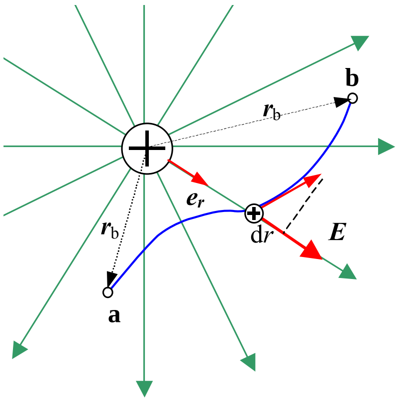
Tema 32.- Potencial eléctrico

§32.1.- Circulación del campo eléctrico



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (\text{Campo central} \rightarrow \text{conservativo})$$

En efecto:

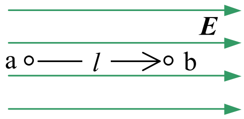
$$\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b =$$

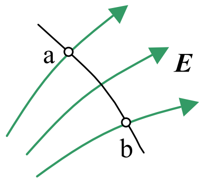
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right) = -(V_b - V_a) \quad \rightarrow \quad \boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

La circulación del campo entre dos puntos es independiente del camino seguido y se expresa como la diferencia de valores que toma una cierta función de punto, que se denomina "potencial eléctrico", en los dos puntos.

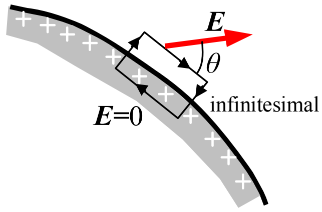
Casos particulares:

- $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b E\,dl \quad \text{Si } E = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = El$
- $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$
- $\mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$
- En la superficie de un conductor:





$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = El\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 90^{\circ} \qquad (\text{razones de simetría})$$



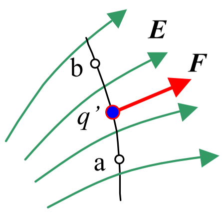
§32.2.- Trabajo y energía potencial electrostática

32.2.a. Energía potencial de una carga en el campo

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = q'\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -(U_b - U_a)$$

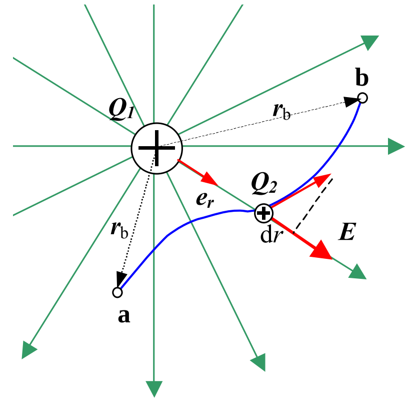
$$U_b - U_a = -q'\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad U_b = U_a - q'\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$U_P = \cancel{U_\infty} - q'\int_\infty^P \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = q'\int_P^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad U_P = W_{P\infty} = \int_P^\infty \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$



La energía potencial de una carga situada en un punto de un campo electrostático es numéricamente igual al trabajo que realiza el campo sobre ella cuando se desplaza desde el punto hasta el infinito.

32.2.b. Energía potencial de un sistema de dos cargas puntuales



$$U_b - U_a = -Q_2 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \ldots = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = -W_{ab}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}} \quad \text{(energía del sistema)}$$

§32.3.- Potencial

Se define el potencial en un punto de un campo eléctrico como la energía que tendría la unidad de carga situada en ese punto.

$$V = \frac{U}{q'} \quad \rightarrow \quad U = q'V$$

$$\frac{W_{ab}}{q'} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -(V_b - V_a) = V_{ab} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{ab} = q' V_{ab}}$$

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad V_b = V_a - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$V_P = \cancel{V_\infty} - \int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad V_P = \frac{W_{P\infty}}{q'}$$

- El potencial en un punto de un campo electrostático es numéricamente igual al trabajo que realiza el campo sobre la unidad de carga cuando se desplaza desde el punto hasta el infinito.
- Su unidad es el *voltio* (V): 1 V = 1 J / 1 C
- Se mide con el electrómetro (estático) o con el voltímetro (corriente).

§32.4.- Cálculo de diferencias de potencial

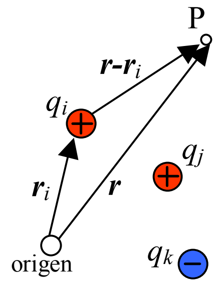
Para calcular la d.d.p. entre dos puntos disponemos de dos métodos:

1. Si conocemos la expresión del campo eléctrico, calculando la circulación de éste entre los dos puntos, a lo largo de un camino cualquiera que generalmente hacemos coincidir con una línea de campo. Esto es,

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

2. Directamente, a partir de la expresión del potencial creado por una carga puntual q en un punto del espacio situado a una distancia r de la misma. Esto es

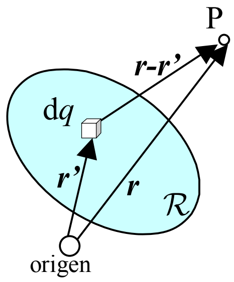
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{con } V = 0 \text{ para } r \to \infty$$



32.4.a. Distribuciones discretas de carga

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

32.4.b. Distribuciones continuas de carga



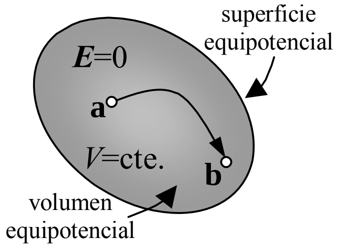
$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \to \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

extendida la integral a todo el recinto R ocupado por la carga

Distribución en volumen	$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V} \quad \to \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho\,\mathrm{d}\mathcal{V}}{\lvert\mathbf{r} - \mathbf{r}'\rvert}$
Distribución superficial	$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S \quad \to \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S} \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\lvert\mathbf{r} - \mathbf{r}'\rvert}$
Distribución lineal	$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l \quad \to \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L} \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{\lvert\mathbf{r} - \mathbf{r}'\rvert}$

§32.5.- Ejemplos de cálculo del potencial

32.5.a. Conductor en equilibrio



En el interior del conductor:

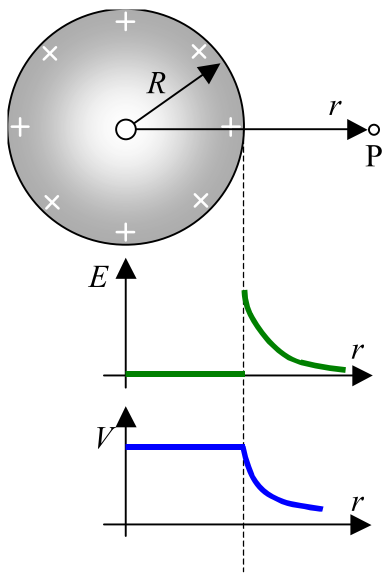
$$\mathbf{E} = 0 \quad \to \quad V_{\mathrm{ab}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \to \quad V = \text{cte.}$$

En el exterior, cerca de su superficie:

$$\mathbf{E} \perp \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \to \quad \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \to \quad V_{\mathrm{ab}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \to \quad V = \text{cte.}$$

Todos los puntos de conductor se encuentran al mismo potencial

32.5.b. Esfera conductora cargada

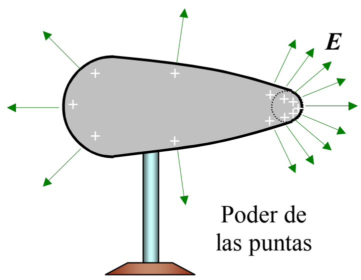


$$\begin{cases} r > R \\ \text{(exterior)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \quad \text{(T. de Gauss)} \\ V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_r^\infty \dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = R \\ \text{(superficie)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2} \\ V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < R \\ \text{(interior)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E = 0 \quad \text{(T. de Gauss)} \\ V = V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} \end{cases}$$

- Para la esfera conductora se verifica que $\boxed{V_0 = E_0 R}$
- Rigidez dieléctrica del aire, $E_{\text{máx}} \approx 3\times10^6$ V/m
  - Para R = 1 cm, será $V_{\text{máx}}$ = 30 kV
  - Para R = 1 m, será $V_{\text{máx}}$ = 3 MV
- Poder de la puntas:

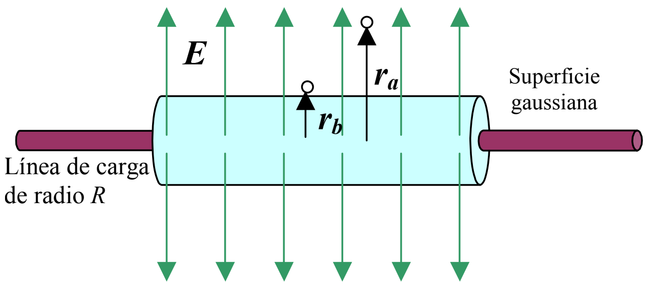


Poder de las puntas

$$E = \frac{V}{R} \rightarrow \boxed{E \propto \frac{1}{R}} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\sigma \propto \frac{1}{R}}$$

32.5.c. Línea de carga

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\lambda}{r} \quad \text{(T. de Gauss)} \\ V_{\text{ab}} = \dfrac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_a^b \dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_{\text{b}}}{r_{\text{a}}} \end{cases}$$

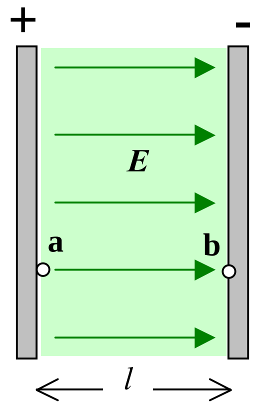


- Si tomamos $V_{\text{b}} = 0$ para b→∞, sería $V_{\text{a}} = \infty$ (¿?)
- Si tomamos $V_{\text{b}} = 0$ para b = R, será $V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R}{r} < 0$ (si $\lambda > 0$)

32.5.d. Par de placas planas y paralelas

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \text{cte} \qquad V_{\text{ab}} = \int_{\text{a}}^{\text{b}} \mathbf{E}\cdot \text{d}\mathbf{r} = \int_{\text{a}}^{\text{b}} E\,\text{d}x = El$$

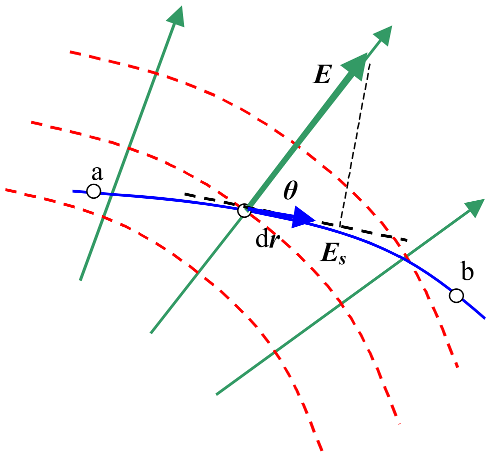
$$\rightarrow \quad V_{\text{ab}} = El \quad \rightarrow \quad E = \frac{V_{\text{ab}}}{l} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$$



§32.6.- Gradiente de potencial

$$V_{\text{b}} - V_{\text{a}} = -\int_{\text{a}}^{\text{b}} \mathbf{E}\cdot\text{d}\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \text{d}V = -\mathbf{E}\cdot\text{d}\mathbf{r} \doteq (\nabla V)\cdot\text{d}\mathbf{r}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E_x = -\partial V/\partial x \\ E_y = -\partial V/\partial y \\ E_z = -\partial V/\partial z \end{cases}$$



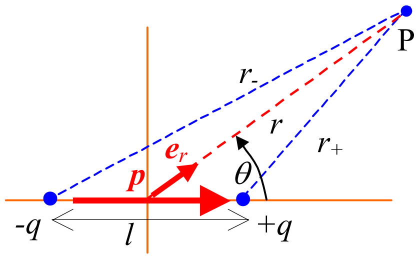
En una dirección determinada (d**r**):

$$\text{d}V = -\mathbf{E}\cdot\text{d}\mathbf{r} = -E\,\text{d}s\cos\theta = -E_s\text{d}s$$

$$E_s = -\frac{\text{d}V}{\text{d}s} \qquad \text{(derivada direccional)}$$

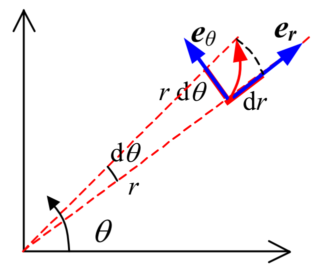
§32.7.- Potencial y campo eléctrico de un dipolo

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$



$$\text{si } r \gg l \quad \begin{cases} r_+ = r - \dfrac{l}{2}\cos\theta \\ r_- = r + \dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r_- - r_+ - \approx l\cos\theta \\ r_+ r_- = r^2 - \dfrac{l^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2 \end{cases}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r}{r^2}$$

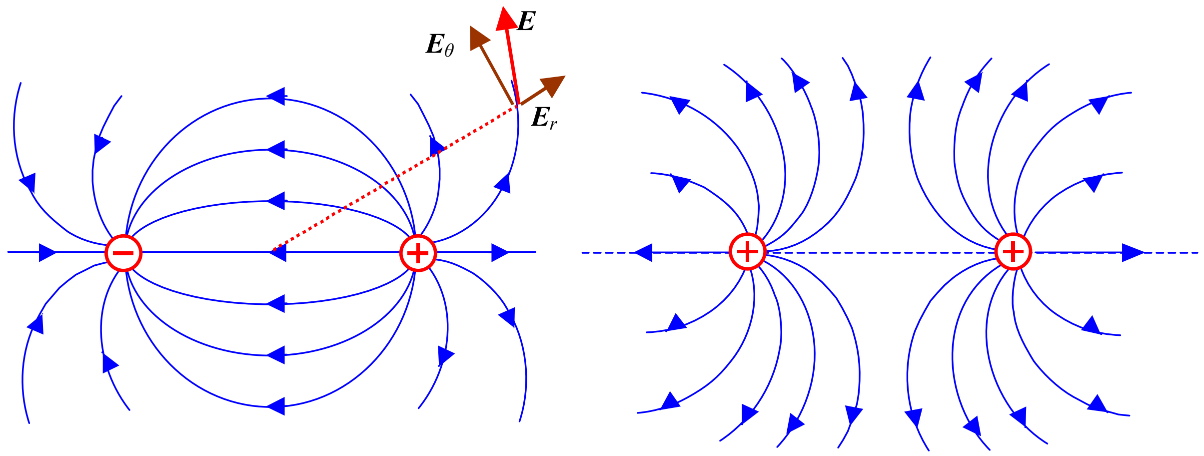


$$V = V(r,\theta) \qquad \text{d}\mathbf{r} = \text{d}r\,\mathbf{e}_r + r\text{d}\theta\,\mathbf{e}_\theta \qquad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p\cos\theta}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_\theta}{r^3} \end{cases}$$

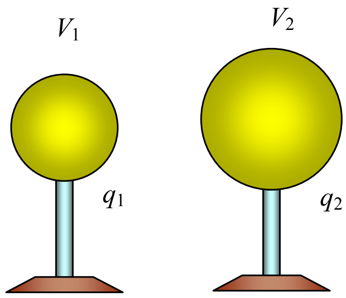
Eje del dipolo: $\theta = 0 \quad ; \quad \theta = 180^{\text{o}}$	$V = \pm\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^2}$	$E_r = \pm\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p}{r^3}$	$E_\theta = 0$
Mediatriz del dipolo: $\theta = \pm 90^{\text{o}}$	$V = 0$	$E_r = 0$	$E_\theta = +\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3}$

Líneas de campo en el dipolo



§32.8.- Reparto de carga entre conductores

- La carga neta total permanece constante
- Se transfiere carga hasta que se igualan los potenciales



32.8.a. Contacto externo

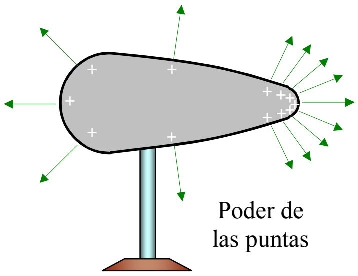
Esferas conductoras:

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \\ V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1'}{R_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2'}{R_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1' + q_2' = q \\ \dfrac{q_1'}{R_1} = \dfrac{q_2'}{R_2} \end{cases} \rightarrow \quad \dfrac{q_1'}{q_2'} = \dfrac{R_1}{R_2} \quad \text{(2 ec. 2 incogn.)}$$

Densidades:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \sigma=\varepsilon_0 E \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{q_1'/4\pi R_1^2}{q_2'/4\pi R_2^2}=\frac{q_1' R_2^2}{q_2' R_1^2}=\frac{R_2}{R_1}$$

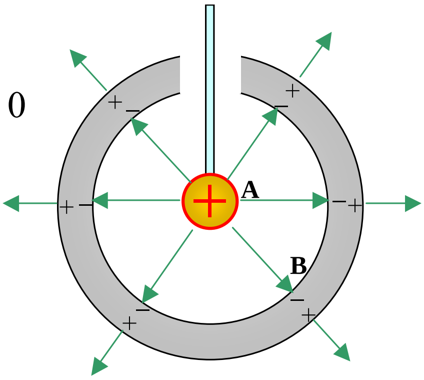
$$\boxed{\sigma R=\text{cte}}$$



La densidad superficial de carga es tanto mayor cuanto menor es el radio de curvatura (poder de las puntas)

32.8.b. Contacto interno

$$V_{AB}=\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2}=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)>0$$



- $\therefore \quad V_A > V_B$ con independencia de la carga que pueda tener el conductor externo.
- Se transfiere toda la carga del conductor interno al externo
- Fundamento de la máquina electrostática de Van der Graff

§32.9.- Inducción electrostática