

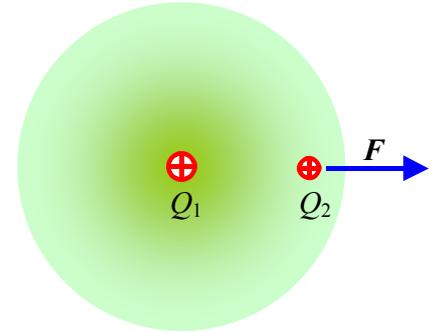
Tema 31.- Campo eléctrico

§31.1.- Campo eléctrico

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}$$

carga(1) \rightleftharpoons campo \rightleftharpoons carga(2)

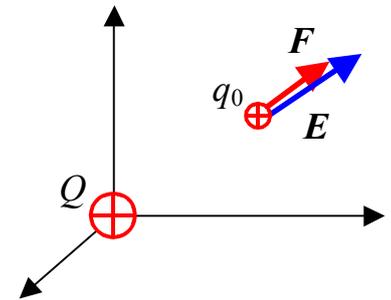
carga(1) \rightleftharpoons carga(2)



Los dos puntos de vista son equivalentes para la electrostática.

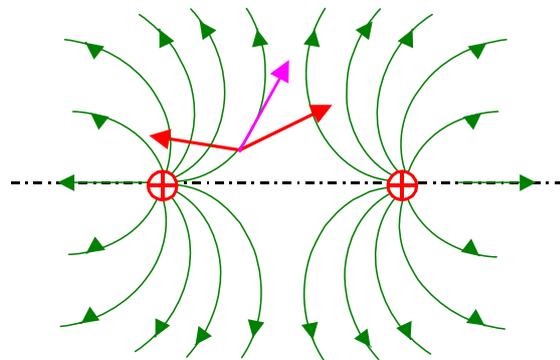
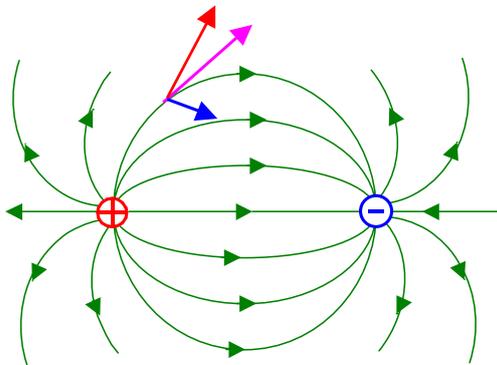
Velocidad de propagación de las perturbaciones del campo: $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.

Intensidad del campo: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0}}$



Líneas de campo: líneas tangentes en cada punto al campo eléctrico en ese punto.

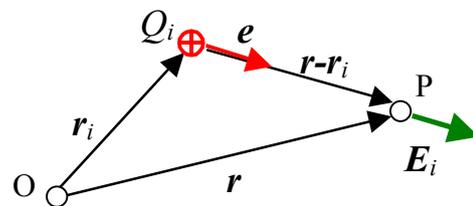
- Campos estacionarios o no estacionarios.
- Campos homogéneos (uniformes) y no homogéneos.



§31.2.- Principio de Superposición

Una carga aislada: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$



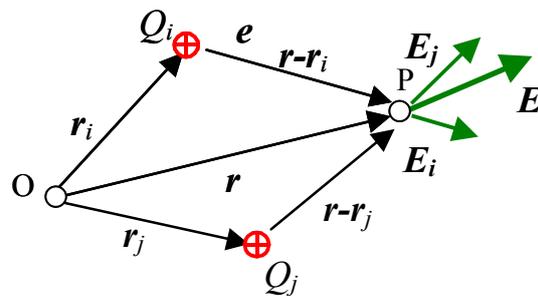
Principio de superposición: El campo eléctrico creado por cargas eléctricas distribuidas espacialmente es igual a la suma de los campos creados por cada una de ellas.

§31.3.- Campo eléctrico creado por una distribución de carga

31.3.a. Distribución discreta

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

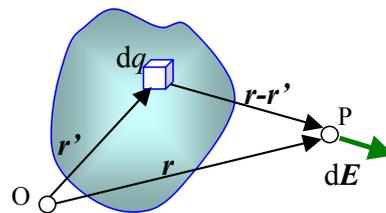


31.3.b. Distribución continua:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

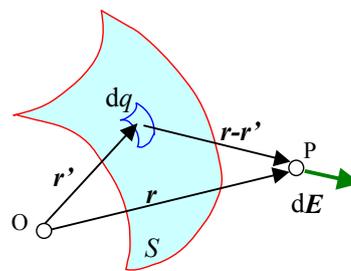
Volúmica

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



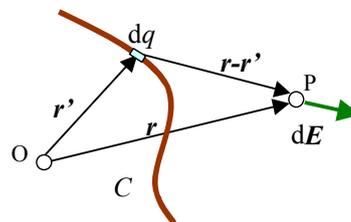
Superficial

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



Lineal

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



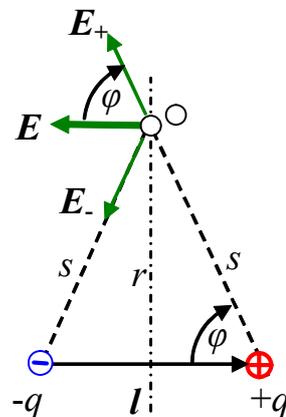
31.3.c. Dipolo eléctrico

Sobre el eje del dipolo: $E_{\pm} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s^2}$

$$E = 2E_{\pm} \cos\varphi = 2E_{\pm} \frac{l/2}{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{s^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{s^3}$$

Momento dipolar: $\mathbf{p} = ql$

Si $r \gg l \rightarrow r \approx s \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}$



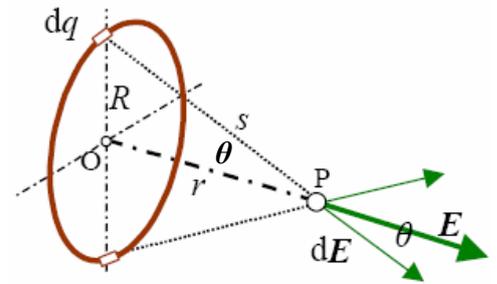
31.3.d. Anillo cargado

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2} \quad \cos\theta = \frac{r}{s}$$

$$E = \int dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{s^2} \int dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{s^3} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{s^3} Q$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{rQ}{(r^2 + R^2)^{3/2}}} \begin{cases} r=0 \rightarrow E_0=0 \\ r \gg R \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \text{(carga puntual)} \end{cases}$$



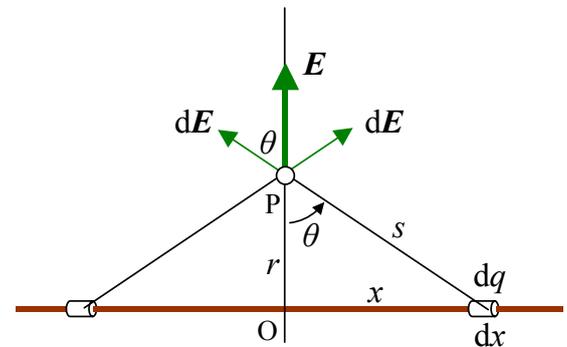
31.3.e. Distribución rectilínea indefinida

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos^2\theta$$

$$E = \int dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \cos^3\theta dx = \dots$$

$$x = r \operatorname{tg}\theta \rightarrow dx = r \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\dots = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\operatorname{sen}\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}}$$



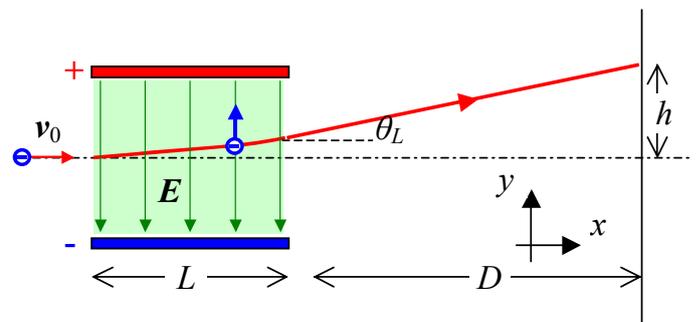
§31.4.- Fuerzas que ejerce el campo eléctrico

Sobre una carga puntual, de masa m : $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}}$

31.4.a. Experiencia de Thompson

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} = \text{cte.}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{2v_0^2} x^2 = \left(\frac{qE}{2mv_0^2} \right) x^2 \\ y_L = \left(\frac{qE}{2mv_0^2} \right) L^2 \end{cases}$$



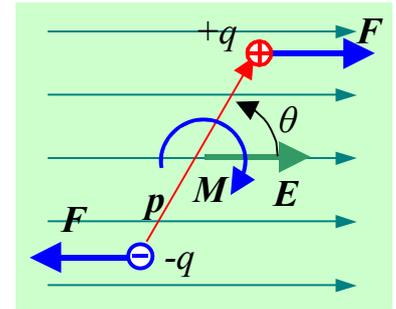
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{qE}{mv_0^2} \right) x \rightarrow \operatorname{tg} \theta_L = \left(\frac{qE}{mv_0^2} \right) L$$

$$h = y_L + D \operatorname{tg} \theta_L = \left(\frac{qE}{2mv_0^2} \right) L^2 + \left(\frac{qE}{mv_0^2} \right) LD = \frac{qE}{mv_0^2} \left(\frac{L}{2} + D \right) L$$

$$\text{Si } D \gg L \rightarrow h = \frac{qE}{mv_0^2} DL$$

31.4.b. Fuerza y momento sobre un dipolo.

En un campo uniforme, el dipolo se orienta en la dirección del campo.



$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} \quad \mathbf{F}_- = -q\mathbf{E} \quad \boxed{\mathbf{F} = 0}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_+ = q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \boxed{\mathbf{p} \times \mathbf{E}} \quad M = pE \operatorname{sen} \theta$$

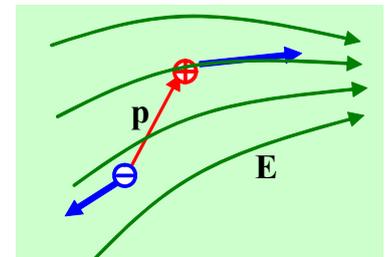
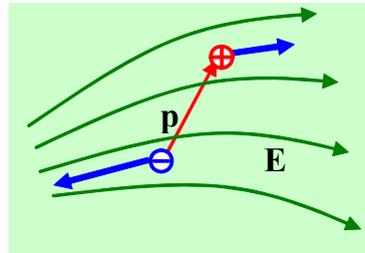
Trabajo y energía:

$$W = \int \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = - \int M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta = -pE [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\theta} = pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$W = -\Delta E_p \rightarrow \Delta E_p = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$\text{Si tomamos } E_p(\theta_0 = 90^\circ) = 0 \rightarrow E_p = -pE \cos \theta \rightarrow \therefore \boxed{E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$$

En un campo no uniforme, el dipolo se orienta en la dirección del campo y se desplaza hacia la región donde el campo sea más intenso.

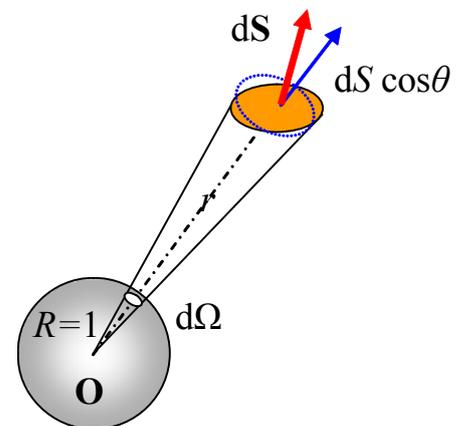


§31.5.- Concepto de ángulo sólido

Ángulo sólido bajo el cual se ve una superficie desde un punto

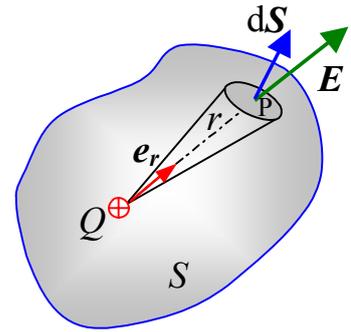
$$\frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{d\Omega}{1} \rightarrow d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \rightarrow \boxed{d\Omega = \frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}}{r^2}}$$

- Se mide en **estereorradianes** (sr)
- Superficie cerrada vista desde fuera: $\Omega = 0$
- Superficie cerrada vista desde dentro: $\Omega = 4\pi$ sr



§31.6.- Flujo del campo eléctrico.

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$



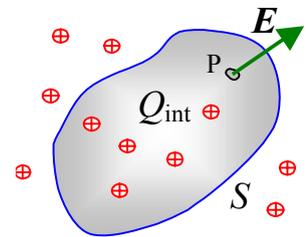
§31.7.- Teorema de Gauss.

Campo en P: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r$

Flujo a través de toda la superficie cerrada:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

En general, $\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i}$ (Teorema de Gauss)



Aplicando el teorema de la divergencia (de Gauss):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, dV \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \text{ (Teorema de Gauss)}$$

§31.8.- Aplicaciones del teorema de Gauss

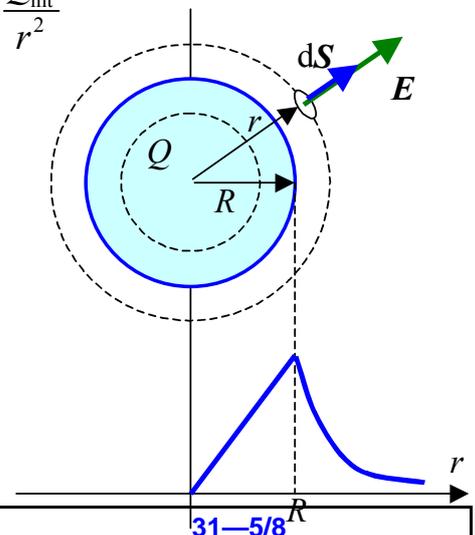
31.8.a. Distribución esférica uniforme de carga (volumen)

$$\underline{r > R} \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \, dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}}$$

$$\underline{r < R} \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \, dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{int}}}{r^2}$$

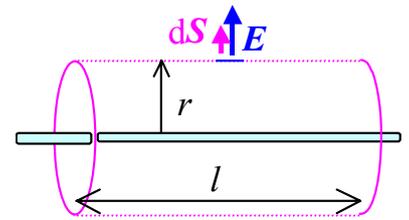
$$Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}} = \frac{Q}{V} V_{\text{int}} = \frac{r^3}{R^3} Q \rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}}$$

$$\underline{r = R} \quad \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}}$$



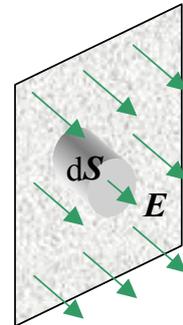
31.8.b. Distribución uniforme de carga en un hilo indefinido

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_{\text{lat}}} E dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}}$$



31.8.c. Plano infinito uniformemente cargado

$$\Phi = E \cdot S + E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

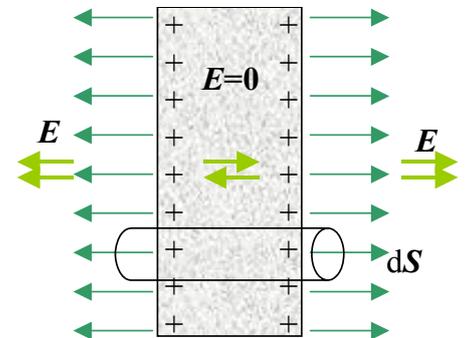


31.8.d. Lámina conductora

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(fuera)} \quad E = E_+ + E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \\ \text{(dentro)} \quad E = E_+ - E_+ = 0 \rightarrow \boxed{E = 0} \end{array} \right.$$

O aplicando el Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(fuera)} \quad \Phi = E \cdot S + E \cdot S = 2ES = \frac{2\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \\ \text{(dentro)} \quad E = 0 \end{array} \right.$$

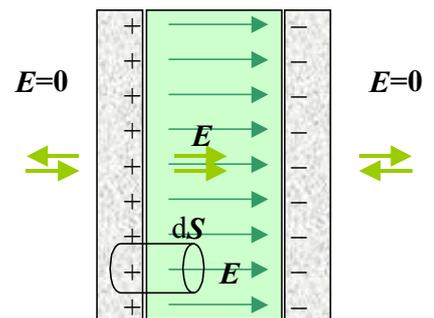


31.8.e. Láminas conductoras planas y paralelas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(dentro)} \quad E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \\ \text{(fuera)} \quad E = \pm E_+ \mp E_+ = 0 \rightarrow \boxed{E = 0} \end{array} \right.$$

O aplicando el Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(dentro)} \quad \Phi = E \cdot S + E \cdot S = 2ES = \frac{2\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \\ \text{(fuera)} \quad E = 0 \end{array} \right.$$

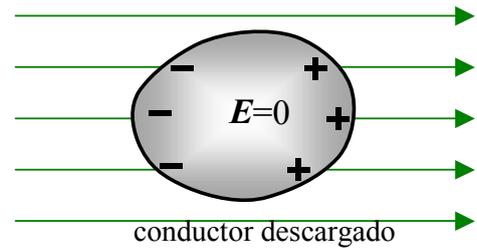


§31.9.- Campo eléctrico en un conductor en equilibrio.

Conductor descargado

- Colocamos un conductor descargado en un campo eléctrico externo.
- Se produce una redistribución de carga hasta que se alcanza el equilibrio.
- En el interior de conductor el campo es nulo.

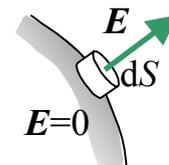
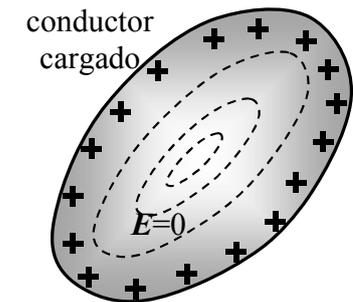
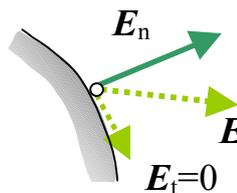
$$\mathbf{E} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \rho = 0$$



Conductor cargado

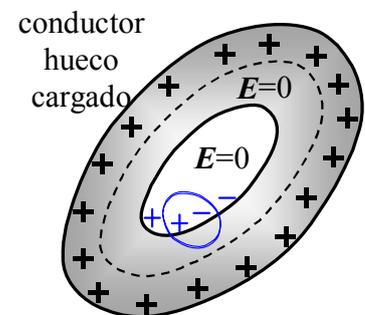
- En el interior del conductor el campo es nulo.
- La carga se sitúa en la superficie del conductor (una o poco más capas atómicas).
- En el exterior del conductor, cerca de su superficie, el campo es normal a la superficie y su magnitud es

$$d\Phi = E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Conductor cargado hueco

- El campo es nulo en el interior del conductor
- El campo es nulo en el hueco, ya que $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.
- La carga se sitúa en la superficie exterior del conductor.
- No hay carga en la superficie interior.
- Jaula o enfriadera de Faraday. Pantallas electrostáticas



Carga en el hueco de un conductor

- El campo es nulo en el interior del conductor
- El campo no es nulo en el hueco
- Aparece carga en la superficie interna del conductor.

