CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

(IT-LADE, IT-ITIS, BILINGÜE)

UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

«ANÁLISIS VECTORIAL»

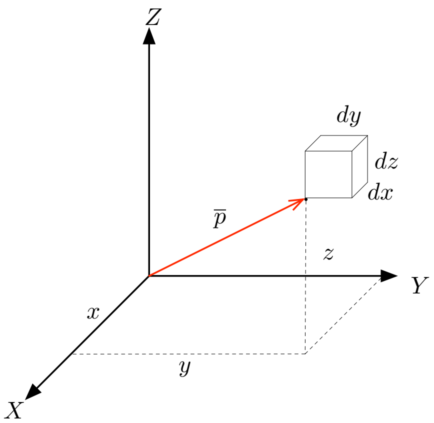
CURSO ACADÉMICO 08/09

1. Sistemas de coordenadas

Dependiendo de la geometría del problema se utilizará uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

- Coordenadas cartesianas: (x, y, z).
- Coordenadas cilíndricas: (ρ, ϕ, z).
- Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ).

1.1. Coordenadas cartesianas



Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas cartesianas se representa por:

$$\overline{p} = x \cdot \overline{u}_x + y \cdot \overline{u}_y + z \cdot \overline{u}_z$$

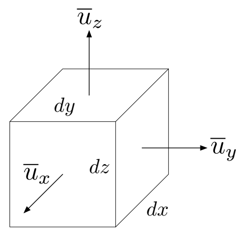
A partir de la figura anterior, se pueden obtener los siguientes resultados.

$\rightarrow$ Diferencial de línea:

$$d\overline{l} = dx \cdot \overline{u}_x + dy \cdot \overline{u}_y + dz \cdot \overline{u}_z.$$

$\rightarrow$ Diferencial de superficie:

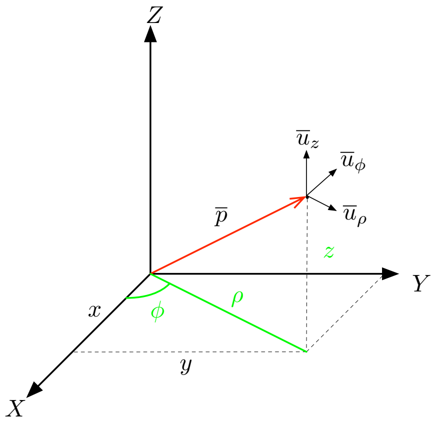
- $z =$ cte.: $d\overline{s} = dxdy \cdot \overline{u}_z$,
- $y =$ cte.: $d\overline{s} = dxdz \cdot \overline{u}_y$,
- $x =$ cte.: $d\overline{s} = dydz \cdot \overline{u}_x$.



$\rightarrow$ Diferencial de volumen:

$$dv = dxdydz.$$

1.2. Coordenadas cilíndricas



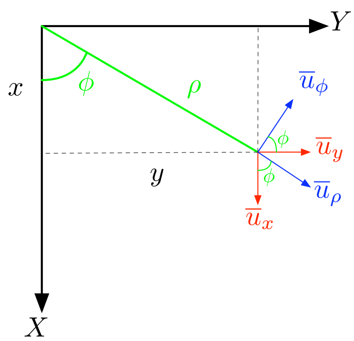
Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas cilíndricas se representa por:

$$\overline{p} = \rho \cdot \overline{u}_\rho + \phi \cdot \overline{u}_\phi + z \cdot \overline{u}_z,$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & \quad \rho \quad \leqslant \infty, \\ 0 \leqslant & \quad \phi \quad \leqslant 2\pi, \\ -\infty \leqslant & \quad z \quad \leqslant \infty. \end{aligned}$$

La relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas de un punto $\overline{p}$ puede obtenerse en el plano XY.



De la figura de la izquierda puede extraerse fácilmente que:

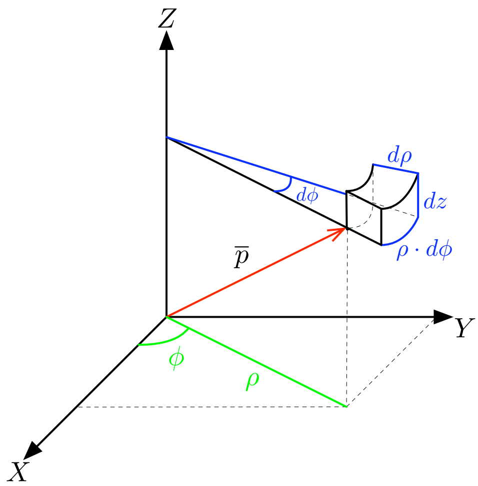
$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\phi, \\ y &= \rho \cdot \operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $z = z$ se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\phi, \\ y &= \rho \cdot \operatorname{sen}\phi, \\ z &= z. \end{aligned}}$$

→ Diferencial de línea:

$$d\overline{l} = d\rho \cdot \overline{u}_\rho + \rho d\phi \cdot \overline{u}_\phi + dz \cdot \overline{u}_z.$$



→ Diferencial de superficie:

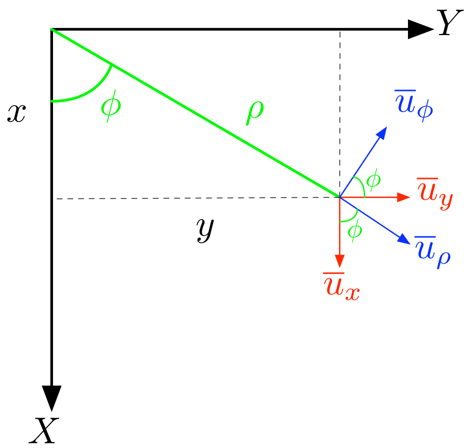
- $\rho =$ cte.: $\quad d\overline{s} = \rho d\phi dz \cdot \overline{u}_\rho$,
- $\phi =$ cte.: $\quad d\overline{s} = d\rho dz \cdot \overline{u}_\phi$,
- $z =$ cte.: $\quad d\overline{s} = \rho d\rho d\phi \cdot \overline{u}_z$.

→ Diferencial de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.$$

1.2.1. Cambio de coordenadas cilíndricas-cartesianas

Para cambiar de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas, y viceversa, es necesario relacionar los vectores directores de cada sistema de coordenadas. A partir de la siguiente figura



se pueden obtener las siguientes relaciones:[1]

CILÍNDRICAS-CARTESIANAS

$$\overline{u}_\rho = \cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y$$
$$\overline{u}_\phi = -\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y$$
$$\overline{u}_z = \overline{u}_z$$

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= a_\rho \cdot \overline{u}_\rho + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi + a_z \cdot \overline{u}_z \\
&= a_\rho \left(\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y\right) + \\
&\quad + a_\phi \left(-\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y\right) \\
&\quad + a_z \cdot \overline{u}_z = \\
&= \underbrace{\left(a_\rho \cdot \cos\phi - a_\phi \cdot \operatorname{sen}\phi\right)}_{a_x} \cdot \overline{u}_x + \\
&\quad + \underbrace{\left(a_\rho \cdot \operatorname{sen}\phi + a_\phi \cdot \cos\phi\right)}_{a_y} \cdot \overline{u}_y + \\
&\quad + \underbrace{a_z}_{a_z} \cdot \overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix}$$

CARTESIANAS-CILÍNDRICAS

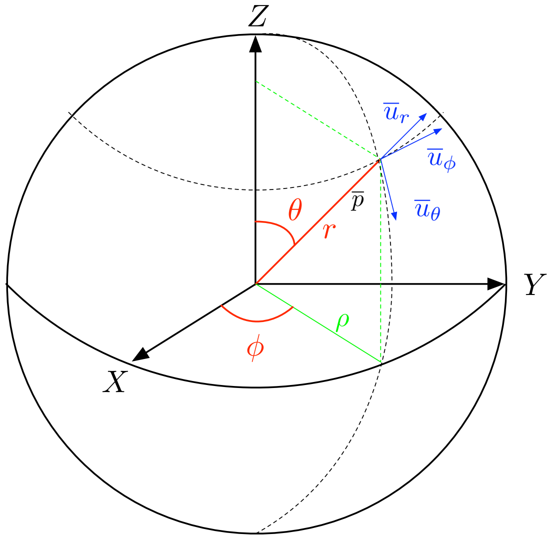
$$\overline{u}_x = \cos\phi \cdot \overline{u}_\rho - \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_\phi$$
$$\overline{u}_y = \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_\rho + \cos\phi \cdot \overline{u}_\phi$$
$$\overline{u}_z = \overline{u}_z$$

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= a_x \cdot \overline{u}_x + a_y \cdot \overline{u}_y + a_z \cdot \overline{u}_z \\
&= a_x \left(\cos\phi \cdot \overline{u}_\rho - \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_\phi\right) + \\
&\quad + a_y \left(\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_\rho + \cos\phi \cdot \overline{u}_\phi\right) \\
&\quad + a_z \cdot \overline{u}_z = \\
&= \underbrace{\left(a_x \cdot \cos\phi + a_y \cdot \operatorname{sen}\phi\right)}_{a_\rho} \cdot \overline{u}_\rho + \\
&\quad + \underbrace{\left(-a_x \cdot \operatorname{sen}\phi + a_y \cdot \cos\phi\right)}_{a_\phi} \cdot \overline{u}_\phi + \\
&\quad + \underbrace{a_z}_{a_z} \cdot \overline{u}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

[1]Nótese que, para evitar confusiones con las variables que determinan los sistemas de coordenadas cartesiano (x, y, z) y cilíndrico (ρ, ϕ, z), los coeficientes que multiplican a los vectores directores se han sustituido por (a_x, a_y, a_z) y (a_ρ, a_ϕ, a_z) en cada sistema de coordenadas respectivamente.

1.3. Coordenadas esféricas



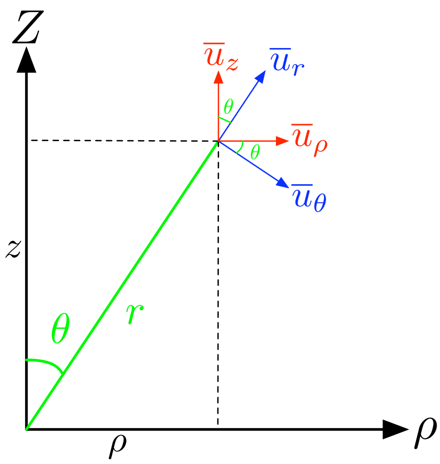
Un punto $\overline{p}$ genérico en coordenadas esféricas se representa por:

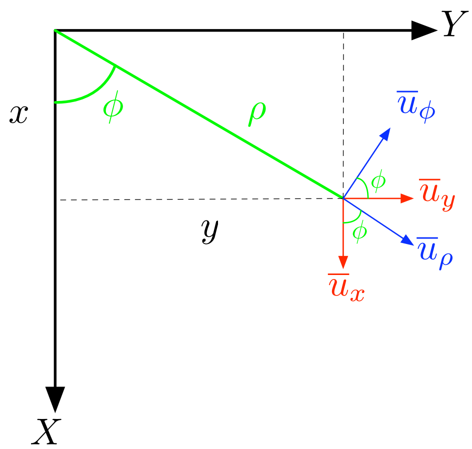
$$\overline{p} = r \cdot \overline{u}_r + \theta \cdot \overline{u}_\theta + \phi \cdot \overline{u}_\phi,$$

donde:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant & r & \leqslant \infty, \\ 0 \leqslant & \theta & \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant & \phi & \leqslant 2\pi. \end{array}$$

La relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas de un punto $\overline{p}$ se obtiene en los planos $Z\rho$ y XY:





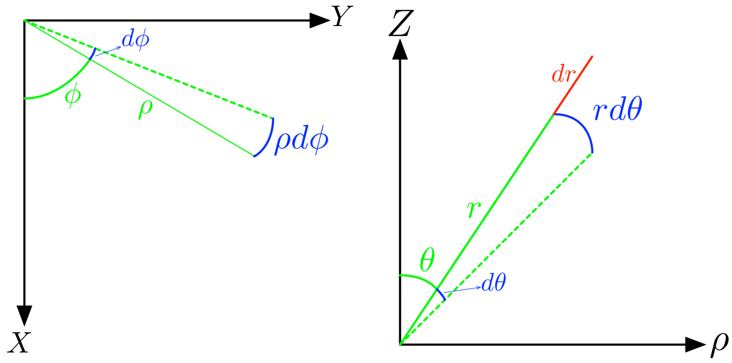
$$z = r\cos\theta,$$
$$\rho = r \operatorname{sen}\theta.$$

$$x = \rho\cos\phi,$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\phi.$$

Relacionando ambos resultados se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}}$$

Sean las figuras:



que representan una variación lineal infinitesinal en cada una de las direcciones del sistema de coordenadas esférico. Teniendo en cuenta que $\rho d\phi = r \operatorname{sen}\theta d\phi$ se cumplen las siguientes relaciones.

→ Diferencial de línea:

$$d\bar{l} = dr \cdot \overline{u}_r + rd\theta \cdot \overline{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot \overline{u}_\phi.$$

→ Diferencial de superficie:

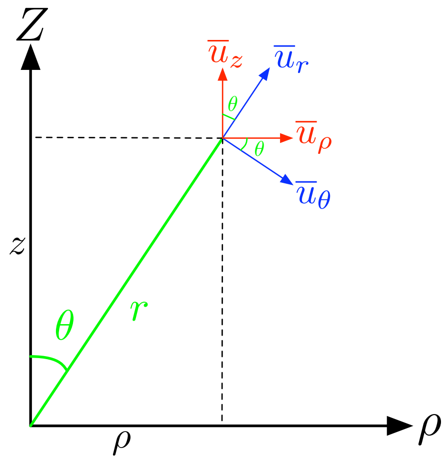
$$\begin{aligned} r = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \cdot \overline{u}_r, \\ \theta = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r \operatorname{sen}\theta dr d\phi \cdot \overline{u}_\theta, \\ \phi = \text{cte.:} \quad & d\overline{s} = r dr d\theta \cdot \overline{u}_\phi. \end{aligned}$$

→ Diferencial de volumen:

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi.$$

1.3.1. Cambio de coordenadas esféricas-cilíndricas

La relación entre los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico se puede obtener a partir de la siguiente figura



ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= a_r \cdot \overline{u}_r + a_\theta \cdot \overline{u}_\theta + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi = \\
&= a_r \left(\cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\rho\right) + \\
&\quad + a_\theta \left(-\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot \overline{u}_\rho\right) \\
&\quad + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi = \\
&= \underbrace{\left(a_r \cdot \operatorname{sen}\theta + a_\theta \cdot \cos\theta\right)}_{a_\rho} \cdot \overline{u}_\rho + \\
&\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi} \cdot \overline{u}_\phi + \\
&\quad + \underbrace{\left(a_r \cdot \cos\theta - a_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\right)}_{a_z} \cdot \overline{u}_z .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}
$$

CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_\rho &= \cos\theta \cdot \overline{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_r \\
\overline{u}_z &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\theta + \cos\theta \cdot \overline{u}_r \\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= a_\rho \cdot \overline{u}_\rho + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi + a_z \cdot \overline{u}_z = \\
&= a_\rho \left(\cos\theta \cdot \overline{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_r\right) + \\
&\quad + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi \\
&\quad + a_z \left(-\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\theta + \cos\theta \cdot \overline{u}_r\right) = \\
&= \underbrace{\left(a_\rho \cdot \operatorname{sen}\theta + a_z \cdot \cos\theta\right)}_{a_r} \cdot \overline{u}_r + \\
&\quad + \underbrace{\left(a_\rho \cdot \cos\theta - a_z \cdot \operatorname{sen}\theta\right)}_{a_\theta} \cdot \overline{u}_\theta + \\
&\quad + \underbrace{a_\phi}_{a_\phi} \cdot \overline{u}_\phi
\end{aligned}
$$

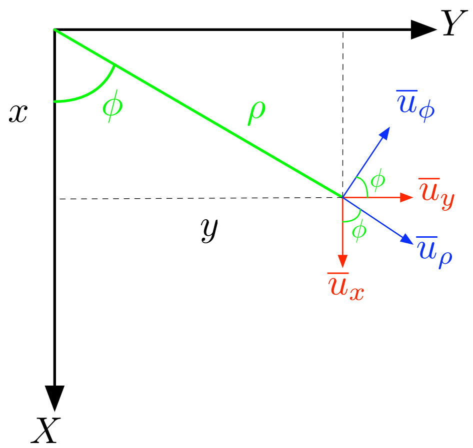
$$
\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix}
$$

1.3.2. Cambio de coordenadas esféricas-cartesianas

Para relacionar los vectores directores de los sistemas de coordenadas esférico y cartesiano se hace necesario el paso intermedio que relaciona los sistemas de coordenadas esférico y cilíndrico.

ESFÉRICAS A CARTESIANAS

Obteniéndose de la siguiente figura



que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_\rho &= \cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y \\
\overline{u}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y \\
\overline{u}_z &= \overline{u}_z
\end{aligned}$$

y sabiendo que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot \overline{u}_\rho \\
\overline{u}_\phi &= \overline{u}_\phi
\end{aligned}$$

tal y como se demostró en la sección 1.3.1, entonces, sustituyendo el primer sistema de ecuaciones en el segundo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \cos\theta \cdot \overline{u}_z + \operatorname{sen}\theta \cdot (\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y) \\
\overline{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z + \cos\theta \cdot (\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y) \\
\overline{u}_\phi &= (-\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y)
\end{aligned}$$

y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_r &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y + \cos\theta \cdot \overline{u}_z \\
\overline{u}_\theta &= \cos\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y - \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z \\
\overline{u}_\phi &= -\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y
\end{aligned}$$

Definiendo $\overline{p} = a_r \cdot \overline{u}_r + a_\theta \cdot \overline{u}_\theta + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= a_r \cdot \overline{u}_r + a_\theta \cdot \overline{u}_\theta + a_\phi \cdot \overline{u}_\phi = \\
&= a_r \left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y + \cos\theta \cdot \overline{u}_z\right) + \\
&\quad + a_\theta \left(\cos\theta\cos\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_y - \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{u}_z\right) + \\
&\quad + a_\phi \left(-\operatorname{sen}\phi \cdot \overline{u}_x + \cos\phi \cdot \overline{u}_y\right) = \\
&= \underbrace{\left(a_r \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\phi + a_\theta \cdot \cos\theta\cos\phi - a_\phi \cdot \operatorname{sen}\phi\right)}_{a_x} \cdot \overline{u}_x + \\
&\quad + \underbrace{\left(a_r \cdot \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + a_\theta \cdot \cos\theta\operatorname{sen}\phi + a_\phi \cdot \cos\phi\right)}_{a_y} \cdot \overline{u}_y + \\
&\quad + \underbrace{\left(a_r \cdot \cos\theta - a_\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\right)}_{a_z} \cdot \overline{u}_z +
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix}}
$$

CARTESIANAS-ESFÉRICAS

Siguiendo un procedimiento análogo al presentado anteriormente y partiendo de

$$
\overline{p} = a_x \cdot \overline{u}_x + a_y \cdot \overline{u}_y + a_z \cdot \overline{u}_z,
$$

se llega a:

$$
\boxed{\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}}
$$