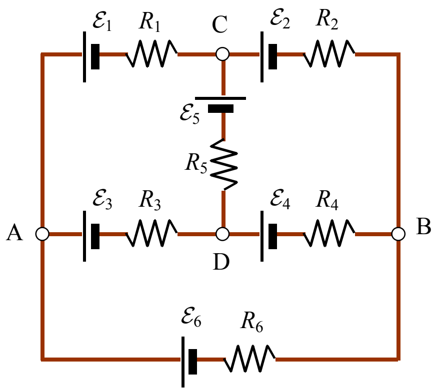
- Si todos son iguales: $\mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E} \qquad r_{eq} = \dfrac{r}{n}$

36.4.c. Asociación mixta de generadores



- Método general de Maxwell.
- Reducir por simetrías.

§36.5.- Lemas de Kirchhoff



- **Nudo (*n*):** punto de concurrencia de tres o más elementos del circuito, tales como los puntos A, B, C, D,...
- **Rama (*r*) :** elementos comprendidos entre dos nudos sucesivos. Todos los elemento de la rama están recorridos por la misma intensidad (***intensidad de rama***, *i*).
- **Malla (*m*) :** circuito cerrado que se puede recorrer sin pasar dos veces por un mismo nudo.
- Número de mallas independientes: $\boxed{m = r - (n-1)}$

A. Lema de los nudos:

La suma de las intensidades que entran en un nudo es igual a la suma de las que salen de él (condición de continuidad); *i.e.,* la intensidad neta en un nudo es nula

$$\boxed{\sum i_j = 0}$$

B. Lema de la mallas:

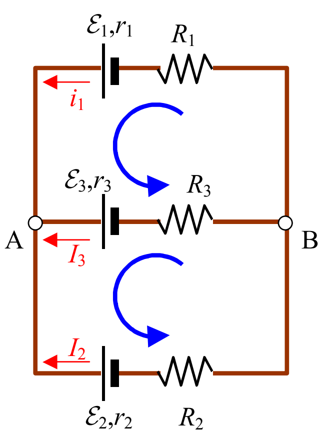
La suma algebraica de las **f.e.m.'s** en una malla es igual a la suma de los productos de cada resistencia por la intensidad que la recorre:

$$V_{\mathrm{ab}} = \sum iR - \sum \mathcal{E} \quad \rightarrow \quad V_{\mathrm{aa}} = \sum iR - \sum \mathcal{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum \mathcal{E} = \sum iR}$$

Los lemas de Kirchhoff se aplican a (n - 1) nudos y a $m = r$ - (n - 1) mallas, con lo que dispondremos de (n - 1) + r - (n - 1) = r ecuaciones con r incógnitas (*v.g.*, las *r intensidades de rama*).

§36.6.- Teorema de superposición

La intensidad de corriente que circula por una rama cualquiera de un circuito es igual a la suma de las que circularían actuando por sí solas cada una de las f.e.m.'s presentes en el circuito.

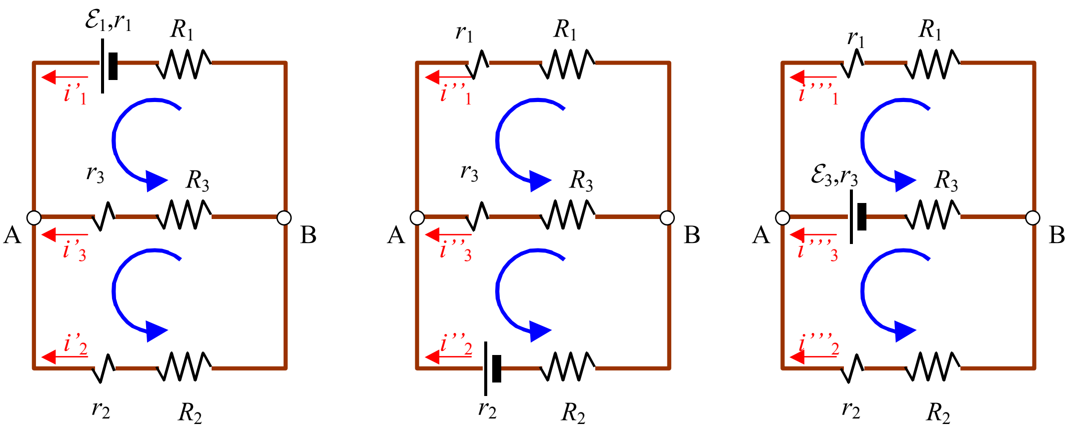


Ejemplo demostrativo: Aplicamos los lemas de Kirchhoff a (n - 1) nudos y a $m = r$ - (n - 1) mallas en el circuito que se muestra en la figura.

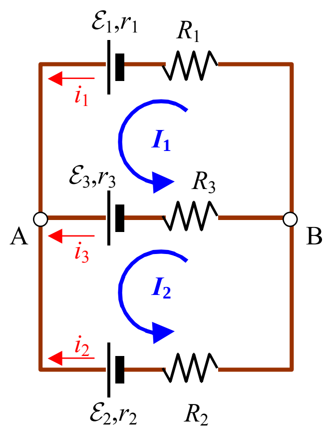
$$\begin{cases} n=2 \\ r=3 \\ m=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1+i_2+i_3=0 \\ i_1(r_1+R_1)-i_3(r_3+R_3)=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3 \\ i_3(r_3+R_3)-i_2(r_2+R_2)=\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1+i_2+i_3=0 \\ i_1\overline{R_1}-i_3\overline{R_3}=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3 \\ -i_2\overline{R_2}+i_3\overline{R_3}=\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3-\mathcal{E}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{I}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathcal{E}_1+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\mathcal{E}_2+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathcal{E}_3=\mathbb{A}\mathcal{E}_1+\mathbb{B}\mathcal{E}_2+\mathbb{C}\mathcal{E}_3$$

$$\mathbb{I}=\mathbb{R}^{-1}\mathbb{A}\mathcal{E}_1+\mathbb{R}^{-1}\mathbb{B}\mathcal{E}_2+\mathbb{R}^{-1}\mathbb{C}\mathcal{E}_3 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \\ i_3' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \\ i_3'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} i_1''' \\ i_2''' \\ i_3''' \end{pmatrix}$$



§36.7.- Método de las mallas o de Maxwell



Asignamos a cada malla una ***intensidad de malla*** (*I*) de sentido arbitrario.

$$\begin{cases} n=2 \\ r=3 \\ m=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3=I_1(r_1+R_1)+(I_1-I_2)(r_3+R_3) \\ \mathcal{E}_3-\mathcal{E}_2=I_2(r_2+R_2)+(I_2-I_1)(r_3+R_3) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3=I_1(r_1+R_1+r_3+R_3)-I_2(r_3+R_3) \\ \mathcal{E}_3-\mathcal{E}_2=-I_2(r_3+R_3)+I_2(r_2+R_2+r_3+R_3) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{(1)}=R_{11}I_1-R_{12}I_2 \\ \mathcal{E}_{(2)}=-R_{21}I_2+R_{22}I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{(1)} \\ \mathcal{E}_{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11} & \mp R_{12} \\ \mp R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{E}=\mathbb{R}\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}=\mathbb{R}^{-1}\mathbb{E}$$

Notación:

- $\mathcal{E}_{(i)}$ - f.e.m. neta de la malla *i*-ésima;
- I_i - intensidad de malla *i*-ésima;
- R_{ii} - resistencia de la malla *i*-ésima;
- R_{ij} - resistencia común a las mallas *i*-ésima y *j*-ésima.

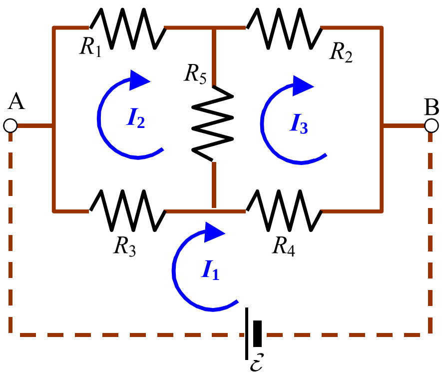
El signo de R_{ij} es negativo si I_i y I_j se restan; el signo de R_{ij} es positivo si I_i y I_j se suman.

El método de Maxwell nos proporciona m ($< r$) ecuaciones con m incógnitas (*v.g.*, las m intensidades de malla). A partir de las m intensidades de malla, determinaremos las r intensidades de rama; así, en el circuito de la ilustración, serán:

$$i_1 = I_1 \qquad i_2 = -I_2 \qquad i_3 = I_2 - I_1$$

§36.8.- Aplicaciones del método de Maxwell

36.8.a. Cálculo de la resistencia equivalente

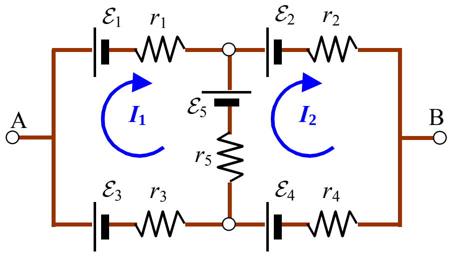


Añadimos un generador arbitrario y calculamos la intensidad que proporciona al circuito.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}}} \quad \to \quad \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}}$$

36.8.b. Cálculo de la f.e.m. equivalente



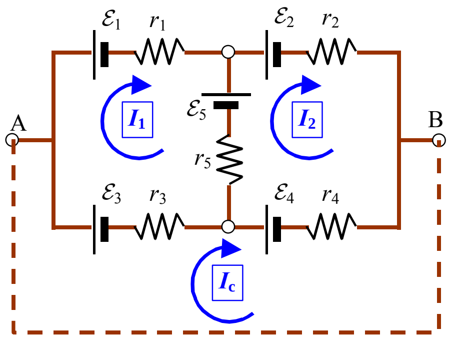
Abierto: El valor de la f.e.m. equivalente coincide con el de la d.d.p. entre A y B en circuito abierto. Resolvemos el circuito para calcular las intensidades de malla I_1, I_2,...

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{(1)} \\ \mathcal{E}_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} I_1 = \ldots \\ I_2 = \ldots \end{cases}$$

y determinamos V_{AB} en la forma habitual: $\boxed{\mathcal{E}_{\text{eq}} = V_{\text{AB}} = \sum IR - \sum \mathcal{E}}$

En corto: Cortocircuitamos entre A y B y determinamos la intensidad *en corto* (I_c) que puede proporcionar el circuito entre A y B:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{(c)} \\ \mathcal{E}_{(1)} \\ \mathcal{E}_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{cc} & -R_{c1} & -R_{c2} \\ -R_{1c} & R_{11} & -R_{12} \\ -R_{2c} & -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_c \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \to \quad I_c = \ldots$$



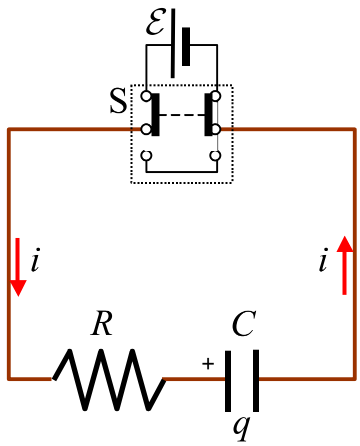
y la resistencia interna del generador equivalente entre A y B será:

$$I_c = \frac{\mathcal{E}_{eq}}{r_{eq}} \quad \to \quad \boxed{r_{eq} = \frac{\mathcal{E}_{eq}}{I_c}}$$

Aclaración: La r_{eq} también puede calcularse mediante el procedimiento descrito en 36.8.a, sin más que *cortocircuitar* (eliminar) todas las f.e.m (manteniendo las resistencias internas de los generadores).

§36.9.- Circuito RC en C.C.

36.9.a. Carga de un condensador



En el instante inicial el conmutador (S) está en la posición inferior y el condensador está descargado. Al conectar el generador ($t = 0$), comienza a circular la carga.

$$\mathcal{E} = V = v_R + v_C = Ri + \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC} \qquad \begin{cases} t = 0^+ & q = 0 \quad i = I_0 = \dfrac{V}{R} \\ t = \infty & q = Q_f = CV \quad i = 0 \end{cases}$$

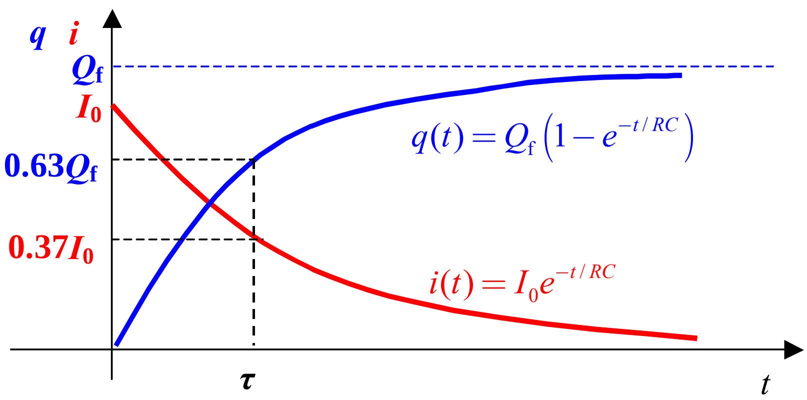
$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC} \quad \to \quad \int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \quad \to \quad \ln\frac{i}{I_0} = -\frac{t}{RC} \quad \to \quad \boxed{i(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$

Constante de tiempo: $\tau = RC$; para $t = \tau \quad \to \quad i(\tau) = I_0 e^{-1} = I_0/e = 0.37 I_0$

τ es el tiempo que transcurre en el proceso de carga hasta que la corriente se reduce al 37% de su valor máximo inicial.

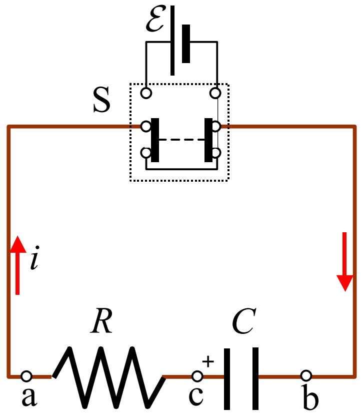
$$\frac{dq}{dt} = i = I_0 e^{-t/RC} \quad \to \quad \int_0^{q(t)} dq = I_0 \int_0^t e^{-t/RC} dt \to$$

$$q(t) = I_0 \left[-RCe^{-t/RC} \right]_0^t = I_0 RC\left(1 - e^{-t/RC}\right) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_f\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$



τ es el tiempo que transcurre en el proceso de carga hasta que el condensador adquiere el 63% de su carga máxima.

36.9.b. Descarga de un condensador



El condensador está inicialmente cargado con una carga Q_0. En el instante $t = 0$ se pasa el conmutador a la posición inferior, iniciándose la descarga a través de la resistencia.

$$V_{ab} = v_R + v_C = iR + \frac{q}{C} = 0$$

$$i = -\frac{q}{RC} \quad \begin{cases} t = 0^+ & q = Q_0 \quad i = I_0 = -\dfrac{Q}{RC} \\ t = \infty & q = 0 \qquad i = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{RC} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{i}{I_0} = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \boxed{i(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$

Constante de tiempo: $\tau = RC$; para $t = \tau \quad \rightarrow \quad i(\tau) = I_0 e^{-1} = I_0 / e = 0.37 I_0$

τ es el tiempo que transcurre en el proceso de descarga hasta que la corriente se reduce al 37% de su valor máximo inicial.

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{Q_0}^{q(t)} \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t \rightarrow$$

$$\ln\frac{q(t)}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \boxed{q(t) = Q_0 e^{-t/RC}}$$

τ es el tiempo que transcurre en el proceso de descarga hasta que el condensador reduce su carga hasta el 37 % de su carga inicial.