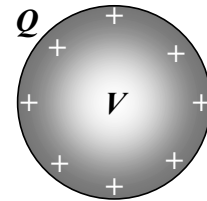


Tema 33.- Capacidad eléctrica

§33.1.- Capacidad eléctrica

- Concepto desarrollado por Faraday (1853): Capacitancia
- Conductor aislado: $C = \frac{Q}{V}$ ($V_\infty = 0$)
- Unidad de capacitancia: $\frac{\text{culombio}}{\text{voltio}} = \frac{C}{V} = F$ (faradio)



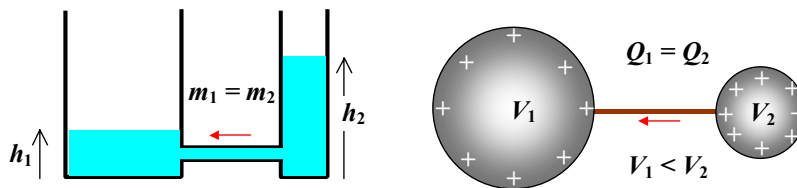
Ejemplo: Capacidad de un conductor esférico

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \rightarrow C = \frac{Q}{V} = \boxed{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{1}{4\pi} \frac{[C]}{[R]} = \frac{F}{m} \rightarrow \boxed{\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}}$$

- Ejemplo: capacitancia de la Tierra = $4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 = 0.7 \times 10^{-3} F = 0.7 \text{ mF}$
- 1 F es una capacitancia muy grande; son usuales mF, μF , nF y pF

¿Qué representa la capacitancia de un conductor?

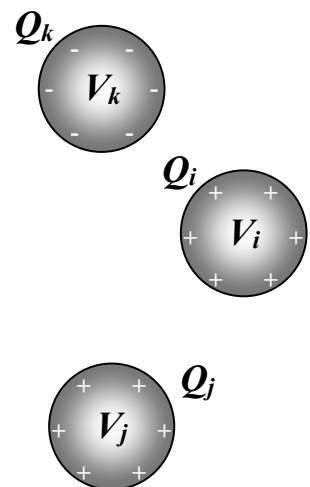


§33.2.- Sistemas de conductores. Condensadores.

El potencial de un conductor depende de su propia carga y de otras cargas próximas:

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_i}{R_i} + \sum_{i \neq j} \frac{Q_j}{r_{ij}} \right)$$

Así, el potencial de una esfera con carga positiva disminuye en presencia de otra esfera con carga negativa. En consecuencia, su capacidad ($C = Q/V$) aumenta.



Condensador: Sistema formado por dos conductores con cargas iguales pero de signo opuesto.

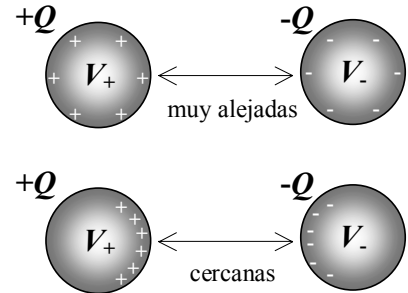
Muy alejadas:

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{R} \quad \rightarrow \quad V_{+-} = V_+ - V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{R}$$

Cercanas:

- No podemos calcular V_{+-} como antes.
- La d.d.p. V_{+-} disminuye.
- Permite almacenar carga sin grandes d.d.p.

Capacitancia del condensador:
$$C = \frac{Q}{V_{+-}}$$

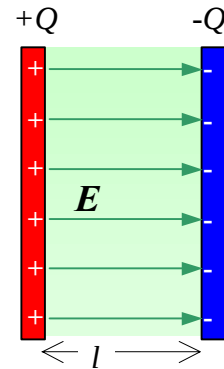


§33.3.- Cálculo de la capacitancia

33.3.a. Condensador plano

$$q = \sigma S \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad V_{+-} = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_+^- E dl = E l$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma S}{El} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} l} \quad \rightarrow \quad \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{l}}$$



Ejemplo: $C = 1 \text{ F}$, $l = 1 \text{ mm}$ $S = \frac{Cl}{\epsilon_0} = \frac{1 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^8 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad 10.6 \text{ km de lado}$

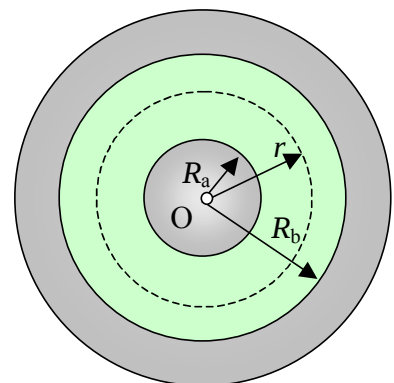
33.3.b. Condensador esférico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}} = \boxed{4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_b}{R_b - R_a}}$$

Si $R_b \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 R_a \quad (\text{esfera})$



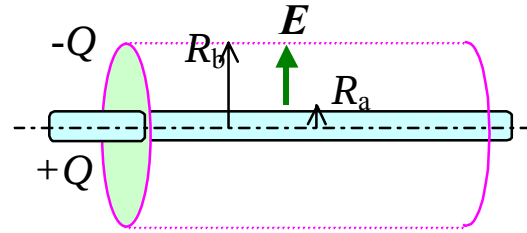
33.3.c. Condensador cilíndrico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q/l}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_b}{R_a}$$

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_b/R_a)}$$

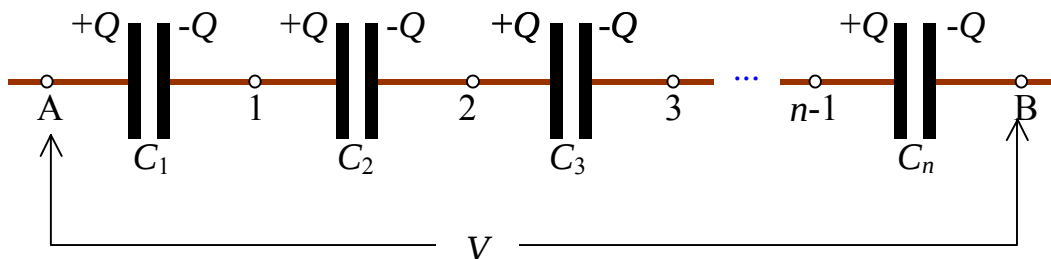
Si $R_b \rightarrow \infty \rightarrow C = 0$ (???)



§33.4.- Asociación de condensadores

33.4.a. Condensadores en serie

- Misma carga en todos ellos
- Se reparte la tensión: $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots$ (divisor de tensión)

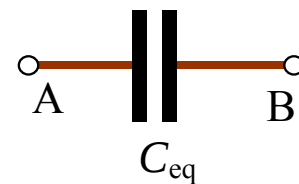


$$V_{A1} = \frac{Q}{C_1} \quad V_{12} = \frac{Q}{C_2} \quad V_{23} = \frac{Q}{C_3} \quad \dots$$

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + \dots = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right) = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots = \sum \frac{1}{C_i}$$

Para n condensadores idénticos: $C_{eq} = \frac{C}{n}$



33.4.b. Condensadores en paralelo

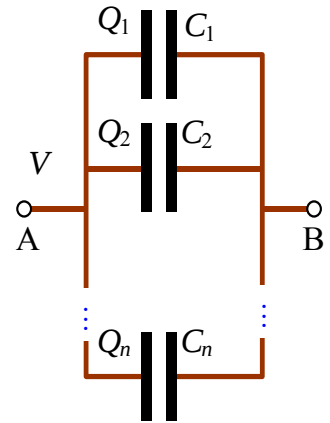
- Misma tensión en todas ellas
- Se reparte la carga: $V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \dots$

$$Q_1 = C_1 V_{AB} \quad Q_2 = C_2 V_{AB} \quad Q_3 = C_3 V_{AB} \quad \dots$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = V_{AB} (C_1 + C_2 + \dots) = V_{AB} C_{eq}$$

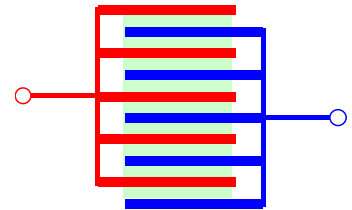
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots = \sum C_i$$

Para n condensadores idénticos: $C_{eq} = nC$



33.4.c. Capacitancias variables

Condensadores variables de aire (sintonía)



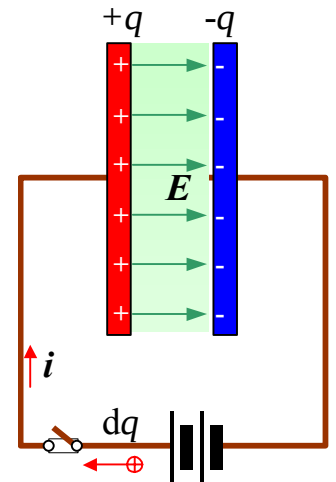
§33.5.- Energía almacenada en un condensador

Tanto la carga como la d.d.p. entre bornes del condensador van aumentando con el tiempo; *i.e.*, $q = q(t)$, $v = v(t)$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \xrightarrow{\text{finalmente}} \quad V = \frac{Q}{C}$$

$$dW = v dq \rightarrow W = \int_0^Q v dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\therefore W = U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$



Esta energía está almacenada en el campo eléctrico.

Densidad de energía:
$$u = \frac{U}{Sl} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{Sl} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{l} \frac{(El)^2}{Sl} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

§33.6.- Energía del campo eléctrico

En general:
$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

§33.7.- Presión electrostática

Desplazamiento virtual δr de la superficie del conductor

$$\delta W = F \delta r = \delta U = u \delta \mathcal{V} = u(S \delta r) \rightarrow p = \frac{F}{S} = u$$

$$\text{Presión electrostática: } p = u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

La presión electrostática es más intensa cuanto mayor es la curvatura (menor el radio de curvatura).

