José Morón

Fundamentos de

Teoría Electromagnética

I. Campos Estáticos



Maracaibo, 2014

Índice General

Capítulo 1

Introducción al Análisis Vectorial

1.1	Introducción 1
1.2	Escalares y Vectores 1
1.3	Multiplicación Vectorial 4
1.4	Vectores Base y Componentes Vectoriales 8
1.5	Vectores Unitarios Ortogonales en un Sistema de Coordenadas Cartesianas 9
1.6	Vectores Ortogonales Unitarios en un Sistema de Coordenadas Cilíndricas 11
1.7	Sistema de Coordenadas Esféricas. Vectores Ortogonales Unitarios 13
1.8	Producto Punto (Escalar) y Producto Cruz (Vectorial) 16
1.9	El Gradiente de una Función Escalar de la Posición 18
1.10	La Divergencia y el Rotacional en Coordenadas Cartesianas 21
1.11	Integrales de Línea, Superficie y Volumen 22
	1.11.1 Integrales de Línea 22
	1.11.2 Integrales de Superficie 29
1.12	Definición General del Gradiente de una Función Escalar 32
1.13	Definición General de la Divergencia de una Función Vectorial 33
1.14	La Divergencia en Coordenadas Cartesianas 35
1.15	El Teorema de la Divergencia; Tubos de Flujo 37
1.16	Definición General del Rotacional de una Función Vectorial 41
1.17	Teorema de Stokes 45
1.18	Puntos de Fuente y Puntos del Campo 50
	1.18.1 Fuentes Puntuales 51
1.19	El Teorema de Green y el Teorema de la Unicidad 52
1.20	Coordenadas Curvilíneas Ortogonales 54
	1.11.1 El Gradiente 56
	1.11.2 La Divergencia 56

1.11.4 El Laplaciano 57

- 1.21 El Teorema de Helmholtz 58
- 1.22Integración de la Ecuación de Poisson611.22.1Demostración del Teorema de Helmholtz63
- 1.23 Ángulos Sólidos 64
- 1.24 Resumen de las Definiciones Generales para el Gradiente, la Divergencia y el Rotacional 66
- 1.25 Identidades Vectoriales 67

PROBLEMAS 71

Capítulo 2

Campos Eléctricos Estáticos

- 2.1 Introducción 75
- 2.2 Ley de Coulomb 75
- 2.3 Intensidad de Campo Eléctrico 80
- 2.4 Campos Eléctricos Producidos por Distribuciones de Cargas 86
- 2.5 Líneas de Flujo y Gráficas de los Campos 92
- 2.6 Densidad de Flujo Eléctrico 94
- 2.7 Ley de Gauss 97
- 2.8 Aplicaciones de la Ley de Gauss 100
- 2.9 El Potencial Eléctrico 106
- 2.10 El Potencial Escalar de una Distribución de Carga 108
- 2.11 Relación entre E y V 112
- 2.12 El Dipolo Eléctrico 118
- 2.13 Densidad de Energía en el Campo Electrostático 121

PROBLEMAS 126

Capítulo 3

Medios Materiales en Campos Eléctricos Estáticos

- 3.1 Introducción 131
- 3.2 Propiedades de los Materiales y Tipos de Corrientes 131
- 3.3 Conductores 134
- 3.4 Polarización en Dieléctricos 141
- 3.5 Constante y Resistencia Dieléctricas 144
- 3.6 Dieléctricos Lineales, Isótropos y Homogéneos 146
- 3.7 La Ecuación de Continuidad y el Tiempo de Relajación 148
- 3.8 Condiciones de Frontera 150
- 3.9 Condiciones de Frontera para la Densidad de Corriente 153
- 3.10 Capacitancia y Capacitores 153
- 3.11 Relación Resistencia Capacitancia 158
- 3.12 Energía en el Campo Electrostático 159

PROBLEMAS 165

Capítulo 4

Solución de Problemas Electrostáticos

- 4.1 Ecuaciones del Campo y del Potencial 169
- 4.2 Distribuciones Axiales de Carga 174
- 4.3 El Dipolo 177
- 4.4 Formulación de Problemas con Valores de Frontera en Electrostática 179
- 4.5 Unicidad de la Solución 181
- 4.6 Solución de la Ecuación de Laplace 182
- 4.7 Soluciones Formales de la Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas 187

4.8 Soluciones Formales de la Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas 193

4.9 El Método de Imágenes 198 PROBLEMAS 205

Capítulo 5

Magnetostática

5.1	Introducción 211		
5.2	Ley de Biot–Savart 211		
5.3	Ley de Ampere 214		
5.4	Relación entre J y H 219		
5.5	Densidad de Flujo Magnético 220		
5.6	El Potencial Vectorial Magnético 223		
5.7	Fuerzas y Pares Magnéticos 227		
ļ	5.7.1 Fuerza sobre un Elemento de Corriente 229		
ļ	5.7.2 Pares o Momentos de Torsión Magnéticos 232		
ļ	5.7.3 El Dipolo Magnético 233		
5.8	Magnetización y Corrientes de Magnetización 234		
5.9	Condiciones de Frontera 238		
5.10	El Potencial Magnético Escalar 239		
5.11	Problemas de Frontera en Magnetostática 240		
5.12	Inductancia e Inductores 244		
5.13 E	Energía Magnética 248		
PROBLEMAS 252			

Capítulo 6

Principios Generales

y las

Ecuaciones de Maxwell

6.1	La Intensidad del Campo Eléctrico 257	
	6.1.1 Experimento 1 258	
6.2	La Corriente Eléctrica 259	
6.3	Algunas Propiedades de la Intensidad del Campo Eléctrico 262	
	6.3.1 Experimento 2 262	
	6.3.2 La Ley de Gauss y la Densidad del Campo Eléctrico 264	
6.4	El Campo Magnético 268	
	6.4.1 Experimento 4 268	
	6.4.2 La Densidad del Campo Magnético 269	
6.5	La Primera Ecuación de Maxwell 269	
	6.5.1 Experimento 5 269	
	6.5.2 La Ley de Faraday 270	
6.6	La Intensidad del Campo Magnético 272	
	6.6.1 Experimento 6 272	
6.7	La Segunda Ley de Maxwell 274	
6.8	Propiedades Macroscópicas de la Materia 278	
6.9	Polarización Eléctrica y Magnética 279	
6.10	Medios Conductores 280	
6.11	Los Potenciales Electromagnéticos Vectoriales y Escalares 282	
6.12	Condiciones de Frontera 283	
6.13	Flujo de Energía en el Campo Electromagnético 285	
6.14	Ondas Electromagnéticas 287	
PROBLEMAS 288		

v

Capítulo 7

Ondas Electromagnéticas Planas

7.1 Ecuaciones de Ondas y Sus Características 291 7.2 Ecuaciones de Ondas y Sus Soluciones 292 7.2.1 Solución de las Ecuaciones de Ondas para los Potenciales 292 7.2.2 Ecuaciones de Ondas Libres de Fuentes 293 7.3 Campos Armónicos en el Tiempo 294 7.3.1 Electromagnetismo Armónico en el Tiempo 294 7.3.2 Campos Libres de Fuentes en Medios Simples 296 7.4 **Ondas Planas** 298 7.5 El Teorema de Poynting Complejo 301 7.6 Polarización 303 7.7 Ondas Planas en Medios con Pérdidas 308 7.8 Ondas Planas Uniformes en Medios Conductores 310 7.9 Ondas Electromagnéticas Transversales (EMT) 313 7.10 Velocidad de Grupo 314 7.11 Ondas en Medios Anisótropos 318 7.12 Propagación de Ondas en un Plasma 318 Reflexión y Refracción de Ondas Planas 320 7.13 7.13.1. Incidencia Normal Sobre un Plano Conductor Perfecto 321 7.13.2. Incidencia Normal Sobre una Superficie Plana Entre Dos Medios Dieléctricos 323 7.14 Incidencia Oblicua sobre un Plano Conductor Perfecto 326 7.14.1. Campo E Normal al Plano de Incidencia 326 7.14.2. Campo E Paralelo al Plano de Incidencia 328 7.15 Incidencia Oblicua en Frontera Entre Dos Medios Dieléctricos 329 7.15.1 Coeficientes de Fresnel 330 7.15.2 Vector E Normal al Plano de Incidencia (Caso Eléctrico Transversal) 330 Vector E Paralelo al Plano de Incidente (Caso Magnético Transversal) 331 7.15.3 7.16 Interfaces Múltiples 333 **PROBLEMAS** 336

BIBLIOGRAFÍA 341

Apéndice 343 Sistema de Unidades 343

Introducción al Análisis Vectorial

1.1 Introducción

La deducción de las relaciones entre las componentes del campo electromagnético se simplifica considerablemente si se usa análisis vectorial. Un *vector* es una cantidad que requiere de tres números para representarlo en un sistema de coordenadas dado. Los tres números se denominan las *componentes escalares* del vector. Una ecuación vectorial representa tres ecuaciones que relacionan las componentes escalares en una forma que es independiente de cualquier sistema de coordenadas en particular. Además de su elegancia matemática, el análisis vectorial también permite dar una interpretación geométrica a las ecuaciones. Se verá que esto es de gran importancia en la formulación de las leyes de la teoría electromagnética. En este capítulo se presenta una revisión del análisis vectorial con énfasis en la notación, teoremas y ecuaciones usadas en capítulos subsiguientes.

1.2 Escalares y Vectores

Para nuestros propósitos, una *cantidad escalar* es aquella cuya descripción es completa al dar un solo número; por ejemplo, si se dice que una caja mide de alto 1,5 m, se ha especificado completamente su altura. En particular, aunque un escalar puede ser positivo, negativo o cero, no involucra la idea de una dirección en el espacio; por ejemplo, si se dice que la masa de un cuerpo es, digamos, igual a 10 kilos, a esta afirmación no se le puede agregar nada para que la descripción de esa masa sea más completa. Por ello, la masa es un escalar. En forma similar, la carga eléctrica neta situada en un cuerpo es un escalar, que puede ser positivo, negativo o cero. La coordenada *x* del centro de masa de un cuerpo con relación a un marco de referencia (sistema de coordenadas) dado – por ejemplo 2 metros – es un escalar. Así pues, un escalar tiene magnitud y solamente magnitud.

Si el valor numérico de un escalar no depende de la selección del sistema de coordenadas que se esté usando, a este escalar se le denomina un *escalar invariante*. De acuerdo con esto, la masa de un cuerpo y la carga eléctrica en un cuerpo son escalares invariantes. Por otro lado, la coordenada *x* de un punto, dada arriba como 2 metros, no es un escalar invariante, porque no tiende a permanecer igual a 2 metros si se cambia el marco de referencia. Una cantidad invariante puede variar con el tiempo y puede ser diferente en puntos diferentes del espacio, pero no es afectada si se cambia el marco de referencia. Una vez que un escalar ha sido identificado como invariante, se le referirá simplemente como *un escalar*.

Las cantidades escalares asociadas con puntos individuales en el espacio (dentro o fuera de cuerpos materiales) se denominan "funciones escalares de la posición" o "campos escalares" (más adelante se da un tratamiento más detallado al concepto de *campo*).

Una *cantidad vectorial* o simplemente un *vector* es aquella que requiere para su descripción completa una magnitud, una dirección y una posición. Es decir, una cantidad física es un vector si y sólo si

- (a) tiene una magnitud numérica,
- (b) tiene una dirección en el espacio y
- (c) obedece la *regla del paralelogramo* para la suma.

Si para la caja mencionada anteriormente se quiere describir una fuerza ejercida sobre ella, entonces se necesita conocer la magnitud de la fuerza, su dirección y su punto de aplicación. Otros ejemplos sencillos de vectores son

el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula. Ahora bien, el concepto de una dirección en el espacio no involucra un sistema de coordenadas. Como consecuencia, las tres propiedades dadas de los vectores implican que *el concepto de un vector físico no está ligado a ningún sistema de coordenadas*. Sin embargo se debe mencionar que los aspectos de dirección y posición de una cantidad vectorial implican la existencia de un punto de referencia, vale decir, un sistema de coordenadas. Pero, en el análisis vectorial, las operaciones vectoriales son independientes del sistema de coordenadas utilizado, pero siempre se sobreentiende la existencia de un sistema de coordenadas adecuado.

El concepto de un campo necesita del concepto de una región y, aunque no se tratará de dar una definición precisa de región, se tomará el concepto intuitivo considerando a una región como aquella parte de todo el espacio dentro (o fuera) de una superficie cerrada (superficie tridimensional). Este concepto puede extenderse a regiones de una, dos y *n* dimensiones. Es importante comprender que la frontera de la región puede estar en el infinito, ocupando la región todo el espacio; en este caso se describe a la *región* como una *región ilimitada* o *no acotada*.

Con la palabra *campo* existen problemas para definirla por su ambigüedad. Generalmente, las definiciones de un campo se dividen en dos clases principales: una de estas clases define a un campo como una región del espacio dedicada a un uso determinado o poseyendo alguna característica distintiva; por ejemplo, un campo de béisbol, un campo para sembrar maíz. La otra clase principal define a un campo como la influencia de algún agente en una región, y como ejemplos se pueden mencionar un campo gravitatorio, un campo eléctrico o un campo de temperaturas. Nuestra definición especializada de un campo pertenece a esta última clase. Un campo se define como *la especificación de una cantidad particular en todas las partes de una región, en todo instante t, y ese valor describe esa cantidad completamente (en el instante t).* Si la cantidad especificada es escalar, se tiene un *campo escalar*, y si la cantidad es vectorial, se tiene un *campo vectorial*. La cantidad particular que se especifica se denomina una *cantidad del campo*.

Un campo es *estático* o *estacionario* si es independiente del tiempo; un campo variable en el tiempo con frecuencia se denomina *dinámico*. Ninguna cantidad física permanece constante indefinidamente, pero en períodos de tiempo finitos (o cuando las variaciones con el tiempo son pequeñas), con frecuencias es conveniente considerarlas como estáticas. Cuando las variaciones en el tiempo son grandes pero lentas, se utiliza el término *cuasiestático*.

En general, los campos físicos son tridimensionales, dependiendo así de tres variables espaciales. La presión de la atmósfera terrestre es un campo tridimensional. Idealmente hablando, también hay campos bidimensionales y unidimensionales; ejemplos de ellos son la densidad de pintura sobre la superficie de una pared (bidimensional) y la tensión en todos los puntos de la cuerda de una guitarra (unidimensional).

Ya se especificó que un *escalar* es una cantidad que puede ser representada por un número real. Por ejemplo, la masa, longitud, tiempo y temperatura son escalares. Si se asocia un escalar con cada punto de una región *R*, se dice que existe un *campo escalar* en el interior de *R*; es decir, un campo escalar es completamente especificado por un solo número para cada punto. Un ejemplo de un campo escalar sería, por ejemplo, la distribución de temperatura en un cuerpo sólido.

También se mencionó que una cantidad física se denomina una *cantidad vectorial*, o simplemente un *vector* si, y sólo si, tiene una *magnitud numérica*, una *dirección en el espacio* y, además, obedece la *regla del paralelogramo* para la adición. También se dijo que como consecuencia de ello, estas tres propiedades implican que *el concepto de un vector físico no implica algún tipo de coordenadas*. Cuando se usan coordenadas, un vector es una cantidad que requiere de tres números para representarlo (espacio tridimensional). La velocidad de una partícula es un vector y se representa por las componentes de la velocidad u_1 , u_2 y u_3 con respecto a un sistema de coordenadas dado. Desde un punto de vista geométrico, esto implica que la velocidad posee tanto magnitud o longitud como también una orientación o dirección. Geométricamente, un vector es más fácil de visualizar. Por tanto, gráficamente un vector **A** (los vectores se indican en negritas o mediante una letra en la forma \vec{A}) se representa típicamente mediante un segmento dirigido (Fig. 1.1). La longitud del segmento representa la magnitud *A* de **A** (aunque también se puede usar el símbolo $|\mathbf{A}|$) en una escala adecuada, y la dirección se indica por la punta de

la flecha en un extremo del segmento; también puede definirse por la dirección de un *vector unitario* (vector de longitud unitaria) adimensional $\hat{\mathbf{a}}$, el cual es colineal con **A**. Entonces $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}A$ y $|\hat{\mathbf{a}}| = 1$.

Hay dos clases de vectores: *vectores ligados y vectores libres*. Los vectores ligados tienen una posición fija. Por ejemplo, al tratar con fuerzas cuyos puntos de aplicación o líneas de acción no pueden desplazarse, es necesario pensar en ellas como vectores ligados. Un *vector libre* es caracterizado completamente por su magnitud y dirección. En lo que sigue, se entiende que los vectores son vectores libres a menos que se especifique lo contrario.

Dos vectores libres son iguales si sus magnitudes, o longitudes, son iguales y sus direcciones son las mismas, indiferentemente de los puntos en el espacio donde se dibujen. En otras palabras, una cantidad vectorial puede representarse igualmente bien mediante cualquiera de los infinitamente muchos segmentos de líneas con la misma longitud y la misma dirección. Por ello, se acostumbra decir que un vector puede moverse paralelo a sí mismo sin ningún cambio. La relación $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ significa que \mathbf{A} y \mathbf{B} concuerdan, pero no significa necesariamente que las colas de las flechas que representan \mathbf{A} y \mathbf{B} estén en el mismo punto.

Las operaciones matemáticas definidas para escalares, como la suma y la multiplicación no son aplicables a vectores, ya que éstos tienen tanto magnitud como dirección. De manera que se debe introducir un conjunto de *operaciones vectoriales*. Estas operaciones son las reglas para combinar un vector con otro vector o un vector con un escalar. Hay varias formas de combinar un vector con otro vector o un vector con un escalar.

Si *c* es un escalar (número) positivo, la ecuación $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ significa que la dirección del vector \mathbf{A} es la misma que la de \mathbf{B} y la magnitud es *c* veces la de \mathbf{B} . Si *c* es negativo, la ecuación significa que la dirección de \mathbf{A} es opuesta a la de \mathbf{B} y su magnitud es |c| veces la de \mathbf{B} . La *suma* o *adición* de un vector \mathbf{A} y un vector \mathbf{B} se define mediante el vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, el cual forma un triángulo cerrado con \mathbf{A} y \mathbf{B} , como se ilustra en la Fig. 1.1(a). Se dice que el vector \mathbf{C} es la *resultante* o *suma* de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Obsérvese en la Fig. 1.1(b) que la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es el vector que se obtiene conectando la cola del primer vector con la punta del segundo vector. Usando la regla del paralelogramo, es sencillo demostrar gráficamente que la adición vectorial es *comutativa*.



Figura 1.1. Adición vectorial.

En el álgebra vectorial se tienen entonces las siguientes reglas (c una constante):

$$c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$$
$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

También, la regla del paralelogramo es válida tanto para los vectores libres como para los vectores ligados.

Para obtener la diferencia entre dos vectores, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, es necesario definir el negativo de un vector. El vector $-\mathbf{A}$ se define mediante la ecuación $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$, y tiene la misma magnitud que \mathbf{A} pero la dirección opuesta. El vector sustracción \mathbf{B} de \mathbf{A} se define, como un caso especial de la adición, por la suma vectorial de \mathbf{A} y ($-\mathbf{B}$).

Gráficamente, también se puede demostrar fácilmente que la adición vectorial es asociativa, es decir,

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Si **A**, **B** y **C** son los tres lados de un paralelepípedo, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ es el vector a lo largo de la diagonal más larga.

Un vector puede resolverse a lo largo de dos direcciones cualesquiera en un plano que lo contenga. La Fig. 1.2 muestra cómo se usa la regla del paralelogramo para construir los vectores **A** y **B** que se suman para formar **C**.



Figura 1.2. Descomposición de un vector en un plano.

En tres dimensiones, un vector puede resolverse a lo largo de tres líneas no coplanares cualesquiera. La Fig. 1.3 muestra cómo un vector puede ser resuelto a lo largo de tres direcciones, hallando primero un vector en el plano de dos de las direcciones y luego resolviendo este nuevo vector a lo largo de las dos direcciones en el plano.



Figura 1.3. Descomposición de un vector en el espacio.

1.3 Multiplicación Vectorial

El Producto Punto o Producto Escalar. El ángulo entre dos vectores se define como el menor ángulo a través del cual puede rotarse uno de los vectores para que su dirección sea la misma que la del otro vector. Puesto que un vector posee magnitud y dirección, es posible definir dos tipos de productos. El *producto escalar* o *producto punto* de **A** y **B** se define mediante la ecuación

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \triangleq AB\cos\theta = AB_p \tag{1.1}$$

donde θ es el ángulo interno o menor (ya definido) entre **A** y **B** cuando **A** y **B** se dibujan cola con cola, y donde $B_n = B \cos \theta$ representa la proyección perpendicular de **B** sobre **A** (Fig. 1.4).



Figura 1.4. El producto escalar A·B.

Obsérvese que el producto escalar es también un escalar (positivo, negativo o cero) y no tiene dirección en el espacio. Debemos recalcar el hecho de que el producto escalar, como operación con vectores, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, puede ser evaluado sin referencia a algún sistema de coordenadas en particular. Como el producto escalar es un escalar, claramente el producto es conmutativo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{1.2}$$

El producto escalar es distributivo; es decir,

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$$

La demostración de esto se establece rápidamente con la ayuda de la Fig. 1.5 observando que la ecuación anterior puede escribirse como $AD_p = A(B_p + C_p)$ donde $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{B} + \mathbf{C}$, y que $D_p = B_p + C_p$.



Figura 1.5. La ley distributiva para el producto escalar.

Casos especiales de productos escalares son: si los dos vectores son paralelos, entonces $\theta = 0$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. En particular, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$. Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son perpendiculares, entonces $\theta = 90^\circ$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. En resumen,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{cases} AB & \text{si } \theta = 0^{\circ} \\ 0 & \text{si } \theta = 90^{\circ} \\ -AB & \text{si } \theta = 180^{\circ} \end{cases}$$
(1.3)
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^{2}$$
(1.4)

у

Una aplicación importante del producto punto es su utilización para determinar la componente de un vector en la dirección de otro vector. Por ejemplo, en la Fig. 1.5, la magnitud de la componente de **B** en la dirección de **A** viene dada por la relación $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/A$, y el vector componente de **B** en la dirección de **A** es entonces

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} \times \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A^2} \mathbf{A}$$
(1.5)

Se deduce también que la componente vectorial de **B** perpendicular a **A** es entonces $\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_{\parallel}$.

El Producto Cruz o Producto Vectorial. El *producto vectorial* o *producto cruz*, denotado por $C = A \times B$, es otra combinación particular de los dos vectores **A** y **B**, se define por el vector cuya magnitud es

$$C = AB | \operatorname{sen} \theta | \tag{1.6}$$

y por el requerimiento de que **A**, **B** y **C** formen un sistema derecho; es decir, **C** tiene la dirección de avance (la normal al plano formado por **A** y **B**) de un tornillo de rosca derecha conforme **A** es rotado hacia **B** (ver la Fig. 1.6).

El producto vectorial puede escribirse como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} A B \operatorname{sen} \theta$$

= $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_{p}$ (1.7)



Figura 1.6. El producto vectorial A×B.

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal al plano que contiene al par \mathbf{A} y \mathbf{B} y \mathbf{B}_p es el vector formado por la proyección de \mathbf{B} sobre un plano normal a \mathbf{A} . Geométricamente, la magnitud $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ *es el área de un paralelogramo formado por* \mathbf{A} y \mathbf{B} *como sus lados* (Fig. 1.6). Es sencillo deducir, a partir de la definición, que el producto vectorial *no es conmutativo*, es decir, que el vector $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ está en la dirección contraria a la del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y, como consecuencia, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

El producto vectorial de dos *campos vectoriales*, dígase **F** y **G**, es a su vez un campo vectorial. Se denota por $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ y se construye calculando en todo punto *P* el producto vectorial de los vectores **F** y **G**.

El producto vectorial es distributivo; es decir,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{1.8}$$

La demostración se puede establecer tomando un plano normal a **A** y proyectando **B**, **C** y **B**+**C** sobre este plano (Fig. 1.7). El vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_p$ se obtiene a partir de \mathbf{B}_p girándolo 90° en una dirección antihoraria y multiplicándolo por *A*. Por tanto, vemos que el triángulo I es girado a través de 90° y que, luego de multiplicar por *A* forma el triángulo II, Se obtiene entonces que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{v} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_{v} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}_{v}$$

y la Ec. (1.8) se deduce a partir de la Ec. (1.7).



Figura 1.7. La ley distributiva para el producto vectorial.

Cuando se multiplican tres vectores, no todas las combinaciones de los productos punto y cruz tienen significado. Los únicos dos productos de tres vectores que tienen sentido se explican a continuación. Uno de ellos, que ocurre con frecuencia es el *producto escalar triple*,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A \cos \alpha BC \sin \theta$$



Figura 1.8. El producto escalar triple.

El lado derecho de la relación anterior representa el volumen del paralelepípedo formado por los vectores **A**, **B** y **C**, siempre que $0 \le \alpha \le \pi/2$ (Fig. 1.8). Si $\alpha > \pi/2$, se puede reemplazar **A** por $-\mathbf{A}$ y concluir que el producto escalar triple representa el volumen "negativo" del paralelepípedo formado por los vectores $-\mathbf{A}$, **B** y **C**. Puesto que el volumen no cambia si se intercambian los vectores **A**, **B** y **C** en una forma cíclica, se tiene que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$
(1.9)

Una segunda identidad vectorial de gran importancia es el producto vectorial triple,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$
(1.10)

Para demostrar la relación dada por la Ec. (1.10), se toma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_n$$

donde los vectores A_p y A_n son, respectivamente, las componentes de A paralela y normal al plano *P* que contiene a **B** y **C**. Se tiene entonces que

$$\mathbf{D} \triangleq \mathbf{A}_{v} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

y se ve que **D** está en el plano *P* (Fig. 1.9).



Figura 1.9. El producto vectorial triple.

La magnitud de D está dada entonces por

$$D = A_p BC \operatorname{sen} (\beta - \alpha) = (A_p C \cos \alpha) (B \operatorname{sen} \beta) - (A_p B \cos \beta) (C \operatorname{sen} \alpha)$$

donde los ángulos α y β son como se muestran en la figura. La expresión anterior puede escribirse en función de productos escalares como

Puesto que A_p es perpendicular a **D**, se deduce que

$$(\mathbf{A}_{p} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}_{p} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{D} + x\mathbf{A}_{p}$$

donde *x* es un escalar desconocido. Para determinar *x*, se multiplica escalarmente la ecuación anterior por A_p . Esto produce *x* = 0 y se obtiene

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{A}_{p} \cdot \mathbf{C}\right)\mathbf{B} - \left(\mathbf{A}_{p} \cdot \mathbf{B}\right)\mathbf{C}$$

Para completar la demostración de la Ec. (1.4), ahora basta con observar que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{C}$$
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{B}$

1.4 Vectores Base y Componentes Vectoriales

Los vectores base son un conjunto de vectores seleccionados como una base para representar todos los demás vectores. La idea es construir cada vector a partir de la adición de vectores en la dirección de los vectores que forman las bases. Por ejemplo, el vector en la Fig. 1.10 puede escribirse como la suma de los tres vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 , cada uno en la dirección de los vectores base \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 , de modo que

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$



Figura 1.10

Cada uno de los vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 es paralelo a uno de los vectores base y puede escribirse como un múltiplo escalar del vector base correspondiente. Denotando por u_1 , u_2 y u_3 estos multiplicadores escalares, se tiene entonces que

$$\mathbf{u}_1 = u_1 \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{u}_2 = u_2 \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}_3 = u_3 \mathbf{e}_3$$

El vector original puede ahora escribirse como

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \tag{1.11}$$

y su representación se muestra en la Fig. 1.11. Los multiplicadores escalares u_1 , u_2 y u_3 se conocen como *las componentes* de **u** en la base descrita por los vectores base \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 . Si los vectores base son vectores unitarios, entonces las componentes representan las longitudes, respectivamente, de los tres vectores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 . Si los vectores base son vectores unitarios y son mutuamente ortogonales, entonces la base se conoce como una base ortonormal, euclidiana o cartesiana.



Figura 1.11. Componentes de un vector u en función de vectores base.

1.5 Vectores Unitarios Ortogonales en un Sistema de Coordenadas Cartesianas

Para la descripción algebraica de vectores, se introduce un sistema de coordenadas para el marco de referencia, aunque es importante tener en mente que la magnitud y dirección de un vector son independientes del marco de referencia. En un sistema de coordenadas cartesianas x, y y z, un vector arbitrario \mathbf{u} se puede representar en función de sus componentes escalares u_x , u_y y u_z , que son las magnitudes de las proyecciones del vector \mathbf{u} sobre los ejes x, y y z, respectivamente, y los tres vectores base unitarios $\hat{\mathbf{a}}_x$, $\hat{\mathbf{a}}_y$ y $\hat{\mathbf{a}}_z$ (Fig. 1.12), los cuales tienen las direcciones (positivas) de los ejes x, y y z, respectivamente (Fig. 1.13):

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{a}}_x u_x + \hat{\mathbf{a}}_y u_y + u_z \hat{\mathbf{a}}_z \tag{1.12}$$

La representación del vector **u** mediante una flecha sugiere una segunda posibilidad. La flecha para **u** comienza en el origen y termina en el punto (u_x, u_y, u_z) . Entonces, si se está de acuerdo en que el vector comienza en el origen, el extremo positivo puede especificarse dando las coordenadas cartesianas (u_x, u_y, u_z) de la punta de la flecha.



Figura 1.12. Vectores unitarios en coordenadas cartesianas y sistema de mano derecha.

El sistema mostrado en la figura es uno de mano derecha donde el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de z si los dedos son tales que representan una rotación alrededor del eje z desde x hasta y. Este sistema puede cambiarse a un sistema de mano izquierda invirtiendo la dirección de cualquiera de las líneas de coordenadas y su vector base asociado.

Los vectores unitarios tienen las siguientes propiedades:

1. Tienen longitud unitaria. Por ello,

$$\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1$$

2. Son mutuamente ortogonales. Es decir,

José R. Morón

$$\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = 0$$

3. Como se indicó, forman un sistema derecho (esto es, se rigen por la regla de mano derecha). Es decir,



Figura 1.13. Un sistema de coordenadas cartesianas.

Se deduce entonces que para obtener las componentes u_x , u_y y u_z cuando se da **u**, sólo se tiene que multiplicar escalarmente a **u** por $\hat{\mathbf{a}}_x$, $\hat{\mathbf{a}}_y$ y $\hat{\mathbf{a}}_z$, respectivamente. Por ejemplo,

$$u_x = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x$$

Observe también que el producto escalar de un vector por sí mismo, produce la magnitud del vector al cuadrado, es decir,

$$\left|\mathbf{u}\right|^{2} = u^{2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_{x}^{2} + u_{y}^{2} + u_{z}^{2}$$

La longitud diferencial en coordenadas cartesianas es un vector y se define como

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_x dx + \hat{\mathbf{a}}_y dy + \hat{\mathbf{a}}_z dz$$

Usando *r* para la magnitud del vector **r**, la Fig. 1.13 muestra que las coordenadas de la punta de la flecha y la magnitud están relacionadas por

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma$$
 (1.13)

Aquí $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ se denomina los *cosenos de dirección*.

El área de una superficie diferencial $d\mathbf{S}$ es una cantidad vectorial con una magnitud dS igual al producto de dos longitudes diferenciales y su dirección se denota mediante un vector unitario en la tercera dirección. En coordenadas cartesianas, las áreas son entonces

$$d\mathbf{S}_{x} = \hat{\mathbf{a}}_{x} dy dz \quad \text{(plano } y - z)$$

$$d\mathbf{S}_{y} = \hat{\mathbf{a}}_{y} dx dz \quad \text{(plano } x - z) \qquad (1.14)$$

$$d\mathbf{S}_{z} = \hat{\mathbf{a}}_{z} dx dy \quad \text{(plano } x - y)$$

Un volumen diferencial es igual al producto de tres longitudes diferenciales:

$$dv = dx \, dy \, dz \tag{1.15}$$

Una cantidad vectorial de particular importancia es el *vector de posición* o *de desplazamiento* \mathbf{r} (o *radio vector*) de un punto *P* con coordenadas (*x*, *y*, *z*) se define como la distancia dirigida desde el origen *O* hasta *P*, es decir,

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z \tag{1.16}$$

1.6 Vectores Ortogonales Unitarios en un Sistema de Coordenadas Cilíndricas

En la solución de muchos problemas del campo se encontrará que las coordenadas cartesianas no siempre son las más convenientes y que algunas veces son preferibles, por ejemplo, las coordenadas cilíndricas o esféricas. La Fig. 1.14 ilustra las coordenadas cilíndricas ρ , ϕ , z las cuales están relacionadas con las coordenadas cartesianas x, y, z por las ecuaciones

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$
 (1.17)

y la relación inversa es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad z = z$$
 (1.18)

Los recorridos de las variables son $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \phi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$. Los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas son \hat{a}_{ρ} , \hat{a}_{ϕ} y \hat{a}_{z} , respectivamente, y localmente en cualquier punto *P* ellos forman un sistema ortogonal derecho. Se debe señalar que \hat{a}_{ρ} y \hat{a}_{ϕ} dependen de ϕ . Un vector **u** en coordenadas cilíndricas puede escribirse como

$$\mathbf{u} = u_{\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + u_{\phi} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + u_{z} \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
(1.19)

y la magnitud de **u** es

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_{\rho}^2 + u_{\phi}^2 + u_z^2}$$

El vector de posición \overrightarrow{OP} mostrado en la Fig. 1.14 tiene componentes en ρ y z solamente. Así pues,

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = \rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + z \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

El vector de posición **r** depende implícitamente de ϕ ya que $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$ depende de ϕ . Por tanto, cuando se da un vector de posición, es necesario especificar que $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$ está a un ángulo ϕ .



Figura 1.14. Coordenadas cilíndricas.

Mediante proyección ortogonal de $\hat{\mathbf{a}}_x$ y $\hat{\mathbf{a}}_y$ sobre $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$, y $\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$ se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\hat{\mathbf{a}}_{x} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \cos \phi - \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \sin \phi, \qquad \hat{\mathbf{a}}_{y} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \sin \phi + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \cos \phi$$

Estas ecuaciones pueden usarse para convertir la representación de un vector en coordenadas cartesianas a su representación en coordenadas cilíndricas. Por ejemplo,

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{a}}_{x} u_{x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} u_{y} + u_{z} \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
$$= \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \left(u_{x} \cos \phi + u_{y} \sin \phi \right) + \hat{\mathbf{a}}_{y} \left(-u_{x} \sin \phi + u_{y} \cos \phi \right) + \hat{\mathbf{a}}_{z} u_{z}$$

Las componentes de **u** en las direcciones de ρ y ϕ en coordenadas cilíndricas son entonces

$$u_x = u_x \cos \phi + u_y \sin \phi$$
, $u_\phi = -u_x \sin \phi + u_y \cos \phi$

En forma matricial, se escribe la transformación del vector u de coordenadas cilíndricas a cartesianas como

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\rho \\ u_\phi \\ u_z \end{bmatrix}$$
(1.20)

y la inversa de esta transformación se obtiene como

$$\begin{bmatrix} u_{\rho} \\ u_{\phi} \\ u_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} \\ u_{y} \\ u_{z} \end{bmatrix}$$
(1.21)

La Fig. 1.15 muestra un volumen diferencial en coordenadas cilíndricas. La longitud diferencial en este sistema está dada por

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_{o}d\rho + \hat{\mathbf{a}}_{\phi}\rho d\phi + \hat{\mathbf{a}}_{z}dz \tag{1.22}$$



Figura 1.15. Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

El producto de cualquier par de longitudes diferenciales es igual a la magnitud del área de una superficie diferencial con una normal que apunta en la dirección de la tercera coordenada. Así pues,

$$d\mathbf{S}_{\rho} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho}\rho \,d\phi \,dz \quad (\text{superficie cilíndrica } \phi - z)$$

$$d\mathbf{S}_{\phi} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \,d\rho \,dz \qquad (\text{plano } \rho - z) \qquad (1.23)$$

$$d\mathbf{S}_{z} = \hat{\mathbf{a}}_{z}\rho \,d\rho \,d\phi \qquad (\text{plano } \rho - \phi)$$

El volumen diferencial es el producto de las tres longitudes diferenciales, es decir,

$$dv = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \tag{1.24}$$

Ejemplo 1. Expresar el campo vectorial dado en coordenadas cartesianas por

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{(2x^2 + y^2)(-y\hat{\mathbf{a}}_x + x\hat{\mathbf{a}}_y)}{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

en coordenadas cilíndricas.

Solución: En primer lugar se sustituyen en la relación anterior los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}_x$ y $\hat{\mathbf{a}}_y$ en función de los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$ y $\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$:

$$\hat{\mathbf{a}}_{x} = \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{\rho} - \sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$
$$\hat{\mathbf{a}}_{y} = \sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

y se obtiene

$$\mathbf{A} = \left[\frac{(2x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{3/2}}\right] (-y\cos\phi + x\sin\phi)\hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \left[\frac{(2x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{3/2}}\right] (y\sin\phi + x\cos\phi)\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

la cual tiene todavía una forma combinada. A continuación se reemplaza *x* por $\rho \cos \phi$ y *y* por $\rho \sin \phi$, se usa la relación $x^2 + y^2 = \rho^2$ y se obtiene

$$\mathbf{A}(\rho,\phi) = \left[\frac{2\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi}{(1+\rho^2)\rho^3}\right] (-\rho\sin\phi\cos\phi + \rho\cos\phi\sin\phi) \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \left[\frac{2\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi}{(1+\rho^2)\rho^3}\right] (\rho\sin^2\phi + \rho\cos^2\phi) \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

que al simplificar da como resultado

$$\mathbf{A}(\rho,\phi) = \frac{1+\cos^2\phi}{1+\rho^2}\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

1.7 Sistema de Coordenadas Esféricas. Vectores Ortogonales Unitarios

En el sistema de coordenadas esférico, un punto se específica en el espacio en forma única por las variables r, θ y ϕ , como se muestra en la Fig. 1.16. La coordenada r describe una esfera de radio r centrada en el origen. El

ángulo θ se mide tomando como referencia el eje *z* positivo y describe una superficie cónica con su ápice en el origen, y el ángulo φ es el mismo que en el sistema cilíndrico. Los recorridos de las variables son:

$$0 \le r < \infty$$
$$0 \le \theta < \pi$$
$$0 \le \phi < 2\pi$$

Los vectores unitarios en un sistema de coordenadas esféricas son $\hat{\mathbf{a}}_r$, $\hat{\mathbf{a}}_{\theta}$ y $\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$, y localmente, en cualquier punto *P*, forman un sistema derecho de coordenadas ortogonales (Fig. 1.16). El vector $\hat{\mathbf{a}}_r$ está en la dirección radial, $\hat{\mathbf{a}}_{\theta}$ está en un plano que contiene al eje *z* y al punto *P* y está dirigido en la dirección creciente de θ . El vector $\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$ es normal a este plano y está dirigido en el sentido creciente de ϕ . Observe que los vectores unitarios en cualquier punto *P* dependen de las coordenadas θ y ϕ .

La relación entre las coordenadas de *P* en coordenadas esféricas y cartesianas puede obtenerse proyectando a *P* sobre los ejes *x*, *y* y *z*. Se obtiene así que

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta$$
 (1.25)

Los vectores base unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_{θ} y \hat{a}_{ϕ} obedecen las relaciones

$$\hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_{\theta} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \times \hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \hat{\mathbf{a}}_r, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \times \hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_{\theta}$$
(1.26)

y un vector u en coordenadas esféricas puede expresarse entonces como

$$\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{a}}_r + u_\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + u_\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi \tag{1.27}$$

La magnitud de este vector es

$$\left| \mathbf{u} \right| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_r^2 + u_{\theta}^2 + u_{\phi}^2}$$
(1.28)

El vector de posición \overrightarrow{OP} hasta el punto con coordenadas (r, θ , ϕ) es simplemente

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{a}}_r \tag{1.29}$$

pero siempre teniendo en mente que $\hat{\mathbf{a}}_r$ depende implícitamente de θ y ϕ . Las expresiones para los vectores correspondientes a la longitud, superficie y volumen diferenciales, *d***l**, *d***S** y *dv*, son respectivamente

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_{r} dr + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} r \, d\theta + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} r \, \mathrm{sen} \, \theta \, d\phi$$

$$d\mathbf{S}_{r} = \hat{\mathbf{a}}_{r} r^{2} \, \mathrm{sen} \, \theta \, d\theta \, d\phi \qquad (\text{superficie esférica } \theta - \phi)$$

$$d\mathbf{S}_{\theta} = \hat{\mathbf{a}}_{\theta} r \, \mathrm{sen} \, \theta \, dr \, d\phi \qquad (\text{superficie cónica } r - \phi) \qquad (1.30)$$

$$d\mathbf{S}_{\phi} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} r \, dr \, d\theta \qquad (\text{plano } r - \theta)$$

$$dv = r^{2} \, \mathrm{sen} \, \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Mediante la proyección ortogonal de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}_x$, $\hat{\mathbf{a}}_y$ y $\hat{\mathbf{a}}_z$ sobre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}_r$, $\hat{\mathbf{a}}_{\theta}$ y $\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$ se pueden obtener las relaciones siguientes:

$$\hat{\mathbf{a}}_{x} = \hat{\mathbf{a}}_{r} \sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{a}}_{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\mathbf{a}}_{\phi}\sin\phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{y} = \hat{\mathbf{a}}_{r} \sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{a}}_{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{a}}_{\phi}\cos\phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{z} = \hat{\mathbf{a}}_{r}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}}_{\theta}\sin\theta$$
(1.31)



Figura 1.16. Coordenadas esféricas y volumen en coordenadas esféricas.

y las relaciones inversas:

$$\hat{\mathbf{a}}_{r} = \hat{\mathbf{a}}_{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{a}}_{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{a}}_{z} \cos \phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\theta} = \hat{\mathbf{a}}_{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{a}}_{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{\mathbf{a}}_{z} \sin \phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \hat{\mathbf{a}}_{x} (-\sin \phi) + \hat{\mathbf{a}}_{y} \cos \phi$$
(1.32)

Estas ecuaciones se pueden usar para convertir la representación de un vector en coordenadas cartesianas en su representación en coordenadas esféricas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{a}}_{x} u_{x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} u_{y} + \hat{\mathbf{a}}_{z} u_{z} \\ &= \hat{\mathbf{a}}_{r} \left(u_{x} \, \operatorname{sen} \theta \cos \phi + u_{y} \, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + u_{z} \, \cos \theta \right) \\ &+ \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \left(u_{x} \, \cos \theta \cos \phi + u_{y} \, \cos \theta \operatorname{sen} \phi - u_{z} \, \operatorname{sen} \theta \right) \\ &+ \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \left(- u_{x} \, \operatorname{sen} \phi + u_{y} \, \cos \phi \right) \end{aligned}$$

Las componentes de u en coordenadas esféricas son entonces

$$u_r = u_x \sin \theta \cos \phi + u_y \sin \theta \sin \phi + u_z \cos \theta$$
$$u_\theta = (u_x \cos \phi + u_y \sin \phi) \cos \theta - u_z \sin \theta$$
$$u_\phi = u_x \sin \phi + u_y \cos \phi$$

la cual se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$
(1.33)

y la transformación inversa da

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix}$$
(1.34)

En cualquier caso, si las componentes de los vectores en un sistema también dependen de las coordenadas, también tienen que transformarse según las relaciones respectivas.

1.8 Producto Punto (Escalar) y Producto Cruz (Vectorial)

Si A y B son dos vectores, es fácil verificar por la ley del coseno que

$$\left|\mathbf{A} - \mathbf{B}\right|^{2} = \left|\mathbf{A}\right|^{2} + \left|\mathbf{B}\right|^{2} - 2\left|\mathbf{A}\right| \left|\mathbf{B}\right| \cos\theta$$
(1.35)

donde θ es el ángulo entre los dos vectores, $0 \le \theta \le \pi$. Por tanto,

$$2 |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2$$

En coordenadas cartesianas el lado derecho de esta ecuación es

$$\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \right) + \left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) - \left[\left(A_x - B_x \right)^2 + \left(A_y - B_y \right)^2 + \left(A_z - B_z \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \right)$$
(1.36)

y con esto se demuestra que

$$\left| \mathbf{A} \right| \left| \mathbf{B} \right| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
(1.37)

Esta cantidad es muy conveniente y se define como el producto punto entre dos vectores A y B:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

= $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$ (1.38)

En coordenadas cilíndricas y esféricas, la Ec. (1.38) se convierte en

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z$$

= $A_\rho B_\rho + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$ (1.39)

Las dos definiciones en la Ec. (1.38), por supuesto, son equivalentes.

Ejemplo 2. (a) Dados los vectores $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - 2\hat{\mathbf{a}}_z$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$, calcular el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

(b) Calcular
$$\left(2\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z\right) \cdot \left(3\hat{\mathbf{a}}_z - 2\hat{\mathbf{a}}_y\right)$$
.

Solución: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 0$.

(b)
$$(2\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (3\hat{\mathbf{a}}_k - 2\hat{\mathbf{a}}_y) = (2\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (0\hat{\mathbf{a}}_x - 2\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5.$$

Ejemplo 3. Hallar el ángulo entre los vectores (a) $\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$ e $\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z$, y (b) $3\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z$ e $\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$. Solución:

(a) Sean los vectores $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z$. Entonces $|\mathbf{A}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{B}| = \sqrt{3}$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$. Por tanto, $\cos \theta = \frac{1}{3}$, y $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 1.23$ radianes (= 70°22′).

(b) Del Ejemplo 2(a), $(3\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z) \cdot (\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z) = 0$, o sea que $\cos \theta = 0$ y por tanto $\theta = \pi/2$.

Observe que el producto punto de dos vectores es un número (escalar), no es un vector. Algunas veces también se llama el *producto escalar* (no confundir esto con la *multiplicación* escalar) o *producto interno*.

Para el producto cruz, o producto vectorial, la definición operacional en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{\mathbf{a}}_z$$
(1.40)

La forma cíclica de la Ec. (1.40) permite expresar el producto cruz en la forma de un determinante como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{x} & \hat{\mathbf{a}}_{y} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ A_{x} & A_{y} & A_{z} \\ B_{x} & B_{y} & B_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{r} & \hat{\mathbf{a}}_{\phi} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ A_{r} & A_{\phi} & A_{z} \\ B_{r} & B_{\phi} & B_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} & \hat{\mathbf{a}}_{\theta} & \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \\ A_{\rho} & A_{\theta} & A_{\phi} \\ B_{\rho} & B_{\theta} & B_{\phi} \end{bmatrix}$$
(1.41)

donde los dos últimos determinantes en la ecuación anterior corresponden al producto cruz en coordenadas cilíndricas y esféricas, respectivamente. En la Ec. (1.41) se sobreentiende que el determinante se debe expandir por la primera fila.

Ejemplo 4. La Ley de Senos. Para el triángulo de la Fig. 1.17, demuéstrese que



Figura 1.17

Solución: El área del triángulo es igual a $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \frac{1}{2} AB \operatorname{sen} \gamma$. La misma área también se obtiene de la relación $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{C}| = \frac{1}{2} AB \operatorname{sen} \beta$. Por tanto,

$$AB \operatorname{sen} \gamma = AB \operatorname{sen} \beta$$

Se deduce entonces que $\frac{\operatorname{sen} \gamma}{C} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{B}$. En forma similar se puede demostrar que $\frac{\operatorname{sen} \gamma}{C} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{B}$. En consecuencia,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{A} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{C}$$

Usando la expresión del determinante para el producto vectorial, es muy sencillo demostrar que la fórmula para el producto escalar triple $A \cdot (B \times C)$ viene dada por

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$
(1.42)

1.9 El Gradiente de una Función Escalar de la Posición

Un ejemplo de una de las cantidades físicas relacionada con los campos vectoriales es el campo eléctrico. Como éste es un ejemplo de lo que se denomina una *función vectorial*, esta parte del análisis comienza con un breve resumen del concepto de función.

Una función de una variable, generalmente escrita como y = f(x), es una regla que establece cómo asociar dos números x y y y cómo determinar el valor asociado y. Las funciones de más de una variable también son reglas para asociar conjuntos de números. Por ejemplo, una función de tres variables, designada w = F(x, y, z), indica cómo asignar un valor a w dados los valores de x, y y z. Como un ejemplo, una función P(x, y, z) podría dar la presión atmosférica en cualquier punto (x, y, z) en el espacio. Estas funciones son funciones *escalares*; el resultado de introducir x en f(x) es el número (escalar) y = f(x); lo mismo se puede decir para la función w = F(x, y, z). La generalización a funciones vectoriales es directa. En tres dimensiones, una *función vectorial* es una regla que establece cómo asociar un *vector* con cada punto (x, y, z) en el espacio. Un ejemplo es la velocidad de un fluido. Designando esta función como v(x, y, z), ella especifica la *rapidez* del fluido y también la *dirección* del flujo en el punto (x, y, z). En general, una función vectorial F(x, y, z) especifica una *magnitud* y una *dirección* de flechas (Fig. 1.18), una para cada punto (x, y, z). La dirección de la flecha en cualquier punto es la dirección especificada por la función vectorial, y su longitud es proporcional a la magnitud de la función.



El concepto del gradiente está relacionado con el diferencial de un campo escalar, digamos *U*, asociado con el desplazamiento desde un punto *P* hasta un punto *Q*, el cual no está necesariamente en un entorno del punto *P*. Supóngase que la diferencia de la función escalar *U* entre los dos puntos cercanos $Q:(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ y P:(x, y, z) es ΔU :

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z)$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

- $\left[U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \right]$
- $\left[U(x, y, z + \Delta z) - (x, y, z + \Delta z) \right] - U(x, y, z)$

Removiendo los corchetes, se obtiene

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z + \Delta z)$$
$$+ U(x, y, z + \Delta z) - U(x, y, z)$$

Con la definición de la derivada parcial, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z$$
(1.43)

El vector de desplazamiento de *P* a *Q* es, por supuesto,

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \, \hat{\mathbf{a}}_x + \Delta y \, \hat{\mathbf{a}}_y + \Delta z \, \hat{\mathbf{a}}_z$$

y se puede verificar rápidamente que

$$\left(\hat{\mathbf{a}}_{x}\frac{\partial U}{\partial x}+\hat{\mathbf{a}}_{y}\frac{\partial U}{\partial y}+\hat{\mathbf{a}}_{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdot\left(\Delta x\,\hat{\mathbf{a}}_{x}+\Delta y\,\hat{\mathbf{a}}_{y}+\Delta z\,\hat{\mathbf{a}}_{z}\right)=\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\Delta z$$

De manera que

$$\Delta U = \left(\hat{\mathbf{a}}_{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot \Delta \mathbf{r}$$
(1.44)

El vector entre paréntesis se denomina el *gradiente* de *U* y usualmente se escribe como grad*U* o ∇U , donde se define al operador ∇ como

$$\nabla \triangleq \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$
(1.45)

como el operador nabla, y donde

$$\nabla U = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$
(1.46)

Ésta es una operación vectorial y obedece la misma convención que la notación de derivada. Lo que se va a diferenciar debe colocarse a la derecha de ∇ . Cuando opera sobre una función escalar, se transforma en un vector ∇U con magnitud y dirección bien definidas. También tiene un significado físico.

El significado geométrico del vector ∇U se entiende mejor cuando se pasa al límite conforme $\Delta \mathbf{r}$ tiende a 0 y se selecciona a $d\mathbf{r}$ como un desplazamiento en la superficie U = constante . Se concluye entonces que

$$\nabla U \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{r} = 0$$

sin importar cuál sea la dirección de *dr*. Así que ∇U es un vector normal a la superficie U = constante. Como la distancia más corta entre dos superficies vecinas U = c y U = c + dC está en la dirección de la normal a la superficie, se puede decir que en todo punto de la superficie, el vector ∇U tiene la misma dirección que la mayor tasa de cambio de U.

El gradiente de una función se escribe frecuentemente en forma operacional como

grad
$$U = \nabla U = \left(\hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) U$$

donde la expresión entre paréntesis se identifica con la ya dada en la Ec. (1.45). En la Sec. 1.12 se da una explicación más detallada de la operación gradiente.

Para convertir la Ec. (1.46) en expresiones en los otros sistemas de coordenadas, se comienza con el sistema cilíndrico usando las relaciones de coordenadas dadas por

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

Entonces, diferenciando la función *U* con respecto a *x*, se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= \cos\phi \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

donde se usó el hecho de que $\partial z/\partial x = 0$ puesto que *z* es ortogonal a *x*. Se puede usar un procedimiento similar para obtener una expresión para $\partial U/\partial y$ en función de ρ y ϕ . Si se usan también las relaciones para los vectores base $\hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_\rho \cos \phi - \hat{\mathbf{a}}_\phi \sin \phi$ y $\hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_\rho \sin \phi + \hat{\mathbf{a}}_\phi \cos \phi$, la Ec. (1.46) se convierte entonces en

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
(1.47)

Un procedimiento similar conduce a la expresión para el gradiente en coordenadas esféricas:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\mathbf{a}}_{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$
(1.48)

Ejemplo 5. Hallar el gradiente de (a) $f(x, y, z) = xy^2 + 2z$. (b) $f(\rho, \phi, z) = 2\rho \operatorname{sen} \phi$. (c) $f(r, \theta, \phi) = 2r \cos \theta - 5\phi + 2$. Solución:

(a)
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z = y^2 \hat{\mathbf{a}}_x + 2xy \hat{\mathbf{a}}_y + 2\hat{\mathbf{a}}_z$$

(b)
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_{z} = 2 \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + 2 \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

(c)
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\mathbf{a}}_{\phi} = 2\cos\theta\hat{\mathbf{a}}_r + -2\sin\theta\hat{\mathbf{a}}_{\theta} - \frac{5}{r \sin \theta}\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

Ejemplo 6. Halle el vector normal unitario a la superficie descrita por

$$U(x, y, z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$$

en el punto (3, -1, 2).

Solución: El vector normal unitario a la superficie en cualquier punto es $\hat{\mathbf{n}} = \nabla U / |\nabla U|$.

$$\nabla U = 4x\,\hat{\mathbf{a}}_x + 4z\,\hat{\mathbf{a}}_y + (4y - 10z)\,\hat{\mathbf{a}}_z$$

Por tanto,

José R. Morón

$$\hat{\mathbf{n}} = \left[\frac{\nabla U}{|\nabla U|}\right]_{(3,-1,2)} = \frac{12\,\hat{\mathbf{a}}_x + 8\,\hat{\mathbf{a}}_y - 24\,\hat{\mathbf{a}}_z}{\left(12^2 + 8^2 + 24^2\right)^{1/2}} = \frac{3\hat{\mathbf{a}}_x + 2\,\hat{\mathbf{a}}_y - 6\,\hat{\mathbf{a}}_z}{\sqrt{46}}$$

1.10 La Divergencia y el Rotacional en Coordenadas Cartesianas

En esta sección se introduce el campo escalar conocido como la "divergencia" de un campo vectorial **B** y el campo vectorial conocido como el "rotacional" de **B**. En coordenadas cartesianas, el escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$
(1.49)

y el vector

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$$
(1.50)

se definen como la *divergencia* de **B** (div **B**) y el *rotacional* de **B** (rot **B**), respectivamente. Estas relaciones se obtienen directamente a partir de la definición dada por la Ec. (1.45) para el operador nabla. La Ec. (1.50) con frecuencia se expresa formalmente como un determinante:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{x} & \hat{\mathbf{a}}_{y} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_{x} & B_{y} & B_{z} \end{vmatrix}$$
(1.51)

Las Ecs. (1.14), (1.15) y la representación del operador (1.45) a menudo son convenientes en la derivación de identidades vectoriales. Sin embargo, no se obtiene una buena idea física a partir de la representación en forma de operador. Para nuestros propósitos, las definiciones del gradiente, divergencia y rotacional dadas por las Ecs. (1.46), (1.49) y (1.50) no son completamente adecuadas. En las secciones 1.12, 1.14 y 1.15 se estudiarán definiciones generales que *no dependen de un sistema de coordenadas específico*. Con la ayuda de esas definiciones, se podrán determinar representaciones para el gradiente, divergencia y rotacional en sistemas de coordenadas diferentes de las cartesianas (Sección 1.21). Por los objetivos actuales, sólo se darán las relaciones para la divergencia y el rotacional en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

En coordenadas cilíndricas y esféricas, la divergencia de un campo vectorial A es dada, respectivamente, por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_{\rho} \right) + \frac{\partial A_{\phi}}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial A_{z}}{\partial z}$$
(1.52)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(A_\theta \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
(1.53)

y el rotacional de A por

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} & \rho \hat{\mathbf{a}}_{\phi} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{\rho} & \rho A_{\phi} & A_{z} \end{vmatrix}$$
(coordenadas cilíndricas) (1.54)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_r & r \hat{\mathbf{a}}_{\theta} & r \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_r & (r \operatorname{sen} \theta) A_{\phi} \end{vmatrix} \quad (\text{coordenadas esféricas}) \tag{1.55}$$

Ejemplo 7. Calcúlese la divergencia de **F**, suponiendo que (a) $\mathbf{F} = \rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + z \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + 2 \hat{\mathbf{a}}_{z}$, (b) $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{a}}_{r} + r \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + r \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$.

Solución:

(a)
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{\rho}) + \frac{\partial F_{\phi}}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial F_{z}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{2}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (z \sin \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2) = 2 + \frac{z}{\rho} \cos \phi$$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{2} F_{r}) + \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi}$
 $= \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{2} 2) + \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r)$
 $= \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$

1.11 Integrales de Línea, Superficie y Volumen

Para continuar esta parte sobre análisis vectorial, ahora se dará una introducción sencilla al proceso de integración de línea y también algunas definiciones necesarias para determinar operaciones importantes en el cálculo vectorial ya introducidas anteriormente (divergencia y rotacional). Este análisis comienza con una consideración de la integración de línea a lo largo de curvas planas. En los casos de dos y tres dimensiones sólo se trabajará con curvas continuas que son *suaves por tramos*, es decir, curvas que son continuas y que consisten de un número finito de arcos (o curvas suaves) unidos de extremo a extremo, en los cuales la dirección de la línea tangente cambia en forma continua. Toda curva suave por tramos solamente tiene un número finito de "esquinas" donde la dirección de la tangente cambia en forma abrupta. Adicionalmente, la longitud de cada una de estas curvas entre cualesquiera dos de sus puntos es finita, es decir, las curvas son *rectificables*.

1.11.1 Integrales de Línea

Primero se examinará el concepto de lo que se entiende por una línea. Una línea es la trayectoria en el espacio a lo largo de una curva desde un punto de partida hasta un punto de llegada. Observe que esta interpretación le da a la línea una dirección positiva definida. Se usarán indistintamente los términos *línea, contorno, a lo largo de la curva y a lo largo de la trayectoria*. Algunas veces la trayectoria recorrida por una línea es a lo largo de una curva cerrada, y si seguimos esta curva en todo su recorrido, se regresa al punto de partida. Usualmente esta línea se denomina un *contorno cerrado*.

Las integrales de línea, o curvilíneas, ocurren con frecuencias en las ciencias físicas. Posiblemente, la más conocida es la correspondiente al trabajo realizado por una fuerza **F** entre dos puntos *A* y *B* a lo largo de alguna trayectoria *C*:

Trabajo
$$(A \rightarrow B) = \int_{A,C}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $d\mathbf{r}$ es el vector de desplazamiento definido anteriormente. Algunas veces se utiliza $d\mathbf{l}$ en lugar de $d\mathbf{r}$ para recalcar que el vector de desplazamiento se define a lo largo de una determinada trayectoria para la integral de línea.

Una curva *C* en el espacio puede ser especificada en forma paramétrica especificando cualesquiera dos de las coordenadas en función de la tercera. Es decir, es posible especificar una curva por ecuaciones tales como

$$C: \quad y = g(x), \quad z = h(x)$$

Esto significa que, sobre la curva, cualquier función arbitraria continua de la posición puede expresarse como una función de cualquiera de las tres coordenadas.

Supóngase que se tiene una curva *C* en tres dimensiones (Fig. 1.19) y también que la curva está *dirigida*, lo cual se indica mediante una flecha en la curva. Sea *l* la longitud de arco medida a lo largo de la curva desde cualquier punto arbitrario en ella con $l = l_1$ en un punto P_1 y $l = l_2$ en P_2 . Suponga también que se tiene una función f(x,y,z) definida en todas partes sobre *C*. Ahora se subdivide la parte de *C* entre P_1 y P_2 arbitrariamente en *N* secciones. La Fig. 1.19 ilustra un ejemplo de una subdivisión así para N = 5. Después, se unen con cuerdas los puntos de las subdivisiones sucesivas de *C* entre P_1 y P_2 , una cuerda típica, digamos la *k*-ésima, tiene longitud Δl_k . Después se evalúa la función dada f(x,y,z) en cada punto (x_k, y_k, z_k) , que es cualquier punto en la *k*-ésima subdivisión de la curva y se forma el producto $f(x,y,z)\Delta l_k$. Esto se hace para cada uno de los *N* segmentos de *C* y luego se forma la suma



Por definición, la integral de línea de f(x,y,z) a lo largo de la curva C es el límite de esta suma conforme el número de subdivisiones *N* tiende a infinito y la longitud de cada cuerda tiende a cero, es decir,

$$\int_{C} f(x, y, z) dl = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \text{cada} \, \Delta s_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k, z_k) \Delta l_k$$

Para evaluar la integral de línea se debe conocer la trayectoria *C*. Usualmente la forma más conveniente de especificar esta trayectoria es paramétricamente en función del parámetro longitud de arco *s*. Entonces se escribe x = x(s), y = y(s) y z = z(s), y la integral de línea puede ser reducida a una integral definida ordinaria:

$$\int_{C} f(x, y, z) dl = \int_{l_{1}}^{l_{2}} f[x(s), y(s), z(s)] dl$$

Ejemplo 8. Evalúe en dos dimensiones la integral

José R. Morón

$$\int_{C} (x+y) dl$$

donde C es la línea recta desde el origen hasta el punto cuyas coordenadas son (1, 1) (Fig. 1.20).



Figura 1.20

Figura 1.21

Solución: Si (*x*, *y*) son las coordenadas de cualquier punto *P* en *C* y si *s* es la longitud de arco medida desde el origen, entonces $x = l/\sqrt{2}$ y $y = l/\sqrt{2}$. Por tanto, $x + y = 2l/\sqrt{2}$ y tenemos que

$$\int_C (x+y)dl = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} l\,dl = \sqrt{2}$$

Ahora se integra la misma función x + y desde (0, 0) hasta (0. 1) pero por otra trayectoria, como la mostrada en la Fig. 1.21. Aquí se separa la integración en dos partes, una a lo largo de C_1 y la segunda a lo largo de C_2 . En C_1 se tiene x = 0 y y = l. De manera que en C_1 , x + y = l y, por tanto,

$$\int_{C_1} (x+y) dl = \int_0^1 l \, dl = \frac{1}{2}$$

En C_2 , x = l, y = 1 y entonces

$$\int_{C_2} (x+y) dl = \int_0^1 (l+1) dl = \frac{3}{2}$$

Sumando los resultados para los dos segmentos, se encuentra que

$$\int_{C} (x+y) dl = \int_{C_1} (x+y) dl + \int_{C_2} (x+y) dl = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Ejemplo 9. ¿Cuál es el valor de $\int_{A}^{B} dx/(1+xy)$ a lo largo de cada una de las trayectorias mostradas en la Fig. 1.22.



Figura 1.22 Trayectorias posibles para la integración de línea.

Solución: Antes de que esta integral pueda evaluarse, *y* debe expresarse en términos de *x*. Para hacerlo, recuerde de la definición de una integral de línea que el integrando siempre debe evaluarse *a lo largo de la trayectoria de integración*. A lo largo del arco parabólico que une *A* y *B*, tenemos que $y = x^2$ y cuando se hace esta sustitución en la integral dada, se obtiene la integral definida ordinaria

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^{2}} = \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \left[\ln x - \ln\left(1+x\right)\right]_{1}^{2} = \ln\frac{4}{3}$$

En forma similar, a lo largo de la trayectoria en línea recta desde *A* hasta *B*, tenemos que y = 3x-2 y. al hacer esta sustitución en el integrando de la integral dada, se obtiene la integral definida ordinaria

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x + (3x - 2)} = \frac{1}{4} \left[\ln (4x - 2) \right]_{1}^{2} = \frac{1}{4} (\ln 6 - \ln 2) = \frac{1}{4} \ln 3$$

Para calcular la integral de línea a lo largo de la trayectoria *APB*, debemos realizar dos integraciones, una a lo argo de *AP* y una a lo largo de *PB*, ya que la relación que expresa y en función de x es diferente en estos dos segmentos. A lo largo de *AP*, la integral es claramente cero, ya que x permanece constante y por tanto en la suma que conduce a la integral, cada Δx_i es cero. A lo largo de *PB*, en la cual y = 4, tenemos la integral

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+4} = \left[\ln(x+4)\right]_{1}^{2} = \ln\frac{6}{5}$$

que es entonces el valor de la integral a lo largo de toda la trayectoria APB.

En la trayectoria *AQB* tenemos de nuevo que realizar dos integraciones. A lo largo de *AQ*, en la cual y = 1, tenemos la integral

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+1} = \left[\ln(x+1)\right]_{1}^{2} = \ln\frac{3}{2}$$

A lo largo del segmento vertical *QB* la integral es cero. Por tanto, para toda la trayectoria *AQB* el valor de la integral dada es $\ln \frac{3}{2}$.

Estos ejemplos no sólo ilustran los detalles del cálculo de la integración sino que también muestran que, en general, una integral de línea depende no sólo de los puntos extremos sino también de la trayectoria particular que los une.

Hay una clase especial de integrales de línea del tipo descrito que son de extrema importancia en algunas áreas, especialmente en las relacionadas con el concepto de trabajo y ya mencionadas al comienzo de esta sección. Trabajo, en el sentido más elemental, es el producto de fuerza por desplazamiento. Esto debe analizarse con más detalle si se reconoce que tanto la fuerza como el desplazamiento son vectores.

Considere la curva *C* mostrada en la Fig. 1.23. Defina \mathbf{t} como el vector unitario tangente a *C*. Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial que está definido en todo punto de la trayectoria definida por *C*. Entonces

$$\int_{C} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \tag{1.56}$$

se define como la integral de línea de la componente tangencial de F a lo largo de C, y se entiende que la integración comienza en $l = l_1$ y termina en $l = l_2$. Si F es una fuerza actuando sobe un objeto, entonces, por definición, la componente de F que realiza trabajo es sólo aquella que actúa a lo largo de la curva, es decir, la componente tangencial a la curva.



Figura 1.23

Para ver cómo se puede evaluar la integral en (1.56), considérese el vector radial \mathbf{r} desde un origen arbitrario hasta un punto en *C*, como muestra la Fig. 1.22. Forme ahora la derivada direccional de \mathbf{r} en la dirección de *s*. Es decir, formar el cociente

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} \tag{1.57}$$

y examínese su significado. Su dirección es obviamente la de la tangente a la curva C. Su magnitud, claramente, es la unidad. Por tanto se tiene que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \hat{\mathbf{t}} \tag{1.58}$$

Si se sustituye esta expresión para $\hat{\mathbf{t}}$ en el integrando, se obtiene

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \int_{C} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} \, dl = \int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.59}$$

La forma final muestra que se cambió el parámetro escalar *s* por el parámetro vectorial **r**. Esto simplifica el problema. Recuérdese que en coordenadas rectangulares, el vector radial **r** es dado por

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z$$

y por tanto

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{a}}_{x} + dy\hat{\mathbf{a}}_{y} + dz\hat{\mathbf{a}}_{z}$$

Como $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{a}}_x + F_y \hat{\mathbf{a}}_y + F_z \hat{\mathbf{a}}_z$, se tiene entonces que

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C} \left(F_{x} dx + F_{y} dy + F_{z} dz \right)$$

= $\int_{x_{1}}^{x_{2}} F_{x} dx + \int_{y_{1}}^{y_{2}} F_{y} dy + \int_{z_{1}}^{z_{2}} F_{z} dz$ (1.60)

Aquí se ve que el problema original se transformó en tres problemas mucho más sencillos (tres integraciones ordinarias). Por la forma de la integral en la Ec. (1.59) se observa rápidamente que, en coordenadas cilíndricas, el resultado será de la forma

José R. Morón

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\rho_{1}}^{\rho_{2}} F_{\rho} d\rho + \int_{\phi_{1}}^{\phi_{2}} F_{\phi} \rho \, d\phi + \int_{z_{1}}^{z_{2}} F_{z} dz$$
(1.61)

y en coordenadas esféricas,

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr + \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{\theta} r d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi_2} F_{\phi} r \sin \phi d\phi$$
(1.62)

donde, por supuesto, los integrandos deben evaluarse a lo largo de la curva en función de las variables de integración.

Si la trayectoria de integración se recorre completamente en torno a una curva cerrada, se usa la notación

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.63}$$

Este resultado con frecuencia se denomina la *circulación de* **F** alrededor de C. Cuando la integral en la Ec. (1.24) es igual a cero se dice que el campo **F** es *conservativo*.

Ejemplo 10. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = xy\,\hat{\mathbf{a}}_x + y^2\,\hat{\mathbf{a}}_y$$

y el contorno triangular cerrado en el plano xy mostrado en la Fig. 1.23, evalúe la integral de línea con trayectoria que comienza en el origen y se desplaza por la línea x = 0 hasta el punto y = 2, y después por la línea y = 2 hasta el punto x = 2 y regresa al origen a lo largo de la línea x = y. Calcular

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

(a) en coordenadas rectangulares; (b) en coordenadas cilíndricas.

Solución: Véase la Fig. 1.24.

(a)
$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\substack{c \\ x=0}}^{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\substack{c \\ y=2}}^{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\substack{c \\ x=y}}^{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\substack{c \\ x=y}}^{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\substack{c \\ x=y}}^{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\substack{c \\ x=y}}^{0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} + \int_{\substack{c \\ x=y}$$

Figura 1.24. Trayectoria para el Ejemplo 5.
(b) Se transforma **F** para obtener $\mathbf{F} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{a}}_r$. Entonces se observa que, en coordenadas cilíndricas, el contorno se inicia en el origen y se desplaza a lo largo de $\phi = \pi/2$ hasta $\rho = 2$, y entonces por la línea $\rho \operatorname{sen} \phi = 2$ hasta el punto $\rho = 2\sqrt{2}$, $\phi = \pi/4$, y luego regresa al origen a lo largo de la línea $\phi = \pi/4$. La solución es

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\substack{0 \\ \phi = \pi/2}}^{2} F_{\rho} d\rho + \int_{\substack{2 \\ \rho \sin \phi = 2}}^{2} F_{\rho} d\rho + \int_{\substack{2 \sqrt{2} \\ \phi = \pi/4}}^{0} F_{\rho} d\rho$$
$$= \int_{0}^{2} \rho^{3} d\rho + \int_{0}^{2 \sqrt{2}} 2\rho d\rho + \int_{2 \sqrt{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{2} d\rho$$
$$= \frac{\rho^{3}}{3} \Big|_{0}^{2} + \frac{2\rho^{2}}{2} \Big|_{0}^{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho^{3}}{3} \Big|_{2 \sqrt{2}}^{0} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 11. Calcular la integral

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

donde $\mathbf{F} = xy \hat{\mathbf{a}} - y^2 \hat{\mathbf{a}}_y$ a lo largo de la trayectoria (a) $y = \frac{1}{2}x$, (b) $y = \frac{1}{4}x^2$, (c) desde (0, 0) directo hasta (0, 1) y luego a lo largo de una recta horizontal hasta (2, 1).

Solución:. Aquí, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = xy \, dx - y^2 dy$. Entonces

(a) Trayectoria $y = \frac{1}{2}x$. Aquí $y = \frac{1}{2}dx$ y, por tanto,

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} \left(xy \, dx - y^2 \, dy \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \, dx - \frac{1}{8} x^2 \, dx \right) = \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = 1$$

(b) Trayectoria $y = \frac{1}{4}x^2$. Aquí $dy = \frac{1}{2}xdx$ y, por tanto,

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} \left(xy \, dx - y^2 \, dy \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 \, dx - \frac{1}{32} x^5 \, dx \right) = \left[\frac{1}{16} x^4 - \frac{1}{32 \cdot 6} x^6 \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

(c) Por la trayectoria desde (0, 0) hacia arriba hasta (0, 1): x = 0 y dx = 0; entonces desde (0, 1) a lo largo de una línea horizontal hasta (2, 1): y = 1 y dy = 0, de manera que

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} \left(xy \, dx - y^2 \, dy \right) = \int_{(0,0)}^{(0,1)} \left(xy \, dx - y^2 \, dy \right) + \int_{(0,1)}^{(2,1)} \left(xy \, dx - y^2 \, dy \right)$$
$$= -\int_0^1 y^2 \, dy + \int_0^2 x \, dx = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

En general, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ depende de la trayectoria de integración, como muestra el último ejemplo. Sin embargo, si \mathbf{F} se puede expresar como el gradiente de una función escalar, la integral es independiente de la trayectoria de integración, es decir, si $\mathbf{F} = \nabla \Phi$, entonces la integral entre los puntos *A* y *B* es dada por

$$\int_{A}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A}^{B} \nabla \Phi \cdot \left(dx \, \hat{\mathbf{a}}_{x} + dy \, \hat{\mathbf{a}}_{y} + dz \, \hat{\mathbf{a}}_{z} \right)$$
$$= \int_{A}^{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot \left(dx \, \hat{\mathbf{a}}_{x} + dy \, \hat{\mathbf{a}}_{y} + dz \, \hat{\mathbf{a}}_{z} \right)$$
$$= \int_{A}^{B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = \int_{A}^{B} d\Phi$$
$$= \Phi(B) - \Phi(A)$$

El valor de la integral sólo depende de los puntos extremos de la trayectoria. Observe que si la trayectoria es cerrada, se tiene que A = B y el valor de la integral es cero.

Ejemplo 12. Es posible demostrar (se deja como ejercicio) que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, con $\mathbf{F} = 6xy \,\hat{\mathbf{a}}_x + (3x^2 - 3y^2) \hat{\mathbf{a}}_y$ depende solamente de los puntos extremos y es independiente de la trayectoria de integración, por tanto, $\mathbf{F} = \nabla \Phi$. Determinar la función $\Phi(x, y)$ y demuestre que

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \Phi(2,2) - \Phi(0,0)$$

Solución:

$$\nabla \Phi = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6xy \,\hat{\mathbf{a}}_x + (3x^2 - 3y^2) \,\hat{\mathbf{a}}_y = \mathbf{F}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 6xy \implies \Phi = 3x^2y + f(y)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 + \frac{df(y)}{dy}$$

Entonces

$$\frac{df(y)}{dt} = -3y^2 \quad \Rightarrow \quad f(y) = -y^3 + k \quad (k \text{ es una constante})$$

De manera que

 $\Phi(x, y) = 3x^2y - y^3 + k$

у

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(0,0)}^{(2,2)} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{l} = \Phi(2,2) - \Phi(0,0) = 16 + k - k = 16$$

1.11.2 Integrales de Superficie

10()

La integral de superficie se define de la manera siguiente: Considere una superficie *S* en el espacio, como muestra la Fig. 1.25 y sea *f* una función escalar puntual definida en todo punto de *S*. Ahora subdivida *s* en *N* elementos contiguos de área $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_N$, y sea P_k cualquier punto en el *k*-ésimo elemento de área. Denote el valor de *f* en P_k por $f(P_k)$. Si la suma

$$\sum_{k=1}^{N} f(P_k) \Delta S_k$$

tiene un valor límite conforme $N \rightarrow \infty$ y el más grande de los ΔS_k tiende a cero, definimos este valor límite como la *integral de superficie de la función f sobre la superficie S* y denotamos la integral de superficie por

$$\int_{S} f(x,y,z) dS \tag{1.64}$$



Figura 1.25. Geometría para una integral de superficie.

Si la superficie es cerrada, se usa la notación

$$\oint_{S} f(x, y, z) dS \tag{1.65}$$

Nótese que el signo de integración indica una integral doble; se usa esta notación por sencillez.

La Ec. (1.65) se usará más cuando *f* es la componente normal de algún vector **F**. En ese caso, si $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie *S*, se trabajará con una función

$$f(x, yz) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

y se denotará la integral de superficie por

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.66}$$

o, para superficies cerradas,

$$\oint_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.67}$$

Esta integral de superficie se denomina el *flujo de la función vectorial* **F** *a través de S*, o, si $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal saliente de una superficie cerrada, el resultado se denomina el *flujo neto saliente de* **F** *a través de la superficie S*. Observe que, para una superficie abierta, se tiene que tomar una decisión arbitraria sobre la dirección positiva para $\hat{\mathbf{n}}$ y que el signo positivo dependerá de esa decisión. En el caso de una superficie cerrada, la convención, ya mencionada, para la normal positiva es que ella apunta *saliendo* de la superficie. Para una superficie abierta, la dirección debe darse como parte del enunciado del problema. Nótese también que $\hat{\mathbf{n}}$, en general, es una función de la posición.

Uno de los factores en los integrandos de las integrales de superficie en las Ecs. (1.66) y (1.67) es el vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$; esta cantidad juega un papel importante en la evaluación de las integrales de superficie. En el presente contexto, la palabra "normal" significa "perpendicular". Así, un vector \mathbf{N} normal al plano *xy* es claramente uno paralelo al eje *z*, en tanto que un vector normal a una superficie esférica debe estar en la dirección radial. Para dar una definición precisa de un vector normal a una superficie, considere una superficie arbitraria *S* como la ilustrada en la Fig. 1.26. Construya dos vectores no colineales $\mathbf{uy} \mathbf{v}$ tangentes a *S* en algún punto *P*. Un vector \mathbf{N} que sea perpendicular tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} es, por definición, normal a *S* en *P*. Como se sabe, el producto vectorial de $\mathbf{u} \mathbf{y} \mathbf{v}$ tiene precisamente esta propiedad; es perpendicular a ambos $\mathbf{u} \mathbf{y} \mathbf{v}$. De modo que se puede escribir $N = u \times v$. Para convertir N en un vector unitario, simplemente se divide por su magnitud *N*; esto es

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{N} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \tag{1.68}$$

es un vector unitario normal a S en P.



Figura 1.26

La evaluación de las integrales de superficie en (1.66) y (1.67) es relativamente directa en los casos especiales donde la superficie *S* es especificada por superficies de coordenadas constantes. En estos casos, la normal a la superficie es paralela a un vector unitario coordenado. El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento de evaluación.

Ejemplo 13. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = x^2 \hat{\mathbf{a}}_x + (y+z) \hat{\mathbf{a}}_y + xy \hat{\mathbf{a}}_z$$

se quiere determinar el flujo de **F** a través de una superficie rectangular en el plano *xy*, delimitada por las líneas x = 0, x = 3, y = 1 y y = 2, como muestra la Fig. 1.27.



Figura 1.27. La geometría para el Ejemplo 13.

Solución: De la figura se observa que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$ y que dS = dxdy. Por tanto,

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = F_z \, dx \, dy = xy \, dx \, dy$$

у

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{1}^{2} \int_{0}^{3} xy \, dx dy = \frac{27}{4}$$

Calculemos ahora el flujo de **F** a través de la superficie triangular en el plano *xz* acotada por el eje *x*, el eje *z* y la línea x + z = 1, como muestra la Fig. 1.27. De la figura se observa que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_{y}$ y que dS = dxdz. Por tanto,

32

 $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = F_y \, dx \, dz = (y+z) \, dx \, dz$

Pero y = 0, de modo que

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = z dx dz$$

y se obtiene

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_{0}^{1} z \left(\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-z} dx \right) dz = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} z dz \right) dx = \frac{1}{6}$$

Generalmente, la superficie *S* se define mediante una expresión de la forma z = g(x, y), donde *x* y *y* varían en una región *R* en el plano *xy*. En este caso,

$$\int f(x,y,z)dS = \int f(x,y,z)\sec\gamma dx\,dy \tag{1.69}$$

donde, en la integral en el lado derecho, z = g(x, y) y γ es el ángulo agudo entre la normal a S en (x, y, z) y el eje z positivo. Específicamente,

$$\sec \gamma = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
(1.70)

Observe que una vez determinada sec γ , la integración doble en la Ec. (1.69) procede igual que en el Ejemplo 2.

1.12 Definición General del Gradiente de una Función Escalar

En coordenadas cartesianas, el gradiente de una función escalar *U* ha sido definido mediante la Ec. (1.46). Con la ayuda de ∇U se puede determinar el cambio incremental *dU* debido a un desplazamiento vectorial elemental *d***r** (ver la Ec.(1.44)). Para obtener una definición general para el gradiente de *U* se debe tener en cuenta la Ec. (1.44). Por lo tanto es de prever que

$$\operatorname{grad} U \triangleq \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} U dS$$
(1.71)

Para demostrar que la definición dada por la Ec. (1.71) es equivalente a la definición (1.46), se selecciona un sistema de coordenadas cartesianas y se considera un elemento de volumen $v = \Delta x \Delta y \Delta z$ (Fig. 1.28). La superficie

S que encierra a *v* tiene seis caras planas. Cuando P_1 , P_1' , P_2 , P_2' , P_3 , P_3' son puntos seleccionados adecuadamente, se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}}(P_1) = \hat{\mathbf{a}}_x = -\hat{\mathbf{n}}(P_1') \qquad \hat{\mathbf{n}}(P_2) = \hat{\mathbf{a}}_y = -\hat{\mathbf{n}}(P_2') \qquad \hat{\mathbf{n}}(P_3) = \hat{\mathbf{a}}_z = -\hat{\mathbf{n}}(P_3')$$

у

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} U \, dS = \left[U(P_1) - U(P_1') \right] \Delta y \Delta z \, \hat{\mathbf{a}}_x + \left[U(P_2) - U(P_2') \right] \Delta x \Delta z \, \hat{\mathbf{a}}_y \\ + \left[U(P_3) - U(P_3') \right] \Delta x \Delta y \, \hat{\mathbf{a}}_z$$

Dividiendo por v y usando la Ec. (1.71) se obtiene entonces que

grad
$$U = \nabla U = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$
 (1.72)



Figura 1.28. Un elemento rectangular de volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.

Se infiere entonces que la Ec. (1.71) es una generalización de la Ec. (1.46). Con la ayuda de la Ec. (1.71) es posible demostrar que

$$\int_{v} \operatorname{grad} U \, dv = \int_{S} \hat{\mathbf{n}} U \, dS \tag{1.73}$$

donde *v* es el volumen delimitado por la superficie *S*.

En coordenadas cilíndricas, el vector gradiente de U es dado por la expresión

$$\nabla U = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\partial U}{\partial z}$$
(1.74)

y en coordenadas esféricas

$$\nabla U = \hat{\mathbf{a}}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$
(1.75)

1.13 Definición General de la Divergencia de una Función Vectorial

En la misma forma que se puede operar con ∇ sobre un campo escalar, también se puede operar con ∇ sobre un campo vectorial tomando el producto punto. Para entender el significado físico de la divergencia de un vector, considérese un semiconductor tipo *n* y sea *v* el volumen acotado por una superficie arbitraria *S* en el interior del conductor (Fig. 1.29). La normal unitaria saliente de *S* es $\hat{\mathbf{n}}$. Debido a vibraciones térmicas de la estructura cristalina o a causa de radiación externa, se rompen algunos de los enlaces que ligan los electrones a los átomos del cristal y se forman electrones libres. Sea ρ_v el número de electrones libres por unidad de volumen y sea \mathbf{u} su velocidad promedio resultante de la difusión y de las fuerzas debidas a un campo externo. Sea *g* el número efectivo de electrones libres generado por segundo en una unidad de volumen. El número total de electrones libres generado por segundo en el interior de *v* es

$$n_1 = \int_v g \, dv$$



Figura 1.29. Ilustración de la divergencia de una función vectorial.

El número total de electrones libres que sale por segundo de v a través de la superficie S es

$$n_2 = \int_S \rho_v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

El ritmo de crecimiento de los electrones libres en el interior de v está dado entonces por

$$n_1 - n_2 = \int_{v} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Sustituyendo a n_2 en la ecuación anterior, se obtiene que

$$\int_{v} \left(g - \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} \right) dv = \int_{S} \rho_{v} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.76}$$

La integral de superficie en el lado derecho de la Ec. (1.76) representa el *flujo* de electrones (flujo del vector $\rho_v \mathbf{u}$) que atraviesa la superficie *S*. Desde un punto de vista físico, el interés está en el flujo por unidad de volumen. Esta importante cantidad física se define como la *divergencia* del vector $\rho_v \mathbf{u}$:

$$\operatorname{div} \rho_v \mathbf{u} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_S \rho_v \, \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.77}$$

En la Ec. (1.76) se puede seleccionar a *S* como la superficie de una esfera de radio *r* centrada en un punto *P*. Si se hace que $r \rightarrow 0$, entonces $v \rightarrow 0$ y las Ecs. (1.76) y (1.77) dan

$$g - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_S \rho_v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.78}$$

De la Ec. (1.78) se obtiene la relación

$$\operatorname{div} \rho_v \mathbf{u} = g - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{1.79}$$

Cuando g = 0, la Ec. (1.79) se conoce como la *ecuación de continuidad*. Cuando g = 0, no se crean ni se destruyen electrones libres y la Ec. (1.79) expresa entonces *la conservación del número de electrones libres*. El mismo tipo de ecuación es válido en muchas otras situaciones físicas, por ejemplo en el flujo de fluidos y en el flujo de calor. Por tanto, se puede generalizar la Ec. (1.77) y afirmar que cuando un vector **B** representa una *densidad de flujo*, entonces la cantidad

$$\int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

representa el *flujo* del vector **B** a través de la superficie *S* y la *divergencia* de **B** es el *flujo por unidad de volumen* del vector **B**:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{1.80}$$

En la Ec. (1.80), *v* es el volumen delimitado por una superficie regular *S*.

La importancia física de la divergencia de un vector es una consecuencia del hecho de que ella es una medida de la intensidad de la fuente (o sumidero) del flujo del campo vectorial En la Ec. (1.79), por ejemplo, el flujo de electrones que sale de una unidad de volumen es $g - (\partial \rho_v / \partial t)$, que es, por definición la divergencia de $\rho_v \mathbf{u}$.

Al flujo de electrones se le considera como la fuente del campo vectorial $\rho_v \mathbf{u}$. La definición dada por la Ec. (1.80) pareciese diferir de la definición (1.49), pero en la Sección 1.14 se demostrará que las definiciones son equivalentes. Sin embargo, la ventaja de la Ec. (1.80) es que *no depende de un sistema de coordenadas específico*. En otras palabras, *si el campo* **B** *es un campo invariante, la divergencia de* **B** *es también un campo escalar invariante*. Si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se dice que el campo **B** es *solenoidal*. Cuando se compara la Ec. (1.49) con la Ec. (1.80), parecería que una representación general para el operador nabla es dada por

$$\nabla \left[\right] \triangleq \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \left[\right] dS \tag{1.81}$$

Entonces se puede obtener la Ec. (1.80) a partir de la Ec. (1.81) introduciendo el factor $\cdot \mathbf{B}$ entre los corchetes, para obtener

$$\nabla \left[\bullet \mathbf{B} \right] = \nabla \bullet \mathbf{B} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{B} \, dS$$

Observe en la Ec. (1.80) que la divergencia de un campo vectorial **B** es un escalar perteneciente al punto *P*.

1.14 La Divergencia en Coordenadas Cartesianas

Ahora se deducirá la expresión para la divergencia de un campo vectorial **B** en coordenadas cartesianas. Considere un elemento diferencial de volumen centrado en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en el campo de un vector **B**, como muestra la Fig. 1.30. En coordenadas cartesianas, el vector **B** puede expresarse como **B** = $\hat{\mathbf{a}}_x B_x + \hat{\mathbf{a}}_y B_y + \hat{\mathbf{a}}_z B_z$, y se quiere determinar la divergencia de **B** (div **B**) en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$.



Figura 1.30. Volumen diferencial en coordenadas cartesianas.

Como el volumen diferencial tiene seis caras, la integral de superficie en la Ec. (1.80) tiene que dividirse en seis partes para su evaluación, una por cada cara.

En la cara frontal,

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B}_{\text{cara}}_{\text{frontal}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{cara}}_{\text{frontal}} = \mathbf{B}_{\text{cara}}_{\text{frontal}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{x} (\Delta y \Delta z)$$

$$= B_{x} \left(x_{0} + \frac{1}{2} \Delta x, y_{0}, z_{0} \right) \Delta y \Delta z$$
(1.82)

La cantidad $B_x(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y_0, z_0)$ puede expandirse en una serie de Taylor en torno al punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Si sólo se retienen los dos primeros términos de la expansión, se obtiene

$$B_{x}\left(x_{0}+\frac{1}{2}\Delta x, y_{0}, z_{0}\right) \approx B_{x}\left(x_{0}, y_{0}, z_{0}\right)+\frac{1}{2}\Delta x\frac{\partial B_{x}}{\partial x}\Big|_{P}$$

En la cara trasera,

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B}_{\text{cara}}_{\text{trasera}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{cara}}_{\text{trasera}} = \mathbf{B}_{\text{cara}}_{\text{trasera}} \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_{x} \Delta y \Delta z)$$

$$= -B_{x} \left(x_{0} - \frac{1}{2} \Delta x, y_{0}, z_{0} \right) \Delta y \Delta z$$
(1.83)

y su aproximación en serie de Taylor es

$$B_{z}\left(x_{o}-\frac{1}{2}\Delta x, y_{o}, z_{o}\right) \approx B_{z}\left(x_{o}, y_{o}, z_{o}\right) - \frac{1}{2}\Delta x \frac{\partial B_{z}}{\partial x}$$

La combinación de las Ecs. (1.82) y (1.83) da el valor de la integral en las caras frontal y trasera:

$$\int_{\text{cara}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{cara}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_p \Delta x \Delta y \Delta z$$
(1.84)

Siguiendo el mismo procedimiento, se puede obtener el valor de las integrales para las otras cuatro caras del volumen diferencial, y el resultado es

 $\int_{\substack{\text{cara}\\\text{derecha}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{izquierda}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial B_y}{\partial y} \bigg|_P \Delta x \Delta y \Delta z$ (1.85)

$$\int_{\substack{\text{cara}\\\text{superior}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\substack{\text{cara}\\\text{inferior}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_p \Delta x \Delta y \Delta z$$
(1.86)

Puesto que $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$, sustituyendo las Ecs. (1.84), (1.85) y (1.86) en la Ec. (1.80), se obtiene la expresión para div **B** en coordenadas cartesianas:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$
(1.87)

En coordenadas cilíndricas, la divergencia del vector B es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho B_{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial B_{z}}{\partial z}$$
(1.88)

37

y en coordenadas esféricas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}$$
(1.89)

Ejemplo 14. Calcule la divergencia del campo vectorial **F** si (a) $\mathbf{F} = \rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + z \sin \phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi} + 2 \hat{\mathbf{a}}_{z}$, y (b) $\mathbf{F} = 2 \hat{\mathbf{a}}_{r} + r \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_{\theta} + r \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$.

Solución:

(a) Por la Ec. (1.88),

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial F_{z}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{2}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (z \operatorname{sen} \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2)$$
$$= 2 + \frac{z}{\rho} \cos \phi$$

(b) Por la Ec. (1.89), se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$
$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (2r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r)$$
$$= \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

1.15 El Teorema de la Divergencia; Tubos de Flujo

Un teorema de significado especial en el análisis vectorial es el *teorema de la divergencia*, también conocido como el *teorema de Gauss*, el cual relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie *S* con la divergencia del campo vectorial en volumen encerrado, y se expresa como

$$\int_{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.90}$$

donde v es el volumen encerrado por la superficie regular *S*. El vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ apunta en la dirección que sale del volumen.

Se puede ver la utilidad del teorema de la divergencia si se reconsidera la Ec. (1.76) y se toma $\mathbf{B} = \rho_v \mathbf{u}$. Con la ayuda de la Ec. (1.90) se obtiene que

$$\int_{v} \left(g - \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dv = 0$$
(1.91)

Puesto que la integral anterior se anula para un volumen arbitrario *v*, se deduce que el integrando también se debe anular. Eso produce como resultado la Ec. (1.79).

Se ve entonces que el teorema de la divergencia es útil para derivar relaciones diferenciales entre los vectores del campo que representen densidades de flujo y las fuentes del flujo del campo. El teorema de la divergencia también es de utilidad en la deducción de identidades vectoriales y en la manipulación de identidades vectoriales entre las densidades del flujo y las fuentes del flujo del campo.

Para demostrar el teorema de la divergencia, se puede dividir el volumen v en N volúmenes elementales Δv_k , (k = 1, ..., N). Si $N \rightarrow \infty$, entonces $\Delta v_k \rightarrow 0$, y la Ec. (1.80) da

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{div} \mathbf{B}(P_k) \Delta v_k = \sum_{k=1}^{N} \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

donde P_k es un punto interno del volumen Δv_k escogido adecuadamente y S_k representa la superficie de Δv_k . Ahora se forma la suma

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{div} \mathbf{B}(P_k) \Delta v_k = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1.92}$$

La integral de superficie final es sobre la superficie *S* que encierra a *v*. Esto se puede ver al notar que las normales salientes de la superficie común a dos elementos de volumen adyacentes están en direcciones opuestas. Por ello, cuando se forma la sumatoria, las integrales en los elementos de área en el interior de *v* se cancelan por pares, el flujo saliente de un elemento de volumen es un flujo que entra en los elementos de volumen vecinos, lo cual produce cancelaciones en cada superficie interior, y sólo queda la integral sobre los elementos de área que forman la superficie *S* y delimitan a *v*. Si se hace que $\Delta v_k \rightarrow 0$, la Ec. (1.92) da como resultado el teorema de la divergencia.

Cuando div $\mathbf{B} = 0$ en todo el volumen v, se obtiene el importante resultado

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{1.93}$$

La Ec. (1.40) establece que el flujo resultante de **B** que atraviesa una superficie cerrada *S* es cero. Este resultado permite introducir el concepto de un *tubo de flujo*. Para formar un tubo de flujo se selecciona una superficie S_0 para la cual $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ en todos los puntos de S_0 . Entonces se escogen las superficies S_1 y S_2 para formar un volumen tubular *v* encerrado por la superficie $S = S_0 + S_1 + S_2$ (Fig. 1.30). Si la div $\mathbf{B} = 0$ en todo el volumen *v*, se cumple la Ec. (1.93). Si se toman las normales $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$ de forma que tengan la dirección del campo vectorial \mathbf{B} , de la Fig. (1.31) se ve que la normal saliendo de S_1 es $-\hat{\mathbf{n}}_1$. Así que, puesto que la integral sobre S_0 se anula, entonces

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_1) dS + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2) dS = 0$$



Figura 1.30. Un tubo de flujo.

La ecuación anterior puede escribirse como

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS \tag{1.94}$$

La Ec. (1.94) expresa que el flujo de **B** a través de la región tubular permanece constante. Una región tubular de esta forma se denomina un *tubo de flujo*. Se dice que un campo de flujo **B** es *solenoidal* si la divergencia de **B** es igual a cero en todas partes.

Para ilustrar estos conceptos, considérese la *densidad del flujo eléctrico* **D** producida por una densidad de carga uniforme ρ_v dentro de una esfera de radio *a*. El centro de la esfera se toma como el origen de un sistema de coordenadas esféricas. Se puede demostrar que **D** está dada por

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r}, & r > a \qquad \text{(a)} \\ \frac{Q}{4\pi a^3} \mathbf{r}, & r < a \qquad \text{(b)} \end{cases}$$
(1.95)

donde **r** es el radio vector desde el origen hasta un punto *P* del campo y $Q = \frac{4}{3}\pi a^2 \rho_v$ es la carga total dentro de la esfera. Si *r* > *a*, se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right] = 0$$
(1.96)

y si r < a, se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi a^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) \right] = \rho_v$$
(1.97)

La carga se considera como la fuente del flujo eléctrico. De las Ecs. (1.96) y (1.97) se obtiene que la divergencia de D da la densidad ρ de la fuente.

Calcúlese ahora el *flujo eléctrico* Ψ_e a través de una superficie abierta *S* la cual está delimitada por una esfera de radio r > a y el cono $\theta = \theta_0$ (Fig. 1.31). Usando la Ec. (1.62) y el hecho de que $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$, se encuentra que

$$\Psi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{Q}{4\pi r^2} \int_0^{\theta_0} (2\pi r \operatorname{sen} \theta) (r \, d\theta) = \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta_0)$$
(1.98)

(Debido a la simetría es conveniente tomar el elemento de área *dS* como la cinta sombreada mostrada en la Fig. 1.32, la cual tiene una longitud de $2\pi r \sec \theta$ y una anchura igual a $rd\theta$.) El cono $\theta = \theta_0$ es un tubo de flujo y si r > a, el flujo en el interior del tubo está dado por la Ec. (1.98).



Figura 1.32 El flujo eléctrico de una esfera cargada uniformemente.

Con la ayuda de las Ecs. (1.95), (1.96) y (1.97) se ilustrará ahora el teorema de la divergencia evaluando tanto la integral de superficie como la de volumen. Se selecciona *S* como la superficie de una esfera de radio *b* la cual está centrada en *P* en el eje *z* (Fig. 1.33). Si z + b < a, la esfera *S* está completamente en el interior de la esfera cargada, y de la Ec. (1.97) se obtiene

$$\int_{v} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{4}{3} \pi b^{3} \rho = Q \left(\frac{b}{a}\right)^{3} \tag{1.99}$$

Para evaluar el flujo eléctrico Ψ_e a través de *S*, se toma el elemento de área como

 $dS = (2\pi b \operatorname{sen} \theta)(bd\theta)$

De la Fig. 1.33 se tiene que $r \cos \alpha = b + z \cos \theta$. Ahora se puede evaluar la integral para obtener



Figura 1.33. Ilustración del teorema de la divergencia.

La Ec. (1.100) es idéntica a la Ec. (1.99), como lo requiere el teorema de la divergencia. Adicionalmente, si se calcula el flujo eléctrico por unidad de volumen y se hace que $b \rightarrow 0$, se obtiene la divergencia de **D**:

$$\lim_{b \to 0} \frac{Q(b/a)^{3}}{\frac{4}{2}\pi b^{3}} = \frac{3Q}{4\pi a^{3}} = \rho$$

Si la superficie S está completamente en el exterior de la esfera cargada (ver las Ecs. (1.96) y (1.97)), se tiene que

$$\int_{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \, dv = \rho \, \frac{4}{3} \, \pi a^{3} = Q \tag{1.101}$$

y (ver la Ec. (1.95))

$$\Psi_e = \frac{Q}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{r \cos \alpha}{r^3} (2\pi b \sin \theta) (bd\theta)$$

La integral anterior se puede evaluar más fácilmente expresando θ en función de *r*. De la ley del coseno se tiene que

$$r\cos\alpha = \frac{r^2 + b^2 - z^2}{2b}, \qquad r^2 = b^2 + z^2 + 2bz\cos\theta$$

Por tanto,

$$rdr = -bz \operatorname{sen} \Theta d\Theta \quad y \quad \Psi_e = \frac{Q}{4z} \int_{b-z}^{b+z} \left(1 + \frac{b^2 - z^2}{r^2}\right) dr = Q$$

tal y como lo requiere el teorema de la divergencia.

Ejemplo 15. Verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial especificado por $\mathbf{A} = x \hat{\mathbf{a}} + y \hat{\mathbf{a}} + z \hat{\mathbf{a}}$ sobre un cilindro descrito por $x^2 + y^2 = 4$ y $0 \le z \le 4$.

Solución: Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

la integral de volumen es

$$\int_{v} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = 3 \int_{v} dv = 3 \left(\pi 2^2 \right) 4 = 48 \pi$$

La superficie del cilindro consiste de las superficies superior, inferior y lateral. Por tanto, la integral de superficie puede dividirse en tres partes:

$$\oint_{S} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{\text{sup}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \iint_{\text{inf}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \iint_{\text{lat}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Para la superficie superior,

$$\iint_{\sup} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{\sup} \left(x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z \right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \, dS = 4 \iint_S dS = 4\pi 2^2 = 16\pi$$

Para la superficie inferior,

$$\iint_{\inf} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{\inf} \left(x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y + 0 \hat{\mathbf{a}}_z \right) \cdot \left(-\hat{\mathbf{a}}_z \right) dS = 0$$

Para la superficie lateral curva, primero debemos hallar la normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$. Como la superficie es descrita por $f(x, y) = x^2 + y^2 = 4$,

$$\frac{\nabla f}{\left|\nabla f\right|} = \frac{2x\hat{\mathbf{a}}_x + 2y\hat{\mathbf{a}}_y}{\left(x^2 + 4y^2\right)^{1/2}} = \frac{x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y}{2}$$

Entonces

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (x \,\hat{\mathbf{a}} + y \,\hat{\mathbf{a}} + z \,\hat{\mathbf{a}}) \cdot \frac{x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y}{2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = 2$$

y

$$\int_{\text{lat}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 2 \int_{\text{lat}} dS = 2 (2\pi \cdot 2) 4 = 32\pi$$

 $\oint_{c} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 16\pi + 0 + 32\pi = 48\pi$

Por tanto,

1.16 Definición General del Rotacional de una Función Vectorial

La forma de las Ecs. (1.80) y (1.71) sugiere que se puede obtener una generalización de la definición (1.50) para el rotacional $\nabla \times \mathbf{B}$ insertando el término $\times \mathbf{B}$ entre los corchetes en la Ec. (1.81):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} \triangleq \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} \, dS \tag{1.102}$$

Se puede ver que las dos definiciones en las Ecs. (1.50) y (1.102) son equivalentes considerando el volumen elemental $v = \Delta x \Delta y \Delta z$ ilustrado en la Fig. 1.27 o en la Fig. 1.29. Se tiene entonces que

42

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} \, dS = \hat{\mathbf{a}}_{x} \times \left[\mathbf{B}(P_{1}) - \mathbf{B}(P_{1}') \right] \Delta y \Delta z + \hat{\mathbf{a}}_{y} \times \left[\mathbf{B}(P_{2}) - \mathbf{B}(P_{2}') \right] \Delta x \Delta z$$
$$+ \hat{\mathbf{a}}_{z} \times \left[\mathbf{B}(P_{3}) - \mathbf{B}(P_{3}') \right] \Delta x \Delta y$$

Dividiendo por v y usando la Ec. (1.102), se obtiene la ecuación

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_{x} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$$

la cual es equivalente a la Ec. (1.50).

El rotacional es una operación vectorial de extrema importancia. Su nombre sugiere que tiene algo que ver con rotación y se obtiene mediante el producto cruz del operador ∇ con el vector **B**. Para entender su significado físico, se analizará la aplicación de la Ec. (1.102) al caso de la rotación de un cuerpo rígido. Se selecciona un rotor circular de radio *a* y ancho *w* que gira con una velocidad angular ω (Fig. 1.33). La velocidad en cualquier punto *P* en el rotor está dada por

 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

donde **r** es el radio vector desde el centro *O* del rotor hasta *P*. Supóngase que se conoce **u** en la superficie *S* del rotor y que se desea determinar $\boldsymbol{\omega}$. Con esto en mente, considérese la integral de superficie



Figura 1.33. Un rotor con velocidad angular ω.

Puesto que $\hat{\mathbf{n}}(P_1) = -\hat{\mathbf{n}}(P_2)$, donde P_1 y P_2 son puntos correspondientes en los lados S_1 y S_2 del rotor, se ve que solamente el lado S_0 contribuye al valor de I. En S_0 se tiene que

 $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = a$

 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} = \hat{\mathbf{n}} \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = a\boldsymbol{\omega}$

Así que

$$I = \int_{S_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \, dS = a \mathbf{\omega} 2 \, \pi a w = 2 \, \mathbf{\omega} \, v \tag{1.103}$$

donde $v = \pi a^2 w$ es el volumen del rotor.

Tomando $\mathbf{B} = \mathbf{u}$ en la Ec. (1.102) y comparándola con la Ec. (1.103), se obtiene que

$$2\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{1.104}$$

La Ec. (1.104) permite afirmar que el rotacional de un vector es una medida de la fuente de rotación del campo vectorial. Para el rotor ilustrado en la Fig. 1.32, la fuente de la rotación del campo vectorial \mathbf{u} es la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Observe que rot \mathbf{u} es proporcional a $\boldsymbol{\omega}$; la cantidad rot \mathbf{u} se conoce como el vector *vorticidad* del campo.

Con la ayuda de la Fig. 1.33 es posible obtener una definición diferente del rotacional que posteriormente demostrará ser de mucha utilidad. Para el ejemplo del rotor, ya se demostró que

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \, dS = \frac{1}{v} \int_{S_0} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \, dS$$

Sea ds = wdl y multiplíquese escalarmente la ecuación anterior por el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ (Fig. 1.32). Se tiene entonces que

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) dl = \mathbf{u} \cdot (\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{n}}) dl = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

donde *d*l es un vector elemental dirigido a lo largo del borde C_1 del rotor. Si se toma $S_1 = \pi a^2$ y $v = wS_1$, se obtiene

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{S_1} \oint_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$
(1.105)

donde la integral de línea se evalúa a lo largo del contorno C_1 definido por el borde del rotor. La Ec. (1.105) puede ser generalizada de forma que sea aplicable a un campo vectorial **u** arbitrario,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{C} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$
(1.106)

Aquí *S* es una superficie delimitada por un contorno C_1 y $\hat{\mathbf{n}}$ es una normal unitaria a S_1 . El contorno C_1 es recorrido en un sentido derecho con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$. Es decir, cuando nos movemos a lo largo de C_1 en la dirección indicada en la Fig. 1.34(a), el vector $\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l}$ estará en la superficie S_1 . Este punto es importante recordar, ya que se supondrá tácitamente que todas las integrales de línea son evaluadas de esta forma. El no seleccionar un sentido correcto podría resultar en un signo incorrecto en la evaluación de una integral de línea.



Figura 1.34. Ilustración que define el rotacional de un vector.

La integral de línea en la Ec. (1.105) se define como la *circulación* del campo vectorial **u** en torno al lazo cerrado. El significado físico de la circulación depende del tipo de campo que el vector **u** representa. Si el vector **u** representa una fuerza actuando sobre un objeto, la circulación es igual al trabajo asociado con la acción de mover el objeto una vez alrededor de la trayectoria cerrada; si **u** representa la intensidad de campo eléctrico, entonces la circulación será una fuerza electromotriz en torno a la trayectoria cerrada. El conocido fenómeno del agua formando un remolino en un drenaje es un ejemplo de una *fuente de vórtice* que produce una circulación de la velocidad del fluido. La Ec. (1.105) define la componente del rotacional en la dirección de **n** como la circulación se puede determinar evaluando el rotacional. Para el rotor, la circulación es

$$\oint_{C} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = (a\omega)(2\pi a)$$

y la circulación por unidad de área es 2ω , que es la componente de rot **u** en la dirección de **o**. Si el rotacional de un campo vectorial es igual a cero en todas partes, el campo se denomina *irrotacional*.

La Ec. (1.106) puede usarse para obtener una expresión del rotacional en cualquier sistema de coordenadas. Por ejemplo, en el sistema cartesiano, la componente en x se define tomando como el contorno C un cuadrado en el plano x = constante que contiene a un punto P, como muestra la Fig. 1.33(b). De la definición, se tiene que

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_{x} = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z}$$

Si $\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{a}}_x + u_y \hat{\mathbf{a}}_y + u_z \hat{\mathbf{a}}_z$ en el punto 1, entonces

$$\oint_{C} = \int_{1}^{2} + \int_{2}^{3} + \int_{3}^{4} + \int_{4}^{1} = u_{y} \Delta y + \left(u_{z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial y} \Delta y\right) \Delta z + \left(u_{y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial z} \Delta z\right) (-\Delta y) + u_{z} (-\Delta z)$$

$$= \left(\frac{\partial u_{z}}{\partial y} - \frac{\partial u_{y}}{\partial z}\right) \Delta y \Delta z$$

у

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

Las componentes en y y en z se pueden determinar mediante un proceso similar, y luego se combinan los resultados para obtener, en coordenadas cartesianas, que

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \hat{\mathbf{a}}_z$$
(1.107)

Se puede escribir un determinante de tercer orden, cuya expansión da el rotacional de \mathbf{u} en coordenadas cartesianas como

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{x} & \hat{\mathbf{a}}_{y} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_{x} & u_{y} & u_{z} \end{vmatrix}$$
(1.108)

Con la ayuda de la Ec. (1.102), es posible demostrar que

$$\int_{v} \operatorname{rot} \mathbf{B} \, dv = \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} \, dS \tag{1.109}$$

1.17 Teorema de Stokes

Un teorema que demostrará ser de mucha utilidad en el estudio de la teoría electromagnética es el *teorema de Stokes*:

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \, dS = \oint_{C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.110}$$

Aquí la superficie *S* está acotada por un contorno *C* el cual es recorrido en un sentido derecho (Fig. 1.35). La Ec. (1.110) puede expresarse en la forma siguiente: *el flujo del vector* rot **B** *a través de la superficie abierta S es igual a la circulación de* **B** *alrededor del contorno C que delimita a la superficie S*. Este teorema tiene un papel muy importante en la ley de Faraday.

Para demostrar el teorema de Stokes, se subdivide la superficie *S* en *N* áreas elementales ΔS_k , Fig. 1.35. Aplicando la Ec. (1.106) a la superficie ΔS_k , produce la relación

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot}(P_k) \Delta S_k = \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$
(1.11)

donde P_k es un punto interior de ΔS_k seleccionado adecuadamente. Cuando se suma la Ec. (1.111) sobre todos los N elementos de área, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(P_k) \Delta S_k = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$
(1.112)

La integral de línea final es evaluada en el contorno *C* que delimita a *S*. Esto se puede ver observando que la parte del contorno común a dos áreas adyacentes en el interior de *S* es recorrida en sentidos opuestos *y*, por lo tanto, no contribuye en nada al resultado final. La Ec. (1.110) se obtiene a partir de la Ec. (1.112) cuando se toma el límite conforme $\Delta S_k \rightarrow 0$.



Figura 1.35. Una superficie *S* delimitada por un contorno *C*.

Para ilustrar el teorema de Stokes, considérese el caso de un conductor circular de longitud infinita y de radio *a*, en el cual hay una densidad de corriente $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{a}}_z J$ distribuida uniformemente en su sección transversal (Fig. 1.36). Se puede demostrar que la *intensidad del campo magnético* **H** resultante de esta corriente está dada por

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{J\rho}{2}, & \rho < a \qquad (a) \\ \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{a^2 J}{2\rho}, & \rho > a \qquad (b) \end{cases}$$
(1.113)

y que

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{J}, & \rho < a & (a) \\ \mathbf{0}, & \rho > a & (b) \end{cases}$$
(1.114)



Figura 1.36. Un conductor cilíndrico circular de longitud infinita con una densidad de corriente axial y uniforme **J**.

Seleccione ahora un contorno *C* delimitado por los círculos $\rho = r_1$, $\rho = r_2$ y el ángulo α y evalúese la circulación de **H** alrededor de *C*. (Fig. 1.37). Si $r_2 < a$, se usa la Ec. (1.113)(a) para obtener

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{J}{2} \Big[r_2 \left(r_2 \alpha \right) - r_1 \left(r_1 \alpha \right) \Big] = JS$$
(1.115)

donde S es el área delimitada por C. De la Ec. (1.114)a se tiene que

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \, dS = JS \tag{1.116}$$

Las Ecs. (1.115) y (1.116) son iguales, como lo requiere el teorema de Stokes. La corriente en el interior de *C* es igual a *JS*, y ésta se considera como la fuente de la circulación de **H**.



Figura 1.37. Un contorno *C* que ilustra el teorema de Stokes.

Si $r_1 > a$, se usa la Ec. (1.113)(b) para obtener

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{a^{2} J}{2} \left[\frac{1}{r_{2}} (r_{2} \alpha) - \frac{1}{r_{1}} (r_{1} \alpha) \right] = 0$$
(1.117)

De la Ec. (1.114)(b), se obtiene que

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \, dS = \mathbf{0} \tag{1.118}$$

Las Ecs. (1.117) y (1.118) son iguales, tal y como lo requiere el teorema de Stokes. La corriente en el interior de *C* es ahora cero y, por consiguiente, la circulación de **H** también es cero.

La Ec. (1.113)(a) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{J} \times \mathbf{r} \tag{1.119}$$

Si se toma una sección del conductor de longitud w, es posible establecer una analogía con el rotor ilustrado en la Fig. 1.33 observando que la Ec. (1.119) es análoga a la ecuación

$$\mathbf{u} = \mathbf{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.120}$$

La velocidad angular es considerada como la fuente de la rotación (circulación) del campo vectorial **u**. Por analogía, es posible decir ahora que la densidad de corriente **J** es la fuente de la rotación (circulación) del campo vectorial **H**.

Ejemplo 16. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_x + zy^2 \hat{\mathbf{a}}_y$ y la superficie plana en el plano *yz* mostrada en la Fig. 1.38.



Solución: La trayectoria C se describe en sentido horario. Entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

En la trayectoria C_1 , y = 0, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_z dz) = 0$ y, por tanto,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{z=0}^1 0 \, dz = 0$$

En la trayectoria C_2 , z = 1, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_z dy) = y^2 dy$ y, por tanto,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{y=0}^1 y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

1

En la trayectoria C_3 , y = 1, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_z dz) = 0$ y, por tanto,

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{z=1}^0 0 \, dz = 0$$

y, finalmente, en la trayectoria C_4 , z = 0, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_y dy) = 0$ y, por tanto,

$$\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{y=1}^0 0 \, dy = 0$$



De modo que la integral de línea da como resultado

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 + \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$$

Puesto que rot $\mathbf{F} = -y^2 \hat{\mathbf{a}}_y \ y \ d\mathbf{S} = dydz(-\hat{\mathbf{a}}_x)$, la integral de superficie da

$$\int_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} y^{2} dy dz = \frac{1}{3}$$

lo cual verifica el teorema.

Ejemplo 17. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial dado por $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_x (x+y) - \hat{\mathbf{a}}_y 2x^2 + \hat{\mathbf{a}}_z xy$ y el hemisferio superior de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Fig. 1.39.

Solución:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{x} & \hat{\mathbf{a}}_{y} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y & -2x^{2} & xy \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{a}}_{x}x - \hat{\mathbf{a}}_{y}y - \hat{\mathbf{a}}_{z} (4x+1)$$

Figura 1.39

$$\int_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} \left[\hat{\mathbf{a}}_{x} x - \hat{\mathbf{a}}_{y} y - \hat{\mathbf{a}}_{z} (4x+1) \right] \cdot \hat{\mathbf{a}}_{n} dS$$
$$= \int_{\sigma} \left[\hat{\mathbf{a}}_{x} x - \hat{\mathbf{a}}_{y} y - \hat{\mathbf{a}}_{z} (4x+1) \right] \cdot \hat{\mathbf{a}}_{n} \frac{dx \, dy}{\cos(\hat{\mathbf{a}}_{n}, \hat{\mathbf{a}}_{z})}$$

Aquí $\boldsymbol{\sigma}$ es la proyección de *S* sobre el plano *xy* como se muestra en la figura. El vector gradiente a la superficie $f = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ es $\nabla f = \hat{\mathbf{a}}_x 2x + \hat{\mathbf{a}}_y 2y + \hat{\mathbf{a}}_z 2z$. Entonces $|\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2$, el vector normal es $\hat{\mathbf{a}}_n = \nabla f / |\nabla f| = \hat{\mathbf{a}}_x x + \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z z$ y se tiene que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x x - \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z (4x+1) \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x x - \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z (4x+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x x + \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z z \end{bmatrix}$$
$$= x^2 - y^2 - (4x+1)z$$

También, $\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = (1) \times (1) \times \cos(\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) = (x)(0) + (y)(0) + (z)(1) = z$, por lo que $\cos(\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) = z$. Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{split} \int_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{x=1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \left[x^{2} - y^{2} - (4x+1)z \right] \frac{dx \, dy}{z} \\ &= \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \frac{x^{2} - y^{2}}{\sqrt{1-x^{2} - y^{2}}} \, dy - \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \frac{(4x+1) \, dy}{\sqrt{1-x^{2} - y^{2}}} \\ &= \int_{x=-1}^{1} x^{2} dx \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^{2} - y^{2}}} - \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \frac{y^{2} \, dy}{\sqrt{1-x^{2} - y^{2}}} - \int_{x=-1}^{1} (4x+1) \, dx \int_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} dy \\ &= \int_{x=-1}^{1} x^{2} \, dx \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{\sqrt{1-x^{2}}} \right]_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \\ &- \int_{x=-1}^{1} dx \left[-\frac{y}{2} \sqrt{(1-x^{2}) - y^{2}} + \frac{1-x^{2}}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{\sqrt{1-x^{2}}} \right]_{y=-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} \\ &- \int_{x=-1}^{1} (4x+1) \, dx \left(2\sqrt{1-x^{2}} \right) \\ &= \int_{-1}^{1} x^{2} \, dx \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] - \int_{-1}^{1} \, dx \left[0 + \frac{1-x^{2}}{2} \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1-x^{2}}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &- \int_{-1}^{1} \operatorname{8x} \sqrt{1-x^{2}} \, dx - 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^{2}} \, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^{3}}{3} \right]_{-1}^{1} - \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{x^{3}}{3} \right]_{-1}^{1} - 8 - \frac{1}{3} \left[(1-x^{2})^{3/2} \right]_{-1}^{1/2} \end{split}$$

Ahora, para la integral de línea,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \left[\hat{\mathbf{a}}_x \left(x + y \right) - \hat{\mathbf{a}}_y 2x^2 + \hat{\mathbf{a}}xy \right] \cdot \left[\hat{\mathbf{a}}_x dx + \hat{\mathbf{a}}_y dy + \hat{\mathbf{a}}_z dz \right]$$
$$= \oint_C \left[\left(x + y \right) dx \right] - 2x^2 dy$$

Sea $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$. Entonces $dx = -\sin \varphi d\varphi$, $dy = \cos \varphi d\varphi$ y

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{0}^{2\pi} \left[(\cos \varphi + \sin \varphi) (-\sin \varphi d\varphi) - 2 \cos^{3} \varphi d\varphi \right]$$

$$= 0 - \pi - \frac{2}{3} \left[\operatorname{sen} \varphi(\cos^2 \varphi) + 2 \operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi}$$
$$= -\pi$$

lo cual verifica el teorema de Stokes para el caso bajo consideración.

En la Sec. 1.11 se definió un campo conservativo. Para los campos de este tipo se cumple que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

donde *C* es cualquier trayectoria cerrada arbitraria. La interpretación física de esta integración es que el trabajo realizado al mover un objeto en un campo de fuerza conservativo, a lo largo de una trayectoria cerrada es cero. Transformando el lado izquierdo de esta ecuación mediante la aplicación del teorema de Stokes, se obtiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

la cual produce la expresión diferencial equivalente de que el campo es conservativo si

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Otro criterio sinónimo es que el campo puede expresarse como el gradiente de una función escalar de la posición, la función *potencial* Φ , lo que se escribe convencionalmente como

 $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$

Lo anterior es equivalente a demostrar que el rotacional de un gradiente es igual a cero. Más adelante Capítulo 2) se explicará la razón para la selección el signo "menos" en la ecuación anterior.

1.18 Puntos de Fuente y Puntos del Campo

En la teoría del campo electromagnético se considera que las cargas y las corrientes en un *punto de fuente* Q establecen un campo electromagnético en un *punto del campo* P. El campo resultante en P se obtiene sumando (integrando) los efectos de todas las fuentes. En los capítulos que siguen, se estudiará que para una fuente vectorial **J** en Q, con coordenadas (x', y', z'), el vector del campo resultante en P, con coordenadas (x, y, z), tiene la forma

$$\mathbf{F} = \int_{v'} \frac{\mathbf{J}}{r} dv' \tag{1.121}$$

donde *r* es la distancia entre *P* y *Q*. Es decir,

$$r^{2} = (x - x')^{2} + (y - y')^{2} + (z - z')^{2}$$

Las variables de integración son x', y' y z' de manera que dv' = dx'dy'dz' Para distinguir entre las derivadas con respecto a x, y y z y las derivadas con respecto a x', y' y z' se le coloca una tilde al operador ∇ , es decir,

$$\nabla' \triangleq \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial z'}$$

Se verifica fácilmente que

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\hat{\mathbf{a}}_{x} \frac{x - x'}{r^{3}} - \hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{y - y'}{r^{3}} - \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{z - z'}{r^{3}} = -\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)$$
(1.122)

Para tener una idea de la utilidad de este simple resultado, se calculará la divergencia de **F**. Se permite diferenciar bajo el signo de integración y, puesto que $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x', y', z')$ es independiente de *P* se puede usar la Ec. (1.181) para obtener

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{v'} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) dv' = \int_{v'} \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) dv'$$
(1.123)

1.18.1 Fuentes Puntuales

En los problemas físicos surgen campos vectoriales provenientes de distribuciones de fuentes que son continuas en el espacio. Sin embargo, es conveniente, principalmente desde un punto de vista matemático, suponer que la distribución de la fuente es discontinua. Aquí se considerarán las características de campos establecidos por *fuentes puntuales*. Se debe señalar que mediante la superposición apropiada de estas fuentes puntuales, es posible representar cualquier distribución arbitraria.

Para una sola fuente puntual *q* situada en el origen *O*, la simetría requiere que las líneas de flujo sean radiales y diverjan uniformemente. Si se selecciona cualquier superficie esférica cuyo centro esté en la fuente puntual, como se ilustra en la Fig. 1.40, el flujo que cruza la superficie será independiente del radio. En particular, el flujo total calculado es una medida del flujo saliente total proveniente de la fuente – y por consiguiente es una medida de la intensidad de la fuente. Si a esta cantidad se le llama *q* y **F** es el campo vectorial, entonces

$$q = k \oint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = k \, 4 \, \pi r^2 F_r$$

La integral de superficie es sobre una superficie esférica de radio r y es fácil evaluarla porque **F** está en la dirección radial y tiene la misma magnitud en toda *S*. k es una constante de proporcionalidad que se debe determinar con base en la definición de la intensidad de la fuente. Se seleccionará k = 1, tal que

$$q = 4\pi r^2 F_r$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \tag{1.124}$$

y por tanto se debe tener que

donde $\hat{\mathbf{a}}_r$ es un vector unitario en la dirección radial.

Figura 1.40. Líneas de flujo desde una fuente puntual.

Este campo vectorial es irrotacional, un hecho que se establece rápidamente demostrando que **F** puede obtenerse como el gradiente de una función escalar Φ . Por inspección, está claro que si $\Phi = q/4\pi r$, entonces



$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = -\frac{q}{4\pi}\hat{\mathbf{a}}_r \frac{\partial(r^{-1})}{\partial r} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{a}}_r$$
(1.125)

Si se va a manipular aún más la integral de volumen en la Ec. (1.123), el integrando debe expresarse en términos que involucren la divergencia de un vector. Entonces es posible aplicar el teorema de la divergencia. Las derivadas que ocurren en el teorema de la divergencia se evalúan con respecto a las variables de integración, así que se debe considerar la relación

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right) = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J} - \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right)$$

Aquí se han usado las Ecs. (1.184) y (1.122). El resultado aparentemente trivial dado por la Ec. (1.122) permite escribir el integrando en la Ec. (1.123) en la forma

$$\mathbf{J} \bullet \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \nabla' \bullet \mathbf{J} - \nabla' \bullet \left(\frac{\mathbf{J}}{r}\right)$$

lo que permite estar en una posición en la que se puede aplicar el teorema de la divergencia. Por consiguiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{v'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{r} dv' - \int_{S} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}}{r} dS$$
(1.126)

Aquí *S* es la superficie que delimita a v'.

El tipo de manipulación usado para obtener la Ec. (1.126) se usará extensivamente en el resto de estas notas y por ello debe ser entendida completamente. Se debe observar que la divergencia de \mathbf{F} es evaluada en P y que la divergencia de \mathbf{J} es evaluada en Q.

1.19 El Teorema de Green y el Teorema de la Unicidad

Si se sustituyen las relaciones

$$\mathbf{D}_1 = U \operatorname{grad} V$$
$$\mathbf{D}_2 = V \operatorname{grad} U$$

en la Ec. (1.90) y se resta una ecuación de la otra, se obtiene el teorema de Green,

$$\int_{v} \left(V \nabla^{2} U - U \nabla^{2} V \right) dv = \int_{S} \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS$$
(1.127)

Aquí la función $\partial U/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{grad} U$ es la rapidez de cambio de *U* en la dirección de la normal a la superficie $\hat{\mathbf{n}}$.

El teorema de Green es importante porque su aplicación resulta en un método sencillo para resolver la *ecuación de Poisson,*

$$\nabla^2 U = -f \tag{1.128}$$

la cual ocurre con frecuencia en problemas del campo electromagnético. En la Ec. (1.128) la función *f* es una función continua por partes de la posición. Para usar el teorema de Green en la solución de la ecuación de Poisson, se debe seleccionar V = 1/r en la Ec. (1.127). Se puede demostrar que

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0$$
 (1.129)

Debido a la Ec. (1.129), la Ec. (1.127) se reduce a

$$\int_{v} \left(-\frac{f}{r} \right) dv = \int_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dS$$
(1.130)

siempre que $r \neq 0$ en el interior de v. Aquí r es la distancia entre un punto Q de la fuente y un punto P del campo. Selecciónese v como el volumen delimitado por una pequeña esfera S_1 de radio a y una esfera grande S_2 de radio b; ambas esferas centradas en el punto del campo P (Fig. 1.41).



Figura 1.41. Ilustración de la derivación del teorema de Green.

Primero se considera a S_2 y se supone que existe una constante positiva M para la cual

$$\left| U \right| \le \frac{M}{r}, \quad \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \le \frac{M}{r^2}, \quad r \ge b$$
 (1.131)

De las condiciones dadas por la Ec. (1.131) se obtiene que

$$\left| \int_{S_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) ds \right| \leq \frac{2M}{b} \frac{1}{b^2} 4\pi b^2 \to 0$$

para $b \rightarrow \infty$, y, por tanto, hay que ocuparse de S_1 . Para S_1 se tiene:

$$\left| \int_{S_1} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} ds \right| \leq \frac{m}{a} 4\pi a^2 \to 0$$

conforme $a \to 0$. Aquí *m* es la magnitud máxima de $\partial U/\partial n$ en S_1 . Así que para $b \to \infty$, y $a \to 0$, la única parte diferente de cero de la integral de superficie en la Ec. (1.130) (observe que $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ en S_1) es

$$\int_{S_1} \left(-U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS = -U(P') \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = -U(P') 4\pi$$

donde *P*' es un punto interior seleccionado adecuadamente del volumen acotado por *S*₁. Conforme $a \rightarrow 0$, *P*' \rightarrow *P*, y se obtiene

$$U \triangleq U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{v} \frac{f}{r} dv$$
(1.132)

En la mayoría de las situaciones físicas, *f* representa la densidad de la fuente de un campo escalar y la fuente está contenida dentro de un volumen finito. Se verifica entonces fácilmente que la Ec. (1.132) satisface las condiciones de la Ec. (1.131). Sólo se necesita observar que conforme $r \rightarrow \infty$, se tiene que

$$U \cong \frac{1}{4\pi r} \int_{v} f \, dv = \frac{Q}{4\pi r}$$

donde $Q \triangleq \int_{v} f dv$ es la fuente del campo escalar. La solución dada por la Ec. (1.132) de la ecuación de Poisson jugará un papel fundamental en la solución de problemas del campo electromagnético. Se puede demostrar que la solución de la ecuación de Poisson que cumpla con las condiciones (1.131) es única.

El teorema de la unicidad expresa que existe una sola solución U de la ecuación de Poisson dentro de una región v si se especifica U o $\partial U/\partial n$ en la superficie S que delimita a v. Es posible demostrar el teorema de la unicidad suponiendo que existen dos soluciones U_1 y U_2 que cumplen con todas las condiciones y demostrando que $U_1 = U_2$. Si se hace $V = U_1 - U_2$, se deduce que

$$\nabla^2 V = 0$$
 en el interior de v (a)
 $V = 0$ o $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ en S (b) (1.133)

Usando la identidad vectorial (1.188) y la Ec. (1.133)(a), se obtiene

$$\operatorname{div} V(\operatorname{grad} V) = (\operatorname{grad} V)^2$$

Debido a las condiciones dadas por (1.133)(b), el teorema de la divergencia produce la relación

$$\int_{v} \left(\operatorname{grad} V\right)^2 dv = 0$$

Por tanto, se debe cumplir que grad V = 0 y por ello V = const = c. Sin embargo, si V = 0 en S, se concluye que c = 0. Por consiguiente, $U_1 = U_2$, y sólo hay una solución. Para que U sea única para el caso en el cual $\partial U/\partial n$ en S, solamente se tiene que especificar el valor de U en cualquier punto de S.

1.20 Coordenadas Curvilíneas Ortogonales

Una de las principales ventajas del cálculo vectorial es que las ecuaciones que definen las propiedades comunes a todos los campos electromagnéticos pueden ser formuladas sin referencia a algún sistema de coordenadas en particular. Las coordenadas cartesianas son convenientes porque se trabaja con tres familias de planos mutuamente perpendiculares x = constante, y = constante y z = constante y los vectores unitarios \hat{a}_x , \hat{a}_y y \hat{a}_z son constantes. Sin embargo, la solución de problemas del campo con frecuencia toma una forma más sencilla en un sistema de coordenadas que no sea cartesiano. Por lo tanto, interesa representar el gradiente de una función escalar y la divergencia y el rotacional de una función vectorial en un sistema general de coordenadas curvilíneas generales.

Un sistema generalizado de coordenadas consiste de tres familias de superficies cuyas ecuaciones en función de las coordenadas cartesianas son

$$u_1(x, y, z) = \text{constante}$$
 $u_2(x, y, z) = \text{constante}$ $u_3(x, y, z) = \text{constante}$

Las tres superficies definidas por las ecuaciones $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$ se denominan *superficies de coordenadas* y cada par de superficies se intersecan en una *curva de coordenadas*. Las superficies de cualquier familia u_i no tienen que ser paralelas entre sí y no tienen que ser planas. Solamente hay interés en el caso donde estas tres familias de superficies son mutuamente perpendiculares, ya que las coordenadas ortogonales son comunes en aplicaciones

físicas. La intersección de dos curvas de coordenadas identifica un punto del campo $P(u_1, u_2, u_3)$. En el punto (x, y, z) o (u_1, u_2, u_3) se asignan tres vectores unitarios \hat{a}_1 , \hat{a}_2 y \hat{a}_3 tangentes en el punto a la curva de coordenadas correspondiente. El vector del campo F puede ser expresado en término de componentes a lo largo de estos vectores unitarios. Puesto que se supuso un sistema ortogonal, los vectores unitarios son mutuamente perpendiculares en cualquier punto en el espacio. Entonces un vector V puede escribirse como

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{a}}_1 V_1 + \hat{\mathbf{a}}_2 V_2 + \hat{\mathbf{a}}_3 V_3 \tag{1.134}$$

pero el vector de posición en general es diferente.

$$\mathbf{r} \neq \hat{\mathbf{a}}_1 u_1 + \hat{\mathbf{a}}_2 u_2 + \hat{\mathbf{a}}_3 u_3$$
 (1.135)

puesto que no todas las variables de coordenadas son necesariamente distancias.

Considérese el paralelepípedo ilustrado en la Fig. 1.42, cuyas caras coinciden con las superficies u_1 o u_2 o u_3 = constante. Puesto que las coordenadas no necesitan expresar una distancia directamente (por ejemplo, los ángulos en coordenadas esféricas), los elementos diferenciales de longitud deben expresarse como $dl_1 = h_1 du_1$, $dl_2 = h_2 du_2$ y $dl_3 = h_3 du_3$, donde h_1 , h_2 y h_3 son *factores de escala* (o *coeficientes métricos*) adecuados y pueden ser funciones de u_1 , u_2 , u_3 , dependiendo de si las coordenadas son elementos de longitud. Como ejemplo, en coordenadas cilíndricas (r, ϕ , z), $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$ y $h_3 = 1$, puesto que los elementos de longitud a lo largo de las curvas de coordenadas ρ , ϕ , z son $d\rho$, $\rho d\phi$ y dz. El cuadrado de la diagonal dl del paralelepípedo puede escribirse como

$$dl^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2$$
(1.136)

y su volumen como $h_1h_2h_3du_1du_2du_3$.



Figura 1.42. Coordenadas curvilíneas ortogonales.

Como anticipación a la nueva forma de las ecuaciones que aparecen en las próximas secciones, recalcamos que el álgebra vectorial en coordenadas curvilíneas ortogonales es la misma que en coordenadas cartesianas. Específicamente, para el producto punto,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \tag{1.137}$$

donde el subíndice indica las componentes curvilíneas. Para el producto cruz,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_2 & \hat{\mathbf{a}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$
(1.138)

igual que antes.

1.11.1 El Gradiente

Sea $V(u_1, u_2, u_3)$ una función escalar. Entonces, de acuerdo con las propiedades de ∇V , éste es un vector cuya componente en cualquier dirección está dada por la derivada direccional de V en esa dirección; es decir, la componente de ∇V en la dirección en la dirección u_1 es dada por

$$\hat{\mathbf{a}}_{1} \cdot \nabla V = (\nabla V) \Big|_{1} = \frac{\partial V}{\partial l_{1}} = \frac{1}{h_{1}} \frac{\partial V}{\partial u_{1}}$$
(1.139)

y similarmente para las direcciones 2 y 3. La cantidad ds_1 es una longitud diferencial en la dirección creciente de u_1 . Repitiendo la Ec. (1.139) para u_2 y u_3 , se obtiene la expansión vectorial resultante para el gradiente como

$$\nabla V = \hat{\mathbf{a}}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} + \hat{\mathbf{a}}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} + \hat{\mathbf{a}}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3}$$
(1.140)

1.11.2 La Divergencia

Para calcular la divergencia de un vector **A**, es necesario evaluar el flujo saliente neto por unidad de volumen, en el límite, conforme el volumen tiende a cero. Con referencia al volumen diferencial de la Fig. 1.42, es posible proceder como se hizo en el caso de las coordenadas cartesianas. Sean $(\hat{a}_1A_1, \hat{a}_2A_2, \hat{a}_3A_3)$ las componentes de **A**. Entonces el flujo a través de la superficie 1 (*OABC*), tomando la normal hacia fuera, es

$$(Flujo)_{S_1} = -A_1h_2h_3du_2du_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)du_1du_2du_3$$

en tanto que el flujo a través de la superficie 2 es

$$(Flujo)_{S_2} = A_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) du_1 du_2 du_3$$

Si se suma el flujo saliente neto para los dos pares de superficies restantes, se determinará que el flujo neto será (donde los términos segundo y tercero pueden escribirse mediante permutación cíclica del primero)

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

De la definición de la divergencia se puede ahora escribir

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$
(1.141)

1.11.3 El Rotacional

La componente en la dirección 1 del rotacional se puede determinar calculando la circulación alrededor del contorno *OABC* en la Fig. 1.42 y dividiendo por el área de la superficie encerrada. Así que

$$\int_{O}^{A} A_2 dl_2 + \int_{B}^{C} A_2 dl_2 = -\frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) du_2 du_3$$

у

$$\int_{A}^{B} A_3 dl_3 + \int_{C}^{O} A_3 dl_3 = \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) du_2 du_3$$

Por la definición del rotacional, en notación vectorial el resultado anterior conduce a la relación

$$\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)\Big|_{1} = \frac{1}{h_{2}h_{3}}\left[\frac{\partial}{\partial u_{2}}\left(A_{3}h_{3}\right) - \frac{\partial}{\partial u_{3}}\left(A_{2}h_{2}\right)\right]$$
(1.142)

Mediante permutación cíclica de los subíndices 1, 2 y 3, se obtienen las componentes restantes. Por tanto,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \right] + \frac{\hat{\mathbf{a}}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3) \right] \\ + \frac{\hat{\mathbf{a}}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \right]$$
(1.143)

la cual puede escribirse en forma de determinante como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{a}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{a}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$
(1.144)

1.11.4 El Laplaciano

El laplaciano de un escalar V se define como la divergencia del gradiente del escalar y puede formarse combinando la Ec. (1.141) con la Ec. (1.142). El resultado es

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \right) \right]$$
(1.145)

Se deja como ejercicio para el lector, determinar los coeficientes métricos en los tres sistemas de coordenadas usados hasta ahora y también las expresiones para las operaciones vectoriales definidas en esos sistemas. Los coeficientes métricos son:

- Coordenadas cartesianas: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$
- Coordenadas cilíndricas: $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$
- Coordenadas esféricas: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \operatorname{sen} \theta$

Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas, las operaciones de gradiente, divergencia y rotacional están dadas por las relaciones

$$\nabla V = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$
(1.146)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(A_{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(A_{\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho A_{z} \right) \right]$$
(1.147)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} & \rho \hat{\mathbf{a}}_{\phi} & \hat{\mathbf{a}}_{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{\rho} & \rho A_{\phi} & A_{z} \end{vmatrix}$$
(1.148)

1.21 El Teorema de Helmholtz

Todos los campos vectoriales están conformados por uno o dos tipos de campos fundamentales: los *campos solenoidales* que tienen una divergencia idénticamente igual a cero y los *campos irrotacionales* cuyo rotacional es cero en todas partes. El campo vectorial más general tendrá una divergencia y un rotacional diferentes de cero. Se demostrará que este campo siempre puede considerarse como la suma de un campo solenoidal y uno irrotacional. Esta afirmación es esencialmente el contenido del teorema de Helmholtz. Otra forma de expresar el teorema es diciendo que *un campo vectorial es completamente especificado por su divergencia y su rotacional*. Antes de proceder con el caso general, primero se tratarán los dos casos mencionados. Muchas de las propiedades de un campo vectorial provienen de su característica irrotacional o solenoidal.

Caso 1. Campo Irrotacional

Un campo vectorial **F** cuyo rotacional es cero en todas partes se conoce como un *campo irrotacional* o *conservativo*. Es decir, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, pero la divergencia de **F** no puede ser cero al mismo tiempo o el campo **F** se anularía en todas partes (caso trivial). Por consiguiente, sea

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho_v \left(x, y, z \right) \tag{1.149}$$

donde ρ_v se interpreta ahora como la función que representa la fuente del campo **F**.

El gradiente de cualquier función escalar Φ tiene un rotacional igual a cero y, por tanto, la condición $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ se satisface si se toma

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi \tag{1.150}$$

puesto que $\nabla \times \nabla \Phi = 0$. El signo menos se escoge arbitrariamente de manera que estos resultados concuerden directamente con el trabajo que se emprenderá posteriormente; un signo positivo también sería una selección correcta. Sustituyendo en la Ec. (1.149), se obtiene que

$$-\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla^2 \Phi = -\rho_v \tag{1.151}$$

Así que la función escalar Φ , la cual se conoce como el *potencial escalar*, es una solución de (1.151), una ecuación diferencial conocida como la *ecuación de Poisson*. Una vez que se ha encontrado una solución para Φ , se puede obtener el campo vectorial **F** a partir de la Ec. (1.150).

Caso 2. Campos Solenoidales

Un campo vectorial para el cual $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ se conoce como un *campo solenoidal*. En un campo de este tipo *todas las líneas de flujo son continuas y se cierran sobre sí mismas*. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, no podemos tener un rotacional que se anule o de nuevo el campo \mathbf{F} se anularía. Sea entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(x, y, z) \tag{1.152}$$

La función vectorial J es la fuente de la circulación del campo F. Debe ser una función fuente vectorial puesto que $\nabla \times \mathbf{F}$ es un vector.

Una identidad matemática que ya se estableció anteriormente es $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, donde \mathbf{A} es cualquier función vectorial. Así que $\nabla \times \mathbf{A}$ es un campo solenoidal y por lo tanto podemos tomar

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.153}$$

El vector **A** se conoce como el *potencial vectorial* ya que juega un papel similar al del potencial escalar Φ . Si se substituye la Ec. (1.153) en la Ec. (1.152), se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$$
(1.154)

luego de expandir la operación rotacional-rotacional. Si se pudiese tomar $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, la Ec. (1.154) se simplificaría a

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \tag{1.155}$$

y **A** sería una solución de la ecuación de Poisson vectorial, es decir, cada componente de **A** sería una solución de la ecuación de Poisson escalar. Por ejemplo, solución de la ecuación

$$\nabla^2 A_x = -J_x$$

Con base en el teorema de Helmholtz, todavía se tiene la divergencia de **A** a nuestra disposición, ya que hasta ahora sólo se ha especificado su rotacional. Por consiguiente, siempre es posible seleccionar **A** de forma que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Esto también puede demostrarse de la siguiente forma. En vez del potencial **A** se pudo también usar un potencial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

donde Ψ es una función escalar arbitraria. Esto no cambiará el valor de F obtenido de la Ec. (1.153) puesto que

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Psi = \nabla \times \mathbf{A}$$

Si **A** no tiene una divergencia igual a cero, entonces se usa el potencial **A**' y se selecciona Ψ de forma que $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, es decir, tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Psi = 0$. Puesto que siempre se puede encontrar una función Ψ que satisfaga esta ecuación (de Poisson), en todos los casos también se puede obtener una función **A**' con divergencia igual a cero y con rotacional igual a **F**.

Caso 3. Campo Vectorial General

El teorema de Helmholtz establece que el campo vectorial más general tendrá una divergencia y un rotacional diferentes de cero y, además, que puede deducirse a partir del negativo del gradiente de un potencial escalar Φ y del rotacional de un potencial vectorial **A**. En vista del análisis anterior, esta aseveración es bastante obvia, puesto que un campo general sería simplemente una superposición de los dos tipos de campos discutidos por separado. Sin embargo, es instructivo examinar la expresión matemática del teorema de Helmholtz. En la próxima sección se dará una demostración del teorema.

Considere un volumen v delimitado por una superficie cerrada S, como en la Fig. 1.44. Una identidad matemática (demostrada posteriormente) dice que el campo vectorial **F** en el punto (x, y, z) está dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\nabla \left[\int_{v'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(x',y',z)}{4\pi R} dv' - \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(x',y',z') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi R} dS' \right] + \nabla \times \left[\int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(x',y',z')}{4\pi R} dv' + \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(x',y',z')}{4\pi R} dS' \right]$$
(1.156)

donde $\nabla' = \hat{\mathbf{a}}_x (\partial/\partial x') + \hat{\mathbf{a}}_y (\partial/\partial y') + \hat{\mathbf{a}}_z (\partial/\partial z')$ opera sobre las coordenadas de la fuente, la integración es sobre las coordenadas de la fuente (x', y', z') y $\hat{\mathbf{n}}$ es una normal unitaria dirigida saliendo del volumen *v*. Ésta es la expresión matemática del teorema de Helmholtz.

Figura 1.44

El término $\nabla' \cdot \mathbf{F}(x', y', z')$ da la función fuente $\rho_v(x', y', z')$, mientras que el término $\nabla' \times \mathbf{F}(x', y', z')$ determina la función fuente (o circulación) $\mathbf{J}(x', y', z')$. Las integrales de superficie representan integración sobre las fuentes de superficie en *S*. Si *S* se desplaza hasta el infinito, el campo **F** generalmente se anulará allá y, por tanto, las fuentes superficiales también. Sin embargo, si *v* es finito, en general aparecerán fuentes en la superficie *S*.

El significado físico de las fuentes superficiales puede entenderse en la forma siguiente: Considérese la situación donde las líneas de flujo de **F** se extienden hacia el volumen *v* desde el exterior de la superficie *S*, como en la Fig. 1.45*a*. Si se cortan estas líneas de flujo en la superficie *S*, entonces el campo en el interior de *v* puede mantenerse en su valor original solamente si se coloca una fuente equivalente en la superficie *S* que produzca el mismo flujo hacia el volumen *v* que era producido por las fuentes originales externas a *v*. Esta situación se ilustra en la Fig. 1.45*b*. La intensidad de la fuente superficial debe ser igual al flujo original por unidad de área a través de *S* y por tanto igual a $-\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. El signo menos surge ya que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es una medida del flujo saliente, mientras que la intensidad de la fuente debe ser igual al flujo entrante. La otra fuente de superficie $\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}$ surge por razones similares y es la fuente equivalente de la circulación del campo \mathbf{F} en el volumen *v*.





Ahora se hace $-\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma$ y $\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}$, donde σ y **K** son las fuentes de superficie equivalentes. Los potenciales escalar y vectorial se definen ahora como

$$\Phi(x,y,z) = \int_{v'} \left[\frac{\rho_v(x',y',z')}{4\pi R} \right] dv' + \oint_{S'} \left[\frac{\sigma(x',y',z')}{4\pi R} \right] dS'$$
(1.157)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \int_{v'} \left[\frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{4\pi R} \right] dv' + \oint_{S'} \left[\frac{\mathbf{K}(x', y', z')}{4\pi R} \right] dS'$$
(1.158)

Así que en lugar de la Ec. (1.156), se tiene que

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\nabla\Phi(x,y,z) + \nabla \times \mathbf{A}(x,y,z)$$
(1.159)

y ésta es la expresión matemática de la segunda parte del teorema de Helmholtz.

En resumen, se puede entonces decir lo siguiente:

- 1. Si el rotacional de **F** *es idénticamente igual a cero*, entonces **F** es un campo *irrotacional* y se puede obtener a partir del gradiente de una función potencial escalar.
- 2. Si la divergencia de F *es idénticamente igual a cero,* entonces F es un campo *solenoidal* y puede deducirse a partir del rotacional de una función potencial vectorial.
- **3.** Un campo vectorial general puede deducirse a partir del gradiente negativo de un potencial escalar y del rotacional de un potencial vectorial.
- 4. Los potenciales de volumen y de superficie están determinados por las funciones fuentes ρ_v , J, σ y K.

1.22 Integración de la Ecuación de Poisson

Regresemos ahora a una consideración de las integrales en la Ec. (1.130) para demostrar que los potenciales son, en efecto, soluciones de la ecuación de Poisson. Del análisis sobre las fuentes puntuales al comienzo de esta sección, se obtuvo el resultado que para una fuente puntual Q

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi R}$$

y ahora, en vez de una fuente puntual Q, se tiene una distribución de fuentes puntuales con una densidad de volumen $\rho_v(x', y', z')$; de la propiedad de superposición se deduce que el potencial está dado por

$$\Phi(x,y,z) = \int_{v'} \frac{\rho_v(x',y',z')}{4\pi R} dv'$$
(1.160)

Como consecuencia, de las Ecs. (1.125) y (1.151), el potencial Φ definido por la Ec. (1.160) satisface la ecuación de Poisson. Aunque esta demostración es probablemente satisfactoria desde un punto de vista intuitivo, es importante demostrar matemáticamente que Φ como lo da la Ec. (1.160) es, en efecto, una solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = -\rho_v(x, y, z) \tag{1.161}$$

Los detalles matemáticos involucrados son por sí mismos de gran importancia.

El laplaciano de la Ec. (1.160) es

$$\nabla^2 \Phi(x,y,z) = \int_{v'} \frac{\rho_v(x',y',z')}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

El operador ∇^2 se puede colocar dentro de la integral porque él no afecta las variables x, y, z ya que la integración es con respecto a las variables (x', y', z'). A continuación, obsérvese que $\nabla^2(1/R)$ es igual a cero en todos los puntos, excepto en el punto singular R = 0. Así que la integral de volumen es cero excepto, posiblemente, por una contribución proveniente del punto singular R = 0. Conforme x', y', z' tienden a x, y, z, entonces R tiende a cero. El procedimiento es envolver el punto singular x, y, z con una pequeña esfera de radio δ , superficie S_0 y volumen V_0 , como en la Fig. 1.46. Puesto que $\rho_v(x', y', z')$ es una función continua, se puede

seleccionar el radio δ tan pequeño como se quiera para que en todos los valores de x', y', z', en el interior de la esfera, ρ_v sea esencialmente igual a su valor $\rho_v(x', y', z')$ en el punto singular.



Figura 1.46

Ahora la integral se convierte en

$$\int_{v'} \frac{\rho_v(x',y',z')}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dv' = \frac{\rho_v(x,y,z)}{4\pi} \int_{V_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

Denote por ∇' el operador nabla, ya definido anteriormente, en coordenadas cartesianas, como

$$\nabla' \triangleq \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

tal que ∇' opera solamente sobre las coordenadas con tildes. En la misma forma,

$$\nabla^{\prime 2} \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x^{\prime 2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{\prime 2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{\prime 2}}$$

Puesto que $R = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$, entonces mediante una expansión directa se puede confirmar que $\nabla(1/R) = -\nabla'(1/R)$, y $\nabla^2(1/R) = \nabla'^2(1/R)$. Usando esta última identidad y el teorema de la divergencia en la integral de volumen anterior, se obtiene

$$\frac{\rho_v}{4\pi} \int_{V_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dv' = \frac{\rho_v}{4\pi} \oint_{S_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d\mathbf{S}'$$

Ahora bien, $\nabla'(1/R) = -\hat{\mathbf{a}}'_R/R^2$ y $d\mathbf{S}' = \hat{\mathbf{a}}'_R R^2 d\Omega$, donde $\hat{\mathbf{a}}'_R$ es un vector unitario dirigido hacia fuera desde el punto (x, y, z) y $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido^{*}. La sustitución de estas relaciones muestra finalmente que

$$\nabla^2 \Phi(x,y,z) = -\frac{\rho_v(x,y,z)}{4\pi} \oint_{S_0} d\Omega = -\rho_v(x,y,z)$$

y por tanto se verifica que Φ , como lo da la Ec. (1.160), es una solución de la ecuación de Poisson.

^{*} Ver la Sección 1.21

Para el vector potencial **A**, cada componente es una solución de la ecuación de Poisson escalar; así que mediante una adición vectorial se concluye que la solución de $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$ está dada por

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \int_{v'} \frac{\mathbf{J}(x',y',z')}{4\pi R} dv'$$

Para fuentes superficiales, las soluciones son las mismas, con la excepción que la integración ahora es sobre una superficie en vez de en un volumen.

1.22.1 Demostración del Teorema de Helmholtz*

En vista de las propiedades de la función $\nabla^2(1/R)$, es claro que la función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ puede representarse como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi} \nabla^{2} \left(\frac{1}{R}\right) dv'$$
$$= -\nabla^{2} \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv'$$

Usando ahora la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \nabla \times \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' - \nabla \nabla \cdot \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv'$$
(1.162)

Considere primero el término de la divergencia. Se tiene que

$$\nabla \cdot \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{v} \mathbf{F}(x', y', z) \cdot \nabla \left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

puesto que abla no opera sobre las variables con tilde. A continuación observe que

$$\mathbf{F}(x', y', z') \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\mathbf{F}(x', y', z') \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$= -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{R} + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(x', y', z')}{R}$$

Por tanto,

$$\nabla \cdot \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' = -\int_{v} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' + \int_{v} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv'$$

$$= -\oint_{S} \frac{\mathbf{F}(x', y', z') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{4\pi R} dS' + \int_{v} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' = \Phi$$
(1.163)

que es la forma deseada para el potencial escalar Φ .

Regresando ahora al término del rotacional en la Ec. (1.162), se observa que

^{*} Demostración tomada de *Principles and Applications of Electromagnetic Fields* por R. Plonsey y R. E. Collin, McGraw-Hill, 1961.
José R. Morón

$$\nabla \times \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_{v} \mathbf{F}(x', y', z') \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_{v} \mathbf{F}(x', y', z') \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dv'$$

A continuación se usa la relación

$$\nabla' \times \frac{\mathbf{F}(x', y', z)}{R} = -\mathbf{F}(x', y', z') \times \nabla' \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(x', y', z)}{R}$$

para obtener

$$\nabla \times \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z)}{4\pi R} dv' = \int_{v} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(x', y', z)}{4\pi R} dv' - \frac{1}{4\pi} \int_{v} \nabla' \times \frac{\mathbf{F}(x', y', z)}{4\pi R} dv'$$
(1.164)

La primera integral en el lado derecho es el término deseado. El paso que falta es determinar que

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{v}\nabla\times\frac{\mathbf{F}(x',y',z')}{R}dv' = \oint_{S}\frac{\mathbf{F}(x',y',z')\times\hat{\mathbf{n}}}{4\pi R}dS'$$
(1.165)

Para demostrar este resultado, sea **C** un vector constante y aplique el teorema de la divergencia a la cantidad $\nabla' \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{F}/R$ para obtener

$$\int_{v} \nabla' \cdot \mathbf{C} \times \frac{\mathbf{F}}{R} dv' = -\int_{v} \mathbf{C} \cdot \nabla' \times \frac{\mathbf{F}}{R} dv'$$

$$= \oint_{S} \mathbf{C} \times \frac{\mathbf{F}}{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS'$$
(1.166)

En la integral de superficie, se tiene

$$\mathbf{C} \times \frac{\mathbf{F}}{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}}{R}$$

y la Ec. (1.166) se convierte en

$$-\mathbf{C} \cdot \int_{v} \nabla' \times \frac{\mathbf{F}}{R} dv' = \mathbf{C} \cdot \oint_{S} \frac{\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}}{R} dS'$$

Como C es un vector arbitrario, la dos integrales son iguales y así se comprueba la relación (1.165). De manera que se tiene entonces que

$$\nabla \times \int_{v} \frac{\mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' = \int_{v} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(x', y', z')}{4\pi R} dv' + \oint_{S} \frac{\mathbf{F}(x', y', z') \times \hat{\mathbf{n}}}{4\pi R} dS' = \mathbf{A}$$
(1.167)

Y entonces se deduce que

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.168}$$

cuando se usan las Ecs. (1.163) y (1.167) en la Ec. (1.162). Esto completa la demostración del teorema de Helmholtz.

1.23 Ángulos Sólidos

Esta sección se ocupa de los ángulos sólidos subtendidos por *superficies* y ya mencionados en la sección anterior. Los ángulos sólidos subtendidos por *contornos* juegan un papel importante en la teoría de los campos electromagnéticos producidos por corrientes estacionarias. La unidad para medir los ángulos sólidos es el *esterradián*.

El área de la pequeña superficie orientada S_0 en la Fig. 1.47 es da; el punto Q está en S_0 a una distancia r de P; los vectores en Q muestran las direcciones respectivas de la normal positiva a S_0 y la línea recta PQ; el ángulo entre estos vectores es γ_n . Si este ángulo es agudo, como en la figura, se dice que P "ve" la parte trasera de S_0 . La figura también muestra la proyección de S_0 sobre una esfera imaginaria de radio r_0 centrada en P. El área de la proyección se denota por da^* y se toma como *positiva* si P "ve" la *parte trasera* de S_0 . El ángulo sólido subtendido por S_0 en P, denotado por $d\Omega$, se define mediante la ecuación

$$d\Omega = \frac{da^*}{r_0^2} \tag{1.169}$$

Como se observa en la Fig. 1.47, da^* es proporcional a r_0^2 ; por tanto, la selección de r_0 no afecta el valor de $d\Omega$ y puede hacerse arbitrariamente.

El ángulo sólido Ω subtendido en *P* por una superficie orientada *S* de cualquier tamaño y forma es la suma de los ángulos sólidos subtendidos en *P* por las pequeñas porciones "diferenciales" planas en las cuales se subdividió a *S*. Es decir,

$$\Omega = \int_{S} \frac{da^*}{r_0^2} \tag{1.170}$$

o, puesto que r_0 es una constante,

$$\Omega = \frac{1}{r_0^2} \int_S da^*$$
 (1.171)

Aquí la integral de superficie es la suma, tomando en consideración los signos, de las proyecciones (sobre la esfera de radio r_0) de las porciones diferenciales de *S*. Esta suma se denota por a^* y la Ec. (1.169) se escribe como





Figura 1.47. (a) Una superficie S₀ proyectada sobre una esfera; (b) definición del ángulo sólido.

Ejemplo 13. Supóngase que un punto *P* está tan distante de una superficie plana *S* que cualquier dimensión lineal de *S* es despreciable en comparación con la distancia desde *P* hasta cualquier punto en *S*. Sea r_0 el radio de la superficie esférica imaginaria centrada en *P* tan grande que, excepto por correcciones de orden mayor, la parte

de esta superficie que está cerca de *S* puede tomarse como plana. En particular, considere la Fig. 1.48, donde la superficie *S* (de área *a*) plana y de forma acorazonada está en el plano *xy* alrededor del origen y con orientación hacia arriba.

Ahora se toma r_0 igual a la coordenada radial r_0 de P. De aquí puede ser obvio que, si P está lo suficientemente lejos de S, el área a^* de la proyección sombreada en la figura será $-a\cos\theta$. Por tanto, aparte de correcciones de orden mayor, el ángulo sólido subtendido por S en P es





1.24 Resumen de las Definiciones Generales para el Gradiente, la Divergencia y el Rotacional

Por conveniencia, ahora se resumen los resultados de las cuatro últimas secciones.

El gradiente de una función escalar *U* se define como

$$\operatorname{grad} U \triangleq \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} U \, dS \tag{1.173}$$

La divergencia de una función vectorial **B** se define por

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} \, dS \tag{1.174}$$

El rotacional de una función vectorial B está definido por

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} \, dS \tag{1.175}$$

La componente de rot **B** en la dirección de una normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ a la superficie está definida por

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \triangleq \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$
(1.176)

Las ecuaciones anteriores con frecuencia se abrevian mediante el uso del operador ∇ . Usando el operador, las ecuaciones se escriben en la forma

$$\nabla U \triangleq \operatorname{grad} U, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} \triangleq \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$$
 (1.177)

De las Ecs. (1.173), (1.174) y (1.175) se concluye que el operador nabla está definido por

$$\nabla \left[\right] \triangleq \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \left[\right] dS \tag{1.178}$$

Las operaciones grad U, div **B** y rot **B** se obtienen insertando U, **B** y × **B** entre los corchetes de la Ec. (1.178).

1.25 Identidades Vectoriales

En los capítulos posteriores se utilizarán varias identidades vectoriales que involucran el operador nabla. Para concluir este capítulo se dará la demostración de algunas de estas identidades. Cuando se está estableciendo una identidad vectorial es posible proceder de dos maneras. Se puede expresar al operador ∇ en un sistema cartesiano de coordenadas y proceder directamente, o se pueden usar las definiciones generales dadas por las Ecs. (1.71), (1.73) y (1.102).

Como un ejemplo, considérese la identidad vectorial que expresa que *la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es idénticamente igual a cero*:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E}=0\tag{1.179}$$

En función del operador nabla, el lado izquierdo de la Ec. (1.179) es

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{E} \tag{1.180}$$

donde se ha considerado a ∇ como un vector y se ha usado la fórmula para el producto escalar triple. Estrictamente hablando, no es posible igualar $\nabla \times \nabla$ a cero ya que ∇ no es un vector. Sin embargo, el resultado obtenido por esta operación es correcto. Para demostrar este resultado rigurosamente, se pudo expresar la Ec. (1.180) en coordenadas cartesianas. No obstante, el resultado se obtiene más convenientemente usando el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes; entonces

$$\int_{v} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} \, dv = \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \, dS = \oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Puesto que *S* es una superficie cerrada, el contorno *C* que delimita a *S* puede tomarse como cualquier punto de *S*. Así que la integral de línea es cero. Como la integral de volumen es cero para un volumen arbitrario v, se concluye que el integrando debe ser cero. Esto demuestra la Ec. (1.179).

Si **A** es una constante y *f* una variable, entonces se tiene que

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{div} f \tag{1.181}$$

En coordenadas cartesianas, se puede demostrar esta igualdad mediante las siguientes operaciones:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (f \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = \mathbf{A} \nabla f$$

Para establecer la Ec. (1.181) sin hacer referencia a un sistema de coordenadas específico, se pueden usar el teorema de la divergencia y la Ec. (1.76). Por consiguiente,

$$\int_{v} \operatorname{div}(f\mathbf{A}) dv = \mathbf{A} \cdot \int_{S} f \,\hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{v} \mathbf{A} \cdot \operatorname{div} f \, dv$$

Puesto que el volumen v es arbitrario, los integrandos de las integrales de volumen deben ser iguales.

La identidad vectorial

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}$$
(1.182)

donde F es un vector constante, puede demostrarse en una forma similar. En coordenadas cartesianas se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{F}) = \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{A} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} = \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

Una demostración alterna de la Ec. (1.78) que emplea el teorema de la divergencia y la Ec. (1.90), es la siguiente:

$$\int_{v} \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{F}) dv = \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{F}) dS = \mathbf{F} \cdot \int_{S} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} dS = \int_{v} \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dv$$

Como v es arbitrario, los integrandos de las integrales de volumen deben ser iguales, estableciendo así la Ec. (1.182).

Una identidad vectorial de uso frecuente en la teoría del campo electromagnético es

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$
(1.183)

En coordenadas cartesianas, la demostración de la Ec. (1.183) utiliza el producto escalar triple y procede en la forma siguiente:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_{u} \left[\mathbf{B} \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{u} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} \right) - \mathbf{A} \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{u} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} \right) \right]$$

= $\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$

Para establecer la Ec. (1.183) sin hacer referencia a un sistema específico de coordenadas, se toman dos puntos vecinos P y P_0 y se hace

$$\mathbf{B} \triangleq \mathbf{B}(P), \qquad \mathbf{B}_0 \triangleq \mathbf{B}(P_0) \\ \mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}(P), \qquad \mathbf{A}_0 \triangleq \mathbf{A}(P_0) \end{cases}$$

El punto P_0 se considera fijo, tal que A_0 y B_0 son vectores constantes. Considérese ahora el vector

$$\mathbf{F} \triangleq (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{B} \times \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$$

Tomando la divergencia de F y usando la Ec. (1.182) y el hecho de que

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0) = 0$$

produce

Ahora se toma $|P - P_0| = \varepsilon$, donde ε es una cantidad positiva arbitrariamente pequeña, y se elige una esfera de radio ε centrada en P_0 . Las magnitudes de los vectores $\mathbf{A} - \mathbf{A}_0$ y $\mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ son ambas del orden de ε . Así que existe un número positivo M para el cual

$$|\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}| \leq M \varepsilon^2$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria a la esfera. De la Ec. (1.73) se obtiene que

$$\left|\operatorname{div}\mathbf{F}\right| \leq \frac{M\varepsilon^2 \left(4\pi\varepsilon^2\right)}{4\pi\varepsilon^3/3} = 3M\varepsilon$$

y, en el límite, conforme $\varepsilon \to 0$, la div $\mathbf{F} \to 0$, y se obtiene la Ec. (1.183) evaluada en P_0 .

La identidad

$$\operatorname{div}(U\mathbf{A}) = U\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} U \tag{1.184}$$

puede establecerse en una forma similar. En coordenadas cartesianas se tiene que

$$\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = \sum_{u} \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (U\mathbf{A}) = \sum_{u} \left[U \hat{\mathbf{a}}_{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{u} \frac{\partial U}{\partial u} \right]$$
$$= U \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla U$$

Para establecer la Ec. (1.184) sin hacer referencia a un sistema de coordenadas específico, se toma

$$U \triangleq U(P), \qquad U_0 \triangleq U(P_0)$$
$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}(P), \qquad \mathbf{A}_0 \triangleq \mathbf{A}(P_0)$$

Si se considera al punto P_0 como fijo, de forma que U_0 y A_0 son constantes, se toma la divergencia del vector

$$\mathbf{F} \triangleq (U - U_0) (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) = U\mathbf{A} - U\mathbf{A}_0 - U_0\mathbf{A} + U_0\mathbf{A}_0$$

y ahora se usa la Ec. (1.181) y se obtiene

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} (U\mathbf{A}) - \mathbf{A}_0 \operatorname{grad} U - U_0 \operatorname{div} \mathbf{A}$$

Ahora se hace que $P \rightarrow P_0$, de modo que div $\mathbf{F} \rightarrow 0$. Entonces, en el límite, se obtiene la Ec. (1.184) evaluada en P_0 .

En el caso especial cuando $\mathbf{A} = \operatorname{grad} V$, la Ec. (1.184) toma la forma

$$\nabla \bullet (\nabla V) = \nabla U \bullet \nabla V + U \nabla \bullet \nabla V$$

El operador "divgrad" aparece frecuentemente; cuando se aplica a un escalar se escribe como ∇^2 y se denomina el *operador laplaciano*. En coordenadas cartesianas el operador laplaciano es

$$\nabla^2 \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A continuación se resumen las identidades vectoriales que se utilizan frecuentemente en el desarrollo de la teoría del campo electromagnético:

div rot
$$\mathbf{E} = 0$$

 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$
(1.185)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$
(1.186)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{A}) = U \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} U$$

$$\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = U \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla U$$
(1.187)

$$\operatorname{div}(U\operatorname{grad} V) = \operatorname{grad} U\operatorname{grad} V + U\operatorname{div}\operatorname{grad} V$$

$$\nabla \cdot (U\nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U\nabla^2 V$$
(1.188)

Estas identidades vectoriales no tienen que ser memorizadas. Conforme surja la necesidad, ellas pueden obtenerse rápidamente considerando a ∇ como un vector y usando su representación en coordenadas cartesianas.

PROBLEMAS

1.1. Dado que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{7} \left(2 \,\hat{\mathbf{a}}_x + 3 \,\hat{\mathbf{a}}_y + 6 \,\hat{\mathbf{a}}_z \right), \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{7} \left(\hat{\mathbf{a}}_x - 6 \,\hat{\mathbf{a}}_y + 2 \,\hat{\mathbf{a}}_z \right), \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{7} \left(6 \,\hat{\mathbf{a}}_x + 2 \,\hat{\mathbf{a}}_y - 3 \,\hat{\mathbf{a}}_z \right)$$

Demuestre que éstos son vectores unitarios ortogonales que forman un sistema de mano derecha.

- **1.2.** Dados dos puntos $P_1 = (3, 1, 3)$ y $P_2 = (1, 3, 2)$, dibuje los vectores $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ y $\mathbf{D} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Escriba las expresiones matemáticas para los vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 y \mathbf{D} .
- **1.3.** Un vector **A** se dibuja desde el punto (0, -1, 3) hasta el punto (5, 1, -2). Halle un vector unitario en la dirección de **A**.
- **1.4.** Halle la constante *a* de modo que los vectores $2\hat{\mathbf{a}}_x \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$, $\hat{\mathbf{a}}_x + 2\hat{\mathbf{a}}_y 3\hat{\mathbf{a}}_z$ y $3\hat{\mathbf{a}}_x + a\hat{\mathbf{a}}_y + 5\hat{\mathbf{a}}_z$ sean coplanares.
- 1.5. Dado que

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x \cos \alpha + \hat{\mathbf{a}}_y \sin \alpha$$
$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_x \cos \beta - \hat{\mathbf{a}}_y \sin \beta$$

use el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ para demostrar que

$$sen(\alpha + \beta) = sen \alpha cos \beta + cos \alpha sen \beta$$

- **1.6.** Se tienen dos campos vectoriales representados por $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x A_x + \hat{\mathbf{a}}_y A_y + \hat{\mathbf{a}}_z A_z$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_x B_x + \hat{\mathbf{a}}_y B_y + \hat{\mathbf{a}}_z B_z$, donde todas las componentes pueden ser funciones de las coordenadas espaciales. Si estos dos campos son paralelos entre sí en todas partes, ¿cuáles deben ser las relaciones entre sus componentes?
- **1.7.** Demuestre que, si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \neq \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, donde \mathbf{A} no es un vector nulo, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
- **1.8.** Un vector desconocido puede ser determinado si se dan su producto escalar y su producto vectorial con un vector conocido. Suponiendo que **A** es un vector conocido, determine el vector desconocido **X** si se dan p y **B**, donde $p = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{X}$.
- **1.9.** Sea C = A B; usando métodos vectoriales deduzca la ley de cosenos

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre **A** y **B**.

- 1.10. Demuestre que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.
- **1.11.** Demuestre que la línea que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.
- 1.12. Demuestre que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- **1.13.** Dado que *S* es una superficie cerrada, demuestre que

José R. Morón

$$\int_{S} \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

Sugerencia: Use un sistema de coordenadas cartesianas y proyecte $\hat{\mathbf{n}} dS$ sobre planos coordenados.

- **1.14.** El ritmo de cambio de una función escalar *U* en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ viene dada por $\partial U/\partial n = \operatorname{grad} U \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Use esta fórmula para hallar $\partial U/\partial z$, donde U = 1/r y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Exprese el resultado en coordenadas esféricas.
- **1.15.** Un cilindro tiene elementos que son paralelos al eje *z*; su área seccional transversal en el plano *xy* es *S*. Aplique el teorema de la divergencia a una longitud unitaria del cilindro y demuestre que

$$\int_{S} \operatorname{div} \mathbf{D} \, dv = \oint_{C} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dr$$

Aquí $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{a}}_x D_x + \hat{\mathbf{a}}_y D_y$, *C* es el contorno en el plano *xy* que delimita *S*, $\hat{\mathbf{n}}$ es normal unitaria saliente de *C* y *dr* es un elemento de línea de *C*.

1.16. Use el resultado del Problema 1.15 y tomando $D_x = x$, $D_y = y$, demuestre que el área acotada por un contorno *C* en el plano *xy* está dada por

$$\frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$$

- 1.17. Demuestre las relaciones siguientes:
 - (a) $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ (b) $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ (c) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

donde
$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{a}}_x x + \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z z \neq \mathbf{0}$$
.

- **1.18.** Dada una función vectorial $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_x xy + \hat{\mathbf{a}}_y (3x y^2)$, evalúe la integral $\int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ desde $P_1(5, 6)$ hasta $P_2(3, 3)$ en la Fig. P1.18.
 - a) a lo largo de la trayectoria dirigida P_1P_2 ,
 - b) a lo largo de la trayectoria P_1AP_2 .



1.19. Dada una función vectorial $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_x y + \hat{\mathbf{a}}_y x$, evalúe la integral $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ desde $P_1(2, 1, 1)$ hasta $P_2(8, 2, 1)$

a) a lo largo de la parábola $x = 2y^2$,

- b) a lo largo de la línea recta que une los dos puntos.
- ¿Es este campo E un campo conservativo?
- 1.20. Dada una función escalar

$$V = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}y\right)e^{-z}$$

determinar

- a) la magnitud y la dirección de la máxima tasa de crecimiento de V en el punto P(1, 2, 3),
- b) el ritmo de crecimiento de V en P en la dirección del origen.
- 1.21. Una fuerza es descrita por

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{y}{x^2 + y^2} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{x}{x^2 + y^2}$$

- (a) Exprese F en coordenadas cilíndricas.
- (b) Calcule el rotacional de **F** y
- (c) Calcule el trabajo realizado por F al recorrer el círculo unitario una vez en dirección antihoraria.
- **1.22.** Un campo vectorial es dado por $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_x + 2\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z$. Evalúe $\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ en un área plana rectangular acotada por las líneas que unen los puntos (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 1) y (2, 2, 2).
- **1.23.** Un prisma como el mostrado tiene sus esquinas en (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (0, 0, 3) y (2, 0, 3). Evalúe el vector de área de cada lado y demuestre que el vector total de área es cero.



Figura P1.23

- **1.24.** Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\hat{\mathbf{a}}_x + y^2\hat{\mathbf{a}}_y$, calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, donde *C* el la trayectoria cerrada en el plano *xy* que comienza en el punto $(\sqrt{3}, 0, 0)$, sigue por la línea y = 0 hasta el punto (2, 0, 0), después continúa a lo largo del arco circular $x^2 + y^2 = 4$ hasta el punto $(\sqrt{3}, 1, 0)$ y entonces a lo largo de la línea $x = \sqrt{3}$ hasta el punto de partida.
- **1.25.** La ecuación para un campo es $\mathbf{B} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z$. Evalúe $\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ en un área circular de radio 2, que está centrada en el eje *z* y es paralela al plano *xy* en *z* = 5.
- **1.26.** Demuestre que $\frac{1}{3} \oint_{S} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = V$, donde **R** es el vector radial y *V* es el volumen de la región encerrada por la superficie *S*.

- **1.27.** Para la función vectorial $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r r^2 + \hat{\mathbf{a}}_z 2z$, verifique el teorema de la divergencia para la región cilíndrica circular encerrada por r = 5, z = 0 y z = 4.
- **1.28.** Verifique el teorema de la divergencia calculando la integral de volumen y la integral de superficie para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\hat{\mathbf{a}}_x + x\hat{\mathbf{a}}_y + (z-x)\hat{\mathbf{a}}_z$ y el volumen del cubo unitario $0 \le x, y, z \le 1$.
- 1.29. Evalúe la siguiente integral usando el teorema de la divergencia

$$\oint_{S} \left(x \, dy \, dz + 2y \, dx \, dz + y^{2} dx \, dy \right)$$

donde *S* es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1.30. (a) Demuestre que $\mathbf{F} = (2xy+3)\hat{\mathbf{a}}_x + (x^2 - 4z)\hat{\mathbf{a}}_y - 4y\hat{\mathbf{a}}_z$ es un campo conservativo. (b) Halle una función escalar Φ tal que $\nabla \Phi = -\mathbf{F}$. (c) Evalúe la integral

$$\int_{(3,-1,2)}^{(2,1,-1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- **1.31.** Verifique el teorema de Stokes evaluando tanto la integral de línea como la de superficie para el campo vectorial $\mathbf{A} = (2x y)\hat{\mathbf{a}}_x y^2\hat{\mathbf{a}}_y + y^2z\hat{\mathbf{a}}_z$ y la superficie *S* dada por el disco z = 0, $x^2 + y^2 \le 1$.
- **1.32.** Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \hat{\mathbf{a}}_r + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$, donde la superficie es el octante de una esfera dada por r = 2, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le \pi/2$.
- **1.33.** Dada la función vectorial $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \operatorname{sen}(\phi/2)$, verifique el teorema de Stokes para la superficie hemisférica y su contorno circular mostrados en la Fig. P1.33.



- Figura P1.33
- 1.34. Verifique el teorema de Stokes para el campo del Ejemplo 12 usando coordenadas esféricas.
- **1.35.** Calcule la circulación del vector $\mathbf{F} = y^2 \hat{\mathbf{a}}_x + xy \hat{\mathbf{a}}_y + z^2 \hat{\mathbf{a}}_z$ alrededor de un triángulo con vértices en el origen, (2, 2, 0) y (0, 2, 0) mediante (a) integración directa y (b) usando el teorema de Stokes.
- **1.36.** Dada una función vectorial $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}}_x (x + c_1 z) + \hat{\mathbf{a}}_y (c_2 x 3z) + \hat{\mathbf{a}}_z (x + c_3 y + c_4 z)$.
 - a) Determine las constantes c_1 , c_2 y c_3 si **F** es irrotacional.
 - b) Determine la constante c_4 si **F** también es solenoidal.
 - c) Determine la función potencial escalar V cuyo gradiente negativo es igual a F.

CAPÍTULO 2

Campos Eléctricos Estáticos

2.1 Introducción

En la construcción de una teoría deductiva para el estudio de un tópico científico están involucrados tres pasos esenciales:

- La definición de cantidades básicas
- El desarrollo de reglas de operación, y
- La postulación de relaciones fundamentales.

En el Capitulo 1 se estudiaron en detalle los fundamentos del álgebra y el cálculo vectorial, los cuales proporcionan las herramientas esenciales para el estudio de la teoría electromagnética, y se definieron las cantidades que son fuentes y campos para el modelo electromagnético. Ahora se introducirán los postulados fundamentales para las relaciones entre las fuentes y sus campos en electrostática. La materia primordial de la electricidad es la carga eléctrica. Ella es la esencia de los fenómenos eléctricos. Tan básica es, que no es sencillo describirla excepto en el contexto de los efectos que se atribuyen a su existencia. Estos efectos sólo se manifiestan como fuerzas de interacción. Los campos eléctricos y las cargas son constantes en el tiempo, aunque pueden variar en el espacio.

2.2 Ley de Coulomb

En electrostática, las cargas eléctricas (fuentes) están en reposo y todas las cantidades relacionadas con ellas no cambian en el tiempo. Como no hay cargas en movimiento o que varíen en el tiempo, tampoco hay campos magnéticos asociados; en consecuencia, sólo se estudiará una situación relativamente sencilla del electromagnetismo: los *campos eléctricos estáticos*. Aunque la electrostática es una parte relativamente sencilla en el esquema global del electromagnetismo, su dominio es esencial para la comprensión de modelos electromagnéticos más complicados. Adicionalmente, la explicación de muchos fenómenos naturales y los principios de algunas aplicaciones industriales están basados en la electrostática. La electricidad estática ya era conocida por los griegos antiguos, quienes observaron que al frotar un trozo de ámbar con piel o seda se atraía una pluma o pelusas. Electrón es la palabra griega para ámbar.

El estudio comienza reconociendo que la carga eléctrica existe. Experimentos cualitativos sugieren la existencia de dos clases de cargas, positivas y negativas, y que un objeto cargado es creado por la separación de cargas:

- Un átomo es eléctricamente neutro; tiene el mismo número de protones en un núcleo (cargas positivas) y electrones (cargas negativas) que se mueven en órbitas alrededor del núcleo.
- Los objetos se cargan añadiendo o removiendo electrones; es decir, un objeto macroscópico se carga cuando tiene más carga de un signo que de otro.
- Una carga positiva ocurre cuando may menos electrones que protones; su definición clásica es la carga acumulada por una barra de vidrio frotada con seda o algodón.
- Una carga negativa cuando hay más electrones que protones; su definición clásica es la carga acumulada por una barra dura de caucho frotada con piel.

• En la naturaleza, la cantidad total de carga positiva equilibra la cantidad total de carga negativa; la neutralidad eléctrica de los objetos es lo más común. Además, no es posible crear (o aniquilar) carga de un signo sin crear (o aniquilar) carga del signo contrario. Esto puede considerarse como un *principio de conservación de carga*.

Ley de Conservación de la Carga Eléctrica. La cantidad neta de carga eléctrica producida en cualquier proceso es igual a cero. Si una región u objeto adquiere una carga positiva, por ejemplo, entonces se encontrará una carga igual de carga negativa en regiones u objetos vecinos.

La carga es cuantizada. Esto significa que parece haber una magnitud mínima de carga eléctrica. Esta cantidad mínima está asociada, por ejemplo, con la carga de un positrón o de un electrón. Por tanto, todas las cargas son múltiplos enteros de esta carga elemental. En lo que respecta a lo que se conoce, todas las "partículas elementales" de la naturaleza tienen una carga de magnitud igual a la carga del electrón.

La partícula cargada más liviana que se conoce es el electrón. Su masa (en reposo) es 9.1091×10^{-31} kilogramos. La masa en reposo de un protón o de un neutrón es aproximadamente 1840 veces mayor que la del electrón. En el sistema de unidades SI, la unidad de carga eléctrica es el *culombio* (se denota por C). Un culombio es aproximadamente equivalente a 6×10^{18} electrones; es una unidad de tamaño bastante grande para la carga puesto que la carga electrónica es $e = -1.6019 \times 10^{-19}$ C.

Observe que un culombio es una carga eléctrica extremadamente grande cuando se compara con la carga de un solo electrón o protón. Para tener una idea de la magnitud, considere dos objetos, cada uno con una carga neta de +1 culombio. Si estos objetos se colocasen a una distancia de un metro entre ellos, la fuerza de repulsión sería de nueve millardos de newtons, lo que corresponde a un millón de toneladas. Como el culombio es una

carga tan gigantesca, los científicos algunas veces usan unidades de medición como el microculombio (10^{-6} C), el picoculombio (10^{-12} C) o hasta la simple carga del electrón, *e*.

Como ya se mencionó, se reconocen dos clases de cargas eléctricas, denotadas arbitrariamente como positivas (+) y negativas (–). Las cargas del mismo signo se repelen y cargas con signos contrarios se atraen. Así, las cargas eléctricas ejercen una fuerza sobre otras cargas eléctricas. Esta *fuerza electrostática* entre dos cargas es *directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas* (una relación de *ley del cuadrado inverso*): **ley de Coulomb**. Esta ley física se estableció experimentalmente con dos cargas eléctricas separadas en el espacio libre.

El estudio de la electrostática usualmente comienza con la formulación de la ley de Coulomb para la fuerza entre dos cargas puntuales. La ley de Coulomb es una ley física; se estableció mediante experimentación. Coulomb midió la fuerza entre cuerpos cargados mediante una balanza de torsión; estableció que la magnitud de la fuerza entre dos objetos cargados pequeños (cargas puntuales) separados en el vacío o espacio libre por una distancia grande comparada con el tamaño de las cargas es proporcional al producto de las cargas en cada una de ellas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, esto es,

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2}$$

donde Q_1 y Q_2 son las magnitudes de las cargas, positivas y negativas, R_{12} es la distancia de separación de las cargas y k es una constante de proporcionalidad que depende del medio y del sistema de unidades utilizado. Si se usa el sistema de unidades SI, la carga Q se mide en culombios (C), R_{12} se mide en metros (m) y la fuerza estará en newtons (N). Esto se cumplirá si la constante de proporcionalidad k se toma como

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

La constante universal ε_0 se conoce como la *permitividad del vacío* o *del espacio libre* y tiene la magnitud

José R. Morón

 $\epsilon_0 = 8.854187 \times 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} = \frac{\text{Faradio (F)}}{\text{metro (m)}}$ (2.1)1

Entonces

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \quad \frac{m}{F}$$

Es aceptable usar $\varepsilon_0 \simeq (1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m si se ignora un pequeño error. Ahora la ley de Coulomb se puede escribir como

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$
(2.2)

No es difícil escribir la ley de Coulomb en forma vectorial. Para escribir la forma vectorial de F se debe tomar en cuenta el hecho adicional de que la fuerza actúa a lo largo de la recta (imaginaria) que une las dos cargas. Coulomb también encontró que cargas de signos diferentes se atraen y del mismo signo se repelen. La razón para utilizar el factor $1/4\pi\epsilon_0$ en la ley de Coulomb es puramente práctica: eliminar el factor 4π de muchas otras ecuaciones de uso común.

En la Fig. 2.1, sea \mathbf{r}_1 el vector de posición de Q_1 y \mathbf{r}_2 el vector de posición de Q_2 . Entonces el vector $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ representa el segmento de línea recta dirigido de Q_1 a Q_2 . El vector \mathbf{F}_{12} es la fuerza sobre Q_2 (debida a Q_1) y se ilustra para el caso en que ambas cargas tienen el mismo signo. Usando notación vectorial, la ley de Coulomb puede formularse como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2} \hat{\mathbf{a}}_{12}$$
(2.3)

donde \hat{a}_{12} es un vector unitario en la dirección del vector \mathbf{R}_{12} , o

$$\hat{\mathbf{a}}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$
(2.4)



Figura 2.1. Fuerza entre dos cargas eléctricas.

De la Ec. (2.4) se observa que si Q_1 y Q_2 tienen la misma polaridad (el mismo signo), entonces F_{12} es positiva (repulsiva) y si Q_1 y Q_2 son de signos opuestos, se tiene que \mathbf{F}_{12} es negativa (atractiva).

Al sustituir la Ec. (2.4) en la Ec. (2.3), se obtiene

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{a}}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$
(2.5)

Aquí conviene señalar lo siguiente:

1. Como se ilustra en la Fig. 2.1, la fuerza \mathbf{F}_{21} que actúa sobre Q_1 debida a Q_2 la da la expresión

$$\mathbf{F}_{21} = |\mathbf{F}_{12}| \hat{\mathbf{a}}_{21} = |\mathbf{F}_{12}| (-\hat{\mathbf{a}}_{12})$$

Es decir,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

puesto que $\hat{\mathbf{a}}_{21} = -\hat{\mathbf{a}}_{12}$. La fuerza de Coulomb es una fuerza mutua, de modo que la fuerza que actúa sobre Q_2 debida a q_1 tiene la misma magnitud que \mathbf{F}_{12} , pero está dirigida en la dirección opuesta.

- 2. La distancia R_{12} entre los cuerpos cargados debe ser grande comparada con sus dimensiones lineales; es decir, Q_1 y Q_2 deben ser, idealmente, cargas puntuales.
- 3. Las cargas Q_1 y Q_2 deben estar en reposo (cargas estáticas). Si Q_1 está en reposo y Q_2 no lo está, entonces la ley de Coulomb aplica, cualquiera sea la velocidad de Q_2 . Éste es un hecho experimental. Si Q_1 no está en reposo, la ley de Coulomb deja de tener validez.
- 4. En la Ec. (2.5) se deben tomar en cuenta los signos de las cargas Q_1 y Q_2 .

La ley de Coulomb es lineal, puesto que si se multiplica Q_1 por un factor constante α , la fuerza sobre Q_2 también se multiplica por el mismo factor α . Experimentalmente, se determina que la fuerza que una carga experimenta debido a la presencia de una segunda carga no es afectada por la presencia de otras cargas en su entorno. Así que también se cumple que la fuerza sobre una carga en la presencia de otras cargas es justo la suma de las fuerzas sobre esa carga debidas a cada una de las otras cargas actuando individualmente. En consecuencia, es posible aplicar el *principio de superposición*, y la fuerza sobre una carga Q debida a otras N cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_N , cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ es la suma vectorial:

$$\mathbf{F} = \frac{QQ_{1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{1})}{4\pi\varepsilon_{0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{1}|^{3}} + \frac{QQ_{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2})}{4\pi\varepsilon_{0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2}|^{3}} + \dots + \frac{QQ_{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{N})}{4\pi\varepsilon_{0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{N}|^{3}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}} \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k}|^{3}}$$
(2.6)

Si la carga está distribuida en forma continua en alguna región, la suma vectorial es reemplazada por una integral de funciones vectoriales.

La ley de Coulomb es precisa sólo para cargas puntuales. Sin embargo, todos los experimentos en la vida real se realizan con cargas en objetos que tienen dimensiones finitas. La ley de Coulomb puede usarse en experimentos con esos objetos si las dimensiones de los objetos cargados son mucho menores que la distancia entre sus centros.

Ejemplo 1. Determínese la fuerza sobre una carga de 100 μ C colocada en el punto (0, 0, 3) m si cuatro cargas iguales de 20 μ C están situadas en los ejes *x*, *y* y *z*, como muestra la Fig. 2.2.



Figura 2.2

Solución: Considere la fuerza debida a la carga en (0, 4, 0):

$$\frac{(100 \times 10^{-6})(20 \times 10^{-6})}{4\pi (10^{-9}/36\pi)5^2} \left(\frac{-4\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z}{5}\right)$$

La componente en la dirección de y de esta carga será cancelada por la carga en (0, -4, 0). En la misma forma, las componentes en x debidas a las otras dos cargas se cancelarán. Por tanto, la fuerza total es cuatro veces la fuerza en la dirección z:

$$\mathbf{F} = 4 \left(\frac{18}{25} \right) \left(\frac{3\hat{\mathbf{a}}_y}{5} \right) = 1.73\hat{\mathbf{a}}_z \quad \mathbf{N}$$

Ejemplo 2. Considérese una barra delgada y larga de longitud *L* (Fig. 2.3) que contiene una distribución uniforme de carga en exceso *Q*. ¿Cuál será la fuera de esta distribución sobre una carga *q* a una distancia *a* de la barra a lo largo de una línea que atraviesa el eje de la barra?



Figura 2.3. Fuerza ejercida por una distribución lineal.

Solución: Puesto que la carga Q está distribuida uniformemente en la barra, la fuerza **F**, cuya dirección se indica en la Fig. 2.3, debida a esta carga distribuida puede calcularse hallando la fuerza elemental d**F** debida a la carga elemental dQ y luego integrando sobre toda la distribución de carga. De manera que lo que se necesita es hallar una expresión que permita sumar las contribuciones de cada elemento diferencial de carga. La magnitud de la fuerza sobre *q* debida a cada elemento dQ será

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2}$$

La relación entre dQ y el elemento dx la expresa la densidad lineal $\rho_{\ell} = dQ/dx$, o

$$dQ = \rho_{\ell} dx$$

Esto da la cantidad de carga dQ en un elemento de longitud dx. La ecuación ahora es

$$dF = \frac{q\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{r^2}$$

Si se toma el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la barra, entonces r + x = L + a y r = L + a - x, de manera que

$$dF = \frac{q\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{\left(L+a-x\right)^2}$$

En el caso de una densidad uniforme, ρ_ℓ es una constante e igual a Q/L y la fuerza total sobre la carga q es

$$F = \frac{q\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2}$$
$$= +\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a(L+a)}$$
(N)

El signo positivo indica que la fuerza es de repulsión cuando q y Q tienen el mismo signo.

Ejemplo 3. Hállese la fuerza sobre una carga puntual de 50 µC ubicada en (0, 0, 5) m debida a una carga de 500 π µC distribuida uniformemente en un disco circular $\rho \le 5$ m, z = 0 (Fig. 2.4).

Solución: La carga está distribuida uniformemente con una densidad



En coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$\mathbf{R} = -\hat{\mathbf{a}}_{0} + 5\hat{\mathbf{a}}_{2}$$

Entonces cada elemento de carga diferencial produce una fuerza diferencial dada por

$$d\mathbf{F} = \frac{\left(50 \times 10^{-6}\right) \left(\rho_{s} \rho \, d\rho \, d\phi\right)}{4\pi \left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right) \left(\rho^{2} + 25\right)} \left(\frac{-\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + 5\hat{\mathbf{a}}_{z}}{\sqrt{\rho^{2} + 25}}\right)$$

Antes de integrar, observe que las componentes radiales se cancelan y que $\hat{\mathbf{a}}_x$ es constante. Por tanto,

$$\mathbf{F} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{5} \frac{(50 \times 10^{-6})(0.2 \times 10^{-4})5\rho \,d\rho \,d\phi}{4\pi (10^{-9}/36\pi)(\rho^2 + 25)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z$$
$$= 90\pi \int_{0}^{5} \frac{\rho \,d\rho}{(\rho^2 + 25)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z = 90\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + 25}}\right]_{0}^{5} \hat{\mathbf{a}}_z = 16.5 \hat{\mathbf{a}}_z \quad (N)$$

2.3 Intensidad de Campo Eléctrico

Si ahora se considera una carga fija en su posición y se mueve una carga de prueba lentamente a su alrededor, se observa que en todas partes existe una fuerza sobre esta segunda carga; en otras palabras, la segunda carga pone de manifiesto la existencia de un *campo de fuerzas*. Esta segunda carga de prueba se identifica como Q_p . La fuerza que actúa sobre ella la da la ley de Coulomb como

$$\mathbf{F}_p = \frac{Q_1 Q_p}{4\pi\varepsilon_0 R_{1\,p}^2} \hat{\mathbf{a}}_{1\,p}$$

donde Q1 representa la carga fija. Escribiendo esta relación como una fuerza por unidad de carga, se obtiene

$$\frac{\mathbf{F}_p}{Q_p} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1p}^2} \hat{\mathbf{a}}_{1p}$$
(2.7)

La cantidad en el lado derecho de la Ec. (2.7) es una función de Q_1 solamente y del segmento de recta dirigido desde Q_1 hasta la posición de la carga de prueba Q_p , y es independiente de la magnitud de Q_p Esta relación describe un campo vectorial que se conoce como la *intensidad de campo eléctrico* y se denota por **E**; es la *fuerza eléctrica ejercida sobre una carga de prueba unitaria*. Lo importante de esta definición está en el hecho de que **E** puede considerarse como producido por la carga Q_1 independiente de la presencia o ausencia de la carga de prueba Q_p . El paso de \mathbf{F}_p a **E**, aunque matemáticamente muy sencillo, tiene consecuencias físicas muy importantes, ya que el campo **E** asigna propiedades a una región del espacio. Ahora se dice que la fuerza producida sobre la carga de prueba Q_p cuando se coloca en alguna posición se debe al campo **E**, el cual existe en esa posición, omitiendo la contribución de Q_p al campo total. Aquí se está tomando el punto de vista de que las cargas *no producen fuerzas sobre sí mismas*. La fuerza sobre Q_p es producida por el *campo* que existiría aun si Q_1 no estuviese allí.

Una definición más precisa de la intensidad de campo eléctrico la da la relación

$$\mathbf{E} = \lim_{Q_p \to 0} \frac{\mathbf{F}_p}{Q_p}$$
(2.8)

Por supuesto, en la práctica la carga Q_p no puede ser cero; de hecho, no puede ser menor que la carga de un electrón. Sin embargo, lo finito de la carga de prueba no haría que la intensidad **E** medida difiera apreciablemente de su valor calculado si la carga de prueba es lo suficientemente pequeña para no perturbar la distribución de la carga fuente. Se debe entender claramente que, aunque se introdujo el concepto de un campo eléctrico a través de un análisis de la ley de Coulomb, la definición de la intensidad del campo eléctrico dada en la Ec. (2.8) depende solamente de aquella parte de la ley que dice que la fuerza es proporcional a la carga, no de la parte que dice que la fuerza es proporcional al recíproco del cuadrado de la separación entre las cargas.

Una relación inversa de la Ec. (2.8) da la fuerza \mathbf{F} sobre una carga estacionaria Q en un punto \mathbf{r} en un campo eléctrico \mathbf{E} ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{2.9}$$

Observe que **E** es una cantidad *electromecánica*, no es una puramente eléctrica. La intensidad de campo eléctrico se mide en la unidad de newtons (N) por culombio (C), la fuerza por unidad de carga:

$$1 \frac{N}{C} = 1 \frac{\text{voltio (V)}}{\text{metro (m)}}$$

El voltio por metro es una unidad alternativa y se definirá más adelante.



Figura 2.5. Carga posicionada fuera del origen de un sistema de coordenadas.

Generalizando la Ec. (2.7), la intensidad de campo eléctrico en un punto **r** debida a una carga puntual Q situada en **r**' (Fig. 2.5) se obtiene fácilmente como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \,\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \right|^3} \tag{2.10}$$

Si ahora se coloca Q arbitrariamente en el centro de un sistema de coordenadas esféricas, el vector unitario en la Ec. (2.10) se convierte en el vector radial unitario $\hat{\mathbf{a}}_r$, y R en r. Por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \tag{2.11}$$

y su magnitud es

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

El campo tiene una única componente radial y la relación muestra una clara ley de cuadrado inverso.

Observe la forma sencilla de la Ec. (2.11). Si se convierte a coordenadas rectangulares, se obtiene que

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_{\acute{y}} + z\hat{\mathbf{a}}_z$$
$$\hat{\mathbf{a}}_R = \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_{\acute{y}} + z\hat{\mathbf{a}}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

y por tanto

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)} \left(\frac{x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$
(2.12)

Esta expresión ya no muestra de inmediato la naturaleza sencilla del campo, y su complejidad es el precio que se paga por resolver un problema que tiene simetría esférica en un sistema de coordenadas con el cual se está más familiarizado, el sistema cartesiano. Si la carga no está en el origen, entonces se pierde la simetría y el campo lo da la Ec. (2.10).

Un campo vectorial se definió como una función vectorial de la posición; esto se recalca simbolizando un campo E en notación funcional por $E(\mathbf{r})$, como se hizo en la Ec. (2.9).

¿Qué sucede si el campo es producido por más de una carga? ¿Cómo se obtiene el campo eléctrico? Como las fuerzas eléctricas cumplen con el principio de superposición, la intensidad de campo eléctrico también obedece ese principio. Si hay varias cargas, cada una impone su propio campo y el campo E resultante es simplemente la suma vectorial de todos los campos debidos a las cargas individuales (linealidad de la ley de Coulomb). Utilizando la linealidad implicada por la superposición de las fuerzas de Coulomb, la intensidad de campo eléctrico producida por *N* cargas puntuales estacionarias $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ situadas en $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ se obtiene a partir de la Ec. (2.6) como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Q_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

o sea

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\right|^3}$$
(2.13)

Aunque se definió el campo eléctrico con referencia a fuerzas sobre una carga *Q*, el campo es una entidad independiente de *Q* ya que **F** es simplemente proporcional a **E**.

Ejemplo 4. Dos cargas puntuales de 1 mC y -2 mC están situadas en (3, 2, -1) y (-1, -1, 4), respectivamente. Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de 10 nC situada en (0, 3, 1) y la intensidad de campo eléctrico en ese punto.

Solución: De la Ec. (2.13) se tiene que

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{2} \frac{QQ_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{QQ_k \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\right)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\right|^3}$$

donde

$$\mathbf{r} = \langle 0, 3, 1 \rangle = 3\hat{\mathbf{a}}_{y} + \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$\mathbf{r}_{1} = \langle 3, 2, -1 \rangle = 3\hat{\mathbf{a}}_{x} + 2\hat{\mathbf{a}}_{y} - \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$\mathbf{r}_{2} = \langle -1, -1, 4 \rangle = -\hat{\mathbf{a}}_{x} - \hat{\mathbf{a}}_{y} + 4\hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_{1} = -3\hat{\mathbf{a}}_{x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} + 2\hat{\mathbf{a}}_{z}, \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{1}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2} = \hat{\mathbf{a}}_{x} + 4\hat{\mathbf{a}}_{y} - 3\hat{\mathbf{a}}_{z}, \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2}| = \sqrt{1 + 16 + 9} = \sqrt{26}$$

у

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right]$$
$$= \frac{10 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left[\frac{10^{-3} \left(-3\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y + 2\hat{\mathbf{a}}_z \right)}{(14)^{3/2}} + \frac{(-2 \times 10^{-3}) \left(\hat{\mathbf{a}}_x + 4\hat{\mathbf{a}}_y - 3\hat{\mathbf{a}}_z \right)}{(26)^{3/2}} \right]$$

0

 $\mathbf{F} = -6.507 \hat{\mathbf{a}}_x - 3.817 \hat{\mathbf{a}}_y + 7.506 \hat{\mathbf{a}}_z \text{ mN}$

En ese punto

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{\left(-6.507\,\hat{\mathbf{a}}_x - 3.817\,\hat{\mathbf{a}}_y + 7.506\,\hat{\mathbf{a}}_z\right) \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-9}}$$

= -650.7 $\hat{\mathbf{a}}_x$ - 381.7 $\hat{\mathbf{a}}_y$ + 750.6 $\hat{\mathbf{a}}_z$ kV/m

Ejemplo 5. Dos cargas puntuales de igual masa *m* y carga *Q* están suspendidas de un punto común por dos hilos de masa despreciable y longitud ℓ . Demostrar que en equilibrio, el ángulo de inclinación α de cada hilo respecto de la vertical, lo da la expresión

$$Q^2 = 16\pi\epsilon_0 mg\ell^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha$$

Si α es muy pequeño, demuestre que

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mg\ell^2}}$$

Solución: Considere el sistema de cargas como el que se muestra en la Fig. 2.6, en donde Fe es la fuerza eléctrica o de Coulomb, *T* es la tensión en cada hilo y *mg* es el peso de cada carga. En *A* o *B*,

$$T \operatorname{sen} \alpha = F_e$$
$$T \cos \alpha = mg$$

Por tanto,

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F_e}{mg} = \frac{1}{mg} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

pero $r = 2\ell \operatorname{sen} \alpha$, por lo que

$$Q^2 \cos \alpha = 16 \varepsilon_0 \pi mg \ell^2 \sin^3 \alpha$$

$$Q^2 = 16\varepsilon_0 \pi mg\ell^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha$$

0

83



Figura 2.6

como se requiere. Cuando el ángulo α es muy pequeño, entonces tan $\alpha \approx \alpha \approx sen \alpha$ y, por tanto,

у

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 mg\ell^2}}$$

 $Q^2 \approx 16\epsilon_0 \pi mg \ell^2 \alpha^3$

Ejemplo 6. Una aplicación práctica de la electrostática se tiene en la separación electrostática de sólidos. Por ejemplo, un cierto tipo de mineral de fosfato, formado por pequeñas partículas de cuarzo y roca de fosfatos, puede separarse en sus componentes si se aplica un campo eléctrico uniforme (Fig. 2.7). Si se supone una velocidad y un desplazamiento iniciales iguales a cero, se determinará la separación entre las partículas luego de caer 80 cm. Tomar *E* = 500 kV/m y Q/m = 9 µC/kg.



Figura 2.7

Solución: Si no se toma en cuenta la fuerza de Coulomb entre partículas, la fuerza electrostática actúa horizontalmente, en tanto que la fuerza de gravedad (peso) lo hace verticalmente. En consecuencia,

$$Q\mathbf{E} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{\mathbf{a}}_x \quad \text{o} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Q}{m} E$$

~

~

Integrando dos veces, se obtiene

$$x = \frac{QE}{2m}t^2 + C_1t + C_2$$

También,

у

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$$

Como el desplazamiento inicial es cero, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} x(t=0)=0 & \Rightarrow & C_2=0 \\ y(t=0)=0 & \Rightarrow & C_4=0 \end{array}$$

También la velocidad inicial es cero; es decir,

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \implies C_1 = 0$$

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \implies C_3 = 0$$

Así que

$$x = \frac{QE}{2m}t^2, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Cuando y = -80 cm = -0.8 m, $t^2 = 2 \times 0.8/9.8 = 0.1633$ y

$$x = \frac{9 \times 10^{-6} \times 500 \times 10^{3}}{2} \times 0.1633 = 0.3673 \text{ m}$$

De manera que la separación entre las partículas es 2x = 73.47 cm.

Una distribución de carga importante, el *dipolo eléctrico*, está compuesta de dos cargas de la misma magnitud pero de signos opuestos, $Q \neq -Q$. Las líneas del campo de este dipolo se muestran gráficamente en la Fig. 2.8(a). Cerca de la carga positiva, el campo está dirigido radialmente y se aleja de la carga; cerca de la carga negativa, el campo está dirigido radialmente, el campo de este dipolo es dado por la Ec. (2.13) y, en términos de la notación en la Fig. 2.8(b), por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}}{\left| \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|^3} - \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}}{\left| \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d} \right|^3} \right)$$
(2.14)



Figura 2.8 Campo de un dipolo.

En la mayoría de los casos de interés, la distancia del punto del campo al dipolo es grande comparada con la separación entre las cargas, es decir, r >> d. Usando el teorema del binomio y usando sólo el primer término diferente de cero en la expansión en potencias de d/r, se encuentra que el campo dado por la Ec. (2.14) puede ser aproximado cuando r >> d por la expresión más sencilla

86

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \Big[3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) \hat{\mathbf{a}}_r - \mathbf{p} \Big]$$

= $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \Big[2\cos\theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \Big]$ (2.15)

donde se define

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{2.16}$$

y se conoce como el momento del dipolo eléctrico; tiende la dirección de +Q a -Q.

2.4 Campos Eléctricos Producidos por Distribuciones de Cargas

Hasta ahora se han considerado fuerzas y campos eléctricos producidos por cargas puntuales, que, en esencia, son cargas que ocupan un espacio físico muy pequeño. Además de estar concentrada en pequeños objetos (cargas puntuales), también es posible considerar una región del espacio ocupada por un gran número de cargas separadas por distancias muy pequeñas y con una distribución más o menos continua. En este caso, para facilitar una descripción matemática, se puede reemplazar esta distribución de partículas por una *densidad de carga de volumen continua*. Eso sólo se puede hacer si no se está interesado en las pequeñas irregularidades en el campo conforme nos movemos entre un electrón y otro.

Esto no representa una limitación, ya que el resultado final se expresa casi siempre en términos de una corriente en una antena receptora, un voltaje en un circuito electrónico o, en general, en función de un fenómeno *macroscópico* de gran escala.

Para describir las cargas distribuidas en un volumen, se define una densidad volumétrica de carga, la cual se denota por ρ_v y tiene las unidades de culombios por metro cúbico (C/m³). Esta densidad nos permite utilizar una integral de volumen para calcular la intensidad de campo eléctrico total. La cantidad de carga diferencial ΔQ contenida en un incremento diferencial de volumen Δv es

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v$$

y se puede definir ρ_v matemáticamente, al pasar al límite, como

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \tag{2.17}$$

Debido a la estructura granular de la carga eléctrica y como se está más interesado en fenómenos macroscópicos que en microscópicos, la condición $\Delta v \rightarrow 0$ en la Ec. (2.17) significa verdaderamente que Δv tiende, no a cero, sino a un valor pequeño para los estándares de laboratorio (macroscópicos), pero grande comparado con las dimensiones atómicas. De modo que la carga total en el interior de un volumen finito se obtiene por integración en todo el volumen; es decir,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v(\mathbf{r}) \, dv \tag{2.18}$$

donde $\rho_v(\mathbf{r})$ es una función de la posición; se supone que esta densidad está definida en un instante particular *t*. Sin embargo, puede cambiar con el tiempo, de manera que en general se puede escribir $\rho_v = \rho_v(\mathbf{r}, t)$ (observe que la integral en la Ec. (2.18) es una integral triple). La densidad de carga volumétrica es generalmente una función suave de su posición en el espacio y por tanto posee derivadas parciales continuas.

El campo eléctrico producido por una distribución continua de carga puede obtenerse integrando (sumando) la contribución de cada elemento diferencial de carga (considerado como una carga puntual) en la distribución.

Con referencia a la Fig. 2.9, allí se muestra una distribución de carga de volumen cuya densidad ρ_v (C/m³) es una función de las coordenadas. Puesto que un elemento diferencial de carga se comporta como una carga puntual, la contribución de la carga $\rho_v dv$ en un elemento de volumen dv en el punto *P* del campo es

 $d\mathbf{E} = \frac{\rho_v dv}{1 r^2} \hat{\mathbf{a}}_R$

Así pues,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{R^2} \hat{\mathbf{a}}_R$$
(2.19)

o, puesto que $\hat{\mathbf{a}}_R = \mathbf{R}/R$,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{vol}} \mathbf{\rho}_v \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv$$
(2.20)

Excepto por algunos casos muy sencillos, la integral triple en la Ec. (2.20) es difícil de evaluar ya que, en general, las tres cantidades en el integrando ($\hat{\mathbf{a}}_{R}, \rho_{v}$ y *R*) cambian con la posición del volumen diferencial *dv*.

R

ρ_vdv Volumer



Si la carga está distribuida en una superficie *S* con una densidad de carga de ρ_s (C/m²), entonces la integración debe realizarse en la superficie, la cual no es necesariamente plana, y entonces

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S} \frac{\rho_s dS}{R^2} \hat{\mathbf{a}}_R$$
(2.21)

En la misma forma, para una densidad de carga lineal se tiene que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\rho_\ell d\ell}{R^2} \hat{\mathbf{a}}_R$$
(2.22)

donde ρ_{ℓ} (C/m) es la densidad de carga lineal y *L* la línea (no necesariamente recta) en la cual está distribuida la carga.

Ejemplo 7. Considérese una carga lineal con una densidad uniforme ρ_{ℓ} que se extiende desde *A* hasta *B*, como muestra la Fig. 2.10. Determine **E** en el punto (*x*, *y*, *z*).

Solución: El elemento de carga dQ asociado con el elemento $d\ell = dz'$ de la línea es

$$dQ = \rho_{\ell} d\ell = \rho_{\ell} dz'$$

y la carga total es

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_\ell dz'$$

La intensidad de campo eléctrico **E** en un punto arbitrario P(x, y, z) puede hallarse usando la Ec. (2.22). Se acostumbra denotar el punto del campo por (x, y, z) y el punto de fuente por (x', y', z'). Entonces





 $d\ell = dz'$

$$\mathbf{R} = \langle x, y, z \rangle - \langle 0, 0, z' \rangle = x \hat{\mathbf{a}}_{x} + y \hat{\mathbf{a}}_{y} + (z - z') \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
$$= \rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + (z - z') \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
$$\frac{\hat{\mathbf{a}}_{R}}{R^{2}} = \frac{\mathbf{R}}{R^{3}} = \frac{\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + (z - z') \hat{\mathbf{a}}_{z}}{\left[\rho^{2} + (z - z')^{2}\right]^{3/2}}$$
$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^{2} + y^{2} + (z - z')^{2}} = \sqrt{\rho^{2} + (z - z')^{2}}$$

Al sustituir estas relaciones en la Ec. (2.22), se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{A}^{B} \frac{\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + (z - z') \hat{\mathbf{a}}_z}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dz'$$
(2.23)

Figura 2.10

Para evaluar esta integral es conveniente definir los ángulos α , α_1 y α_2 (véase la Fig. 2.10), y se obtiene

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} = \rho \sec \alpha$$

$$z' = OT - \tan \alpha, \qquad dz' = -\rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

y la Ec. (2.23) se convierte en

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \sec^3 \alpha \left(\cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_z\right)}{\rho^3 \sec^3 \alpha} d\alpha$$
$$= -\frac{\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_z\right) d\alpha$$

En consecuencia, para una carga lineal finita,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{4\pi\epsilon_{0}\rho} \Big[-(\operatorname{sen}\alpha_{2} - \operatorname{sen}\alpha_{1})\hat{\mathbf{a}}_{\rho} + (\cos\alpha_{2} - \cos\alpha_{1})\hat{\mathbf{a}}_{z} \Big]$$
(2.24)

Como un caso especial, para una línea de carga infinita, el punto *B* está en $(0, 0, \infty)$ y el punto **A** en $(0, 0, -\infty)$, de manera que $\alpha_1 = \pi/2$ y $\alpha_2 = -\pi/2$. La componente *z* se hace cero y la Ec. (2.24) se vuelve

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$
(2.25)

Ejemplo 8. Se tiene una carga lineal ρ_{ℓ} conformada como un círculo de radio *a* en el plano *z* = 0 y centro en el origen del plano *xy*, como se ilustra en la Fig. 2.11. Se desea

- (a) Hallar **E** en el punto $P_1(0, 0, b)$ en el eje *z*.
- (b) Demostrar que la carga lineal puede considerarse como una carga puntual situada en el origen conforme $b \rightarrow \infty$.



Figura 2.11

Solución:

(a) Los vectores de posición de los puntos fuente y puntos del campo son:

$$\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{a}}_z$$

 $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{o}'}$

El vector distancia **R** se expresa como

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = a \left(\cos \phi_1 \hat{\mathbf{a}} + \sin \phi_1 \hat{\mathbf{a}}_{\nu} \right)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_{\rho'}$ se cambiará a las coordenadas sin tildes si no se anula en expresión final para **E**.

La carga diferencial en el punto fuente con vector de posición \mathbf{r}' es

$$dq = \rho_{\ell} a d\phi'$$

y el campo producido por este diferencial de carga en la posición r es

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell} a \, d\phi'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\rho_{\ell} a \, d\phi'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-a\hat{\mathbf{a}}_{\rho'} + b\,\hat{\mathbf{a}}_z}{\left(a^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

Aunque el campo *d***E** producido por la carga *dq* en $\phi' = \phi_1$ tiene exactamente la misma forma que el campo *d***E** debido a la carga *dq* en $\phi' = \phi_1 + \pi$, la dirección de $\hat{\mathbf{a}}_{p'}$ en $\phi' = \phi_1$ es contraria a la de $\hat{\mathbf{a}}_{p'}$ en $\phi' = \phi_1 + \pi$. Por tanto, los términos con $\hat{\mathbf{a}}_{p'}$ no contribuyen a *d***E**. Si se suman las componentes en *z* de *d***E**, se obtiene la intensidad del campo eléctrico total como

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ab\hat{\mathbf{a}}_z}{\left(a^2 + b^2\right)^{3/2}} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi'$$
(2.26)

(b) La carga total en el círculo es

$$Q = 2\pi a \rho_{\ell} \tag{2.27}$$

Si se despeja ρ_{ℓ} en la Ec. (2.27) y se sustituye en la Ec. (2.26) y se usa la aproximación $(a^2 + b^2)^{3/2} \cong b^3$ conforme $b \to \infty$, se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \,\hat{\mathbf{a}}_z$$

la cual puede considerarse como la intensidad del campo eléctrico a una distancia *b* de una carga puntual *Q* situada en el origen.

Ejemplo 9. *Densidad de Carga Superficial*. Ahora se obtendrá una expresión para la intensidad de campo eléctrico E creado por una carga de densidad ρ_s (C/m²) distribuida uniformemente en un plano infinito. Se usarán coordenadas cilíndricas con la carga situada en el plano xy (z = 0), como muestra la Fig. 2.12.



Solución: Para la situación indicada en la Fig. 2.12,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_{\rm s}\rho \,d\rho \,d\phi}{4\pi\varepsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{-\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + z \hat{\mathbf{a}}_{z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

La simetría con respecto al eje z resulta en la cancelación de las componentes radiales y entonces

$$\mathbf{E} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\rho_{s} \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\varepsilon_{0} \left(\rho^{2} + z^{2}\right)^{3/2}} \, \hat{\mathbf{a}}_{z} = \frac{\rho_{s} z}{2\varepsilon_{0}} \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^{2} + z^{2}}} \right]_{0}^{\infty} \, \hat{\mathbf{a}}_{z}$$
$$= \frac{\rho_{s}}{2\varepsilon_{0}} \, \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

Este resultado es para puntos que están por encima del plano *xy*. Por debajo de este plano, el vector unitario cambia de dirección a $-\hat{\mathbf{a}}_z$. Es posible escribir una forma generalizada de esta relación usando $\hat{\mathbf{a}}_n$ como el vector unitario normal a la superficie de carga; la ecuación se convierte entonces en

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}_s}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0} \,\hat{\mathbf{a}}_n \tag{2.28}$$

Observe que el campo eléctrico en un punto es normal a la lámina de carga y es independiente de la distancia (punto de observación) al plano.

Si en vez de integrar de 0 a ∞ , se evalúa la integral en la variable ρ desde 0 hasta *a*, se obtiene el campo **E** producido por un disco de radio *a* a una distancia *z* de su centro con una carga superficial de densidad uniforme ρ_s . Ahora $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{a}}_z \mathbf{y}$

$$\mathbf{E} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} \frac{\rho_{s} \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\epsilon_{0} \left(\rho^{2} + z^{2}\right)^{3/2}} = \left[\frac{\rho_{s} z}{2\epsilon_{0}} \frac{-1}{\sqrt{\rho^{2} + z^{2}}}\right]_{0}^{a} = \frac{\rho_{z}}{2\epsilon_{0}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^{2} + z^{2}}}\right)$$

Ejemplo 10. Dos láminas infinitas, cada una con una carga uniforme de densidad ρ_s (C/m²) están situadas en $x = \pm 1$, como muestra la Fig. 2.13. Determinar **E** en todas las regiones.



Solución: Ambas láminas producen campos que están dirigidos en la dirección de *x*, independientes de la distancia. Entonces

$$\mathbf{E}_{1} + \mathbf{E}_{2} = \begin{cases} -\frac{\rho_{s}}{\varepsilon_{0}} \hat{\mathbf{a}}_{x}, & x < 1\\ 0, & -1 < x < 1\\ \frac{\rho_{s}}{\varepsilon_{0}} \hat{\mathbf{a}}_{x}, & x < 1 \end{cases}$$

Véase la Fig. 2.13.

Ejemplo 11. *Densidad de Carga Volumétrica*. Suponga que una carga está distribuida uniformemente en un sólido esférico de radio *a* centrado en el origen y con densidad uniforme ρ_{v} , como se muestra en la Fig. 2.13.



Figura 2.14

Solución: La carga dQ asociada con el elemento de volumen dv es

$$dQ = \rho_v dv$$

Entonces, el campo eléctrico dE fuera de la esfera en P(0, 0, z) debido a la carga en el volumen elemental es

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \,\hat{\mathbf{a}}_R$$

en donde $\hat{\mathbf{a}}_R = \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_z + \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$. Debido a la simetría de la distribución, las contribuciones a E_x o E_y suman cero. Sólo queda E_z , la cual es dada por

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \int dE \cos \alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\cos \alpha \, dv}{R^2}$$
(2.29)

Es necesario deducir las expresiones para dv, $R^2 y \cos \alpha$; ellas son

 $dv = r'^{2} \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$ $R^{2} = z^{2} + r'^{2} - 2zr' \cos \theta'$ $r'^{2} = z^{2} + R^{2} - 2zR \cos \alpha$

Es conveniente evaluar la integral en la Ec. (2.29) en términos de r y R'. Por tanto, $\cos \theta'$, $\cos \alpha$ y $\sin \theta' d\theta'$ se expresan en función de R' y r'; esto es,

$$\cos \alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$
$$\cos \theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

Diferenciando esta última relación respecto de θ' , manteniendo *z* y *r'* fijos, se obtiene

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{R dR}{zr'}$$
(2.30)

Conforme θ' varía de 0 a π , *R* varía de (z-r') a (z+r') si el punto *P* está fuera de la esfera. Sustituyendo entonces en la Ec. (2.29) da

$$\begin{split} E_{z} &= \frac{\rho_{v}}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^{2} \frac{RdR}{zr'} dr' \frac{z^{2} + R^{2} - r'^{2}}{2zR} \frac{1}{R^{2}} \\ &= \frac{\rho_{v} 2\pi}{8\pi\varepsilon_{0} z^{2}} \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1 + \frac{z^{2} - r'^{2}}{R^{2}} \right] dR dr' \\ &= \frac{\rho_{v}}{4\varepsilon_{0} z^{2}} \int_{0}^{a} r' \left[R - \frac{z^{2} - r'^{2}}{R^{2}} \right]_{R=z-r}^{z+r'} dr' \\ &= \frac{\rho_{v}}{4\varepsilon_{0} z^{2}} \int_{0}^{a} 4r'^{2} dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{z^{2}} \left(\frac{4}{3} \pi a^{3} \rho_{v} \right) \end{split}$$

la cual puede escribirse como

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,\hat{\mathbf{a}}_r \tag{2.31}$$

que es idéntico al campo eléctrico que produciría en el mismo una carga puntual situada en el origen o en el centro de la distribución esférica de carga. La razón de este resultado se aclarará cuando se estudie la ley de Gauss.

2.5 Líneas de Flujo y Gráficas de los Campos

Ya se definieron ecuaciones vectoriales para la intensidad de campo eléctrico producido por varias configuraciones de cargas diferentes, y no fue tan sencillo interpretar la magnitud y la dirección del campo a partir de las ecuaciones obtenidas, aun cuando los casos resueltos forman parte de la clase menos complicada. Nuevas distribuciones conducen a expresiones más complejas para los campos y son más difíciles de visualizar

partiendo de las ecuaciones. No obstante, si se conociese cuál imagen dibujar, se podría comprender mejor lo que representan las ecuaciones.

Considérese el campo en torno a una línea de carga

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon_0 \rho} \, \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

La Fig. 2.15*a* muestra una vista transversal de la línea de carga y presenta lo que podría ser un primer intento para dibujar el campo – segmentos cortos dibujados en varias partes con longitudes proporcionales a la magnitud de E y apuntando en la dirección de E. La Fig. 2.15*a* no muestra la simetría con respecto al ángulo ϕ , de manera que se intenta otra representación en la Fig. 2.15*b*. Con una ubicación simétrica de los segmentos. Ahora aparece el verdadero problema – las líneas más cortas deben dibujarse en la región de mayor densidad. Otros esquemas incluyen dibujar líneas más cortas para representar campos más fuertes y el uso de matices o de colores diferentes para representa la magnitud de los campos.



Figura 2.15

Por los momentos se usarán líneas continuas desde la carga que muestran solamente la dirección de E y son tangentes a E en todas partes. La Fig. 2.14*c* ilustra este tipo de imagen. Una distribución simétrica de líneas (una cada 45° en este caso) indica simetría acimutal, y se usan puntas de flechas para mostrar la dirección. Estas líneas usualmente se denominan *líneas de flujo* (o *líneas de fuerza*). Una pequeña carga positiva de prueba colocada en cualquier punto de este campo se aceleraría en la dirección de la línea de flujo que pasa por ese punto. Si, por ejemplo, el campo representa la velocidad de un líquido o un gas, pequeñas partículas suspendidas en el líquido trazarían las líneas de flujo.

Por la forma en que están definidas estas líneas, se deducen dos propiedades. Primero, bajo condiciones estáticas cualquier línea debe comenzar en una carga positiva y terminar en una negativa (bajo condiciones de variación en el tiempo, esta afirmación no es necesariamente cierta); y segundo, las líneas de fuerza no se cruzan (¿por qué?

Si se intenta dibujar el campo de la carga puntual, la representación del campo perpendicular al plano de la página ocasionaría serias (insalvables, en realidad) dificultades; por esta razón, el trazado de gráficas de los campos se limita normalmente a campos en dos dimensiones.

En el caso del campo bidimensional, se iguala E_z a cero arbitrariamente. Las líneas de flujo quedan entonces confinadas en planos para los cuales *z* es constante y la gráfica es la misma para cualquiera de estos planos. En la

Fig. 2.16 se dibujan varias líneas de flujo y se indican las componentes E_x y E_y para un punto general. De la geometría es claro que



De manera que si se conoce la forma funcional de E_x y E_y se podrán obtener las ecuaciones de las líneas de flujo. Por la forma en que se definieron las líneas de flujo se deducen dos propiedades. La primera es que, bajo condiciones estáticas, cualquiera de las líneas *debe comenzar en una carga positiva y terminar en una carga negativa* (esta afirmación no es necesariamente válida bajo condiciones de variación en el tiempo). La segunda es que las líneas de fuerza *no pueden cortarse entre sí*.

Como una ilustración de este método, considérese el campo de una línea de carga uniforme con densidad $\rho_{\ell} = 2\pi\epsilon_0$; entonces

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

En coordenadas rectangulares,

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \,\hat{\mathbf{a}}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \,\hat{\mathbf{a}}_y$$

y se forma la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x}$$
 o $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Por tanto, al integrar se obtiene

$$\ln y = \ln x + C_1$$
 o $\ln y = \ln x + \ln C$

y de aquí se obtienen las ecuaciones de las líneas de flujo,

y = Cx

donde *C* es una constante. Si se quiere determinar la ecuación de una línea en particular, dígase la que pasa por (-2, 7, 10), simplemente se sustituyen las coordenadas de ese punto en la ecuación y se evalúa *C*. En este caso, 7 = C(-2) y C = -3.5, de modo que y = 3.5x.

Cada línea se asocia con un valor específico de *C*, y las líneas radiales para los ejes de coordenadas, por ejemplo, corresponden a C = 0 y $1/C = \infty$.

2.6 Densidad de Flujo Eléctrico

El flujo debido al campo eléctrico E puede calcularse si se usa la definición general de flujo dada por la relación

$$\Phi_{el} = \int_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Sin embargo, por razones prácticas en electrostática no se considera esta cantidad como el flujo más útil. Por otra parte, las Ecs. (2.10), (2.13), (2.20), (2.21) y (2.22) indican que la intensidad de campo eléctrico depende del medio

en que está colocada la carga. Supóngase que se define un nuevo campo vectorial **D**, independiente del medio, por la expresión

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E} \tag{2.33}$$

Entonces, el flujo eléctrico Φ_e se define por la ecuación

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{2.34}$$

En unidades SI, una línea de flujo eléctrico emana de una carga de +1 C y termina en una de -1 C. Así que el flujo eléctrico se mide en culombios (C). De allí que el campo vectorial **D** se denomine la *densidad de flujo eléctrico*, y se mida en culombios por metro cuadrado (C/m²). También recibe el nombre de *desplazamiento eléctrico*.

Se puede obtener mayor información sobre **D** si se consideran, por ejemplo, dos esferas concéntricas de radios *a* y *b*, con cargas +*Q* y –*Q* (Fig. 2.17). Las cargas en la esfera interna tienen libertad de movimiento y se deben distribuir uniformemente en la superficie del conductor para no producir un campo eléctrico en el interior del conductor. Las trayectorias del flujo eléctrico Φ_e que se extienden desde la esfera interna hasta la externa se indican mediante las líneas de flujo distribuidas simétricamente y dibujadas radialmente desde una esfera hasta la otra.



Figura 2.17

Por definición, el flujo eléctrico Φ_e se origina en cargas positivas y termina en cargas negativas. En la ausencia de estas últimas, las líneas de flujo terminan en infinito (por convención). En la superficie de la esfera interna, la carga $Q (= \Phi_e)$ produce un flujo eléctrico total de Φ_e culombios de flujo eléctrico. La densidad de flujo en esta superficie es $\Phi_e/(4\pi a^2)$ o $Q/(4\pi a^2)$ C/m², y ésta representa una cantidad importante. Aquí se define la densidad de flujo eléctrico **D** como el flujo eléctrico por unidad de área. La densidad de flujo eléctrico es un campo vectorial y generalmente se da como una función de la posición. Es importante señalar que la magnitud de **D** representa el flujo neto que cruza una unidad de área de la sección transversal. La densidad inducida por la carga superficial uniforme en la esfera tiene simetría esférica y el campo resultante es independiente de θ y ϕ . Por tanto, en la Fig. 2.17, la densidad de flujo eléctrico está en la dirección radial y tiene un valor dado por

$$\mathbf{D}\big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

en la superficie de la esfera interna, y

$$\mathbf{D}\big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

en la superficie de la esfera externa, y a una distancia radial $a \le r \le b$, tenemos que

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Si ahora se permite que la esfera interna se haga más y más pequeña pero manteniendo su carga igual a Q, en el límite ésta se convierte en una carga puntual, pero la densidad de flujo a una distancia r de la carga puntual todavía es dada por

ya que Q líneas de flujo están dirigidas simétricamente emanando desde la carga y atraviesan una superficie esférica imaginaria de área $4\pi r^2$. La densidad de flujo eléctrico dada en la Ec. (2.35) permanecerá igual, aun si el espacio entre las esferas estuviese lleno de un dieléctrico diferente o si la esfera interna se encogiese hasta volverse un punto o si la esfera externa se expandiese hasta infinito.

Este resultado debe compararse con la expresión que da la intensidad del campo eléctrico radial para una carga puntual en el espacio libre

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Por tanto, se deduce fácilmente que en el espacio libre

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E} \tag{2.36}$$

Ésta es la relación constitutiva para **D** y **E** en el espacio libre.

Aunque la Ec. (2.36) aplica en el espacio libre (o en el vacío), no está restringida a una carga puntual. Para una distribución de carga volumétrica en el espacio libre se tiene que

$$\mathbf{E} = \int_{v} \frac{\rho_{v} dv}{4\pi\varepsilon_{0} R^{2}} \hat{\mathbf{a}}_{R}$$
(2.37)

donde esta relación se desarrolló a partir del campo de una sola carga puntual. En una forma similar, la Ec. (2.35) conduce a la relación

$$\mathbf{D} = \int_{v} \frac{\rho_{v} dv}{4\pi R^{2}} \hat{\mathbf{a}}_{R}$$
(2.38)

y la Ec. (2.35) es por tanto válida para cualquier configuración de carga en el espacio libre.

Aquí se debe señalar que para una carga puntual colocada en un medio dieléctrico ideal e infinito, los experimentos de Faraday muestran que la Ec. (2.35) es aplicable, como también lo es la Ec. (2.38). Sin embargo, la Ec. (2.37) no lo es y por esa razón la relación entre **D** y **E** será un poco más complicada que la dada por la Ec. (2.36).

Como **D** es proporcional a **E** en el espacio libre, no pareciera realmente necesario introducir un nuevo símbolo. Esto se hace por varias razones. Primero, el vector **D** está asociado con el concepto de flujo; ésta es una idea importante. Segundo, los campos **D** son algo más sencillos que los campos **E** correspondientes, ya que ε_0 no aparece. Y, finalmente, el conocimiento de **D** es conveniente para la obtención de campos eléctricos en materiales dieléctricos.

Ejemplo 12. ¿Qué flujo neto cruza la superficie cerrada *S* mostrada en la Fig. 2.18, la cual contiene una distribución de carga en la forma de un disco plano de radio 4 m con una densidad $\rho_s = \text{sen}^2 \phi/2\rho \text{ C/m}^2$?



Figura 2.18

Solución: De la definición del flujo Φ_e se obtiene

$$\Phi_e = Q = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{2\rho}\right) \rho \, d\rho \, d\phi = 2\pi \quad (C)$$

Ejemplo 13. Una carga puntual *Q* está ubicada en el origen de un sistema esférico de coordenadas. Hallar el flujo que cruza la porción de una concha esférica descrita por $\alpha \le \theta \le \beta$ (Fig. 2.19). ¿Cuál es el resultado si $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$?



Solución: El flujo total $\Phi_e = Q$ atraviesa una concha esférica completa de área $4\pi r^2$. El área de la porción o cinta del problema es dada por

$$A = \int_{0}^{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} r^{2} \sin \theta d\theta d\phi$$
$$= 2\pi r^{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

Entonces, el flujo neto que atraviesa la cinta se obtiene proporcionalmente como

$$\Phi_{\rm neto} = \frac{A}{4\pi r^2} Q = \frac{Q}{2} (\cos\alpha - \cos\beta)$$

Para $\alpha = 0$ y $\beta = \pi/2$ (un hemisferio), ésta se convierte en $\Phi_{\text{neto}} = Q/2$.

2.7 Ley de Gauss

La generalización de los experimentos de Faraday con cargas eléctricas conduce al siguiente enunciado, conocido como la *ley de Gauss*, la cual da una relación entre las cargas y la densidad del campo eléctrico y que constituye una de las leyes fundamentales del electromagnetismo. Esta ley es de gran importancia para entender campos vectoriales y, en particular, los campos eléctricos. En cierta forma, esta ley es mucho más poderosa que la ley de Coulomb y proporciona un método muy poderoso para la solución de problemas electrostáticos de naturaleza simétrica.

El flujo eléctrico total que atraviesa cualquier *superficie cerrada* es igual a la carga total encerrada por esa superficie.

Considérese una distribución de carga rodeada por una superficie cerrada que tiene cualquier forma. Si la carga total es *Q*, entonces *Q* culombios de flujo eléctrico pasarán a través de la superficie que cubre a *Q*. En cada punto de la superficie, la densidad de flujo eléctrico **D** tendrá algún valor que, en general, variará en magnitud y dirección.

Si nos concentramos en un elemento incremental de la superficie de área ΔS , el cual se puede considerar plano (en el límite), para representarlo se requiere no sólo su magnitud sino también su dirección en el espacio; es decir, el elemento de área es un vector. La dirección asociada con ΔS es la de la normal saliente del volumen en el punto en cuestión.

José R. Morón

En cualquier punto *P*, considere un elemento ΔS de la superficie y suponga que **D** forma un ángulo θ con Δ **S**, como muestra la Fig. 2.20. El flujo que cruza ΔS es entonces el producto de la componente normal de **D** y ΔS , es decir,

 $\Delta \Phi_e$ = flujo que atraviesa $\Delta S = D_{\text{normal}} \Delta S = D \cos \theta \Delta S = \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S}$

y el flujo total que atraviesa la superficie cerrada se obtiene sumando las contribuciones diferenciales que cruzan cada elemento de superficie ΔS ,





La integración se calcula para la superficie cerrada *S* que encierra al volumen, y que se conoce como una *superficie gaussiana*. Se tiene entonces la formulación matemática de la ley de Gauss como

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \text{carga encerrada} = Q_{\text{enc}}$$
(2.39)

La carga total encerrada podría ser el resultado varias cargas puntuales, en cuyo caso

$$Q_{\rm enc} = \sum_k Q_k$$

sumada sobre todas las cargas o de una línea de carga con densidad ρ_{ℓ} (C/m); entonces

$$Q_{\rm enc} = \int_L \rho_\ell d\ell$$

o una carga superficial ρ_s (C/m²),

$$Q_{\rm enc} = \int_{S} \rho_s dS$$

donde la superficie *S* no es necesariamente cerrada, o también se puede tener una distribución de carga de volumen ρ_v (C/m³),

$$Q_{\rm enc} = \int_c \rho_v dv$$

Para esta última distribución, la Ec. (2.39) se escribe como

$$Q_{\rm enc} = \oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{v} \rho_{v} dv$$
(2.40)

que es la forma usada normalmente y, por convención, representa todas las otras formas. (*v* es el volumen delimitado por la superficie *S*.)

Aquí se debe señalar que en cualquiera de las formas indicadas para la ley de Gauss, especialmente la dada por la Ec. (2.40), la superficie *S* es arbitraria; la Ec. (2.40) *aplica a cualquier superficie cerrada*, aun cuando ella sea una superficie imaginaria introducida con el objeto de tomar beneficios de la relación.

Aplicando el teorema de la divergencia al término del medio en la Ec. (2.40) se obtiene

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{v} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \tag{2.41}$$

Comparando ahora las dos integrales de volumen en las Ecs. (2.40) y (2.41) resulta en la ecuación diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}_{v} \tag{2.42}$$

que es la forma puntual de la ley de Gauss y constituye la *primera* de las cuatro *ecuaciones de Maxwell*. La Ec. (2.42) establece que la densidad volumétrica de carga es la misma que la divergencia de la densidad de flujo eléctrico. Esta forma de la ley de Gauss aplica sólo cuando la densidad ρ_v es una función continua y finita en el espacio.

Aquí se pueden hacer las siguientes observaciones:

- **1.** Las Ecs. (2.41) y (2.42) expresan la ley de Gauss en dos formas diferentes: forma integral y forma puntual, respectivamente.
- 2. La ley de Gauss es un *enunciado alterno* de la ley de Coulomb; la aplicación correcta del teorema de la divergencia a la ley de Coulomb resulta en la ley de Gauss.
- **3.** La ley de Gauss proporciona una forma sencilla y útil de calcular **E** o **D** para distribuciones de cargas simétricas como, por ejemplo, una carga puntual, una línea de carga infinita, una carga superficial cilíndrica infinita o una distribución esférica de carga. Una distribución de carga continua tiene simetría rectangular si depende sólo de *x* (o de *y*, o de *z*); tiene simetría cilíndrica si depende solamente de ρ , y simetría esférica sólo de *r* (independiente de θ y ϕ).

Se debe enfatizar que si la distribución es simétrica o no, la ley de Gauss siempre se cumple. Por ejemplo, considere la distribución de carga en la Fig. 2.21, donde v_1 y v_2 son superficies cerradas. El flujo total que sale de v_1 es (10 – 5) nC, ya que esas dos cargas son las únicas encerradas por v_1 . Aunque las cargas de 20 nC y 15 nC fuera de v_1 contribuyen al flujo que cruza v_1 , el flujo neto que atraviesa esta superficie, según la ley de Gauss, no tiene nada que ver con las cargas externas a v_1 . Así vemos que la ley de Gauss $\Psi = Q_{enc}$ todavía se cumple aunque la distribución no sea simétrica. No obstante, no es posible usar la ley para determinar **E** o **D** cuando la distribución de carga no es simétrica; en ese caso debemos recurrir a la ley de Coulomb para determinar **E** o **D**.



Figura 2.21

Se debe recalcar el hecho de que la ley de Gauss es *válida para cualquier campo eléctrico* – hasta para aquellos que dependen del tiempo. Ésta es la razón por la cual la ley de Gauss se puede considerar aún más fundamental que la ley de Coulomb.

Para ilustrar la aplicación de la ley de Gauss, considérese una carga puntual *Q* en el origen de un sistema esférico de coordenadas (Fig. 2.22). Como superficie gaussiana (definida más adelante) se escoge una esfera de radio *a* centrada en la carga. La intensidad de campo eléctrico producido por la carga puntual es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

y como $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ se tiene, igual que antes, que

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \,\hat{\mathbf{a}}_r$$

En la superficie de la esfera,


Figura 2.22

El elemento diferencial de superficie en coordenadas esféricas es

 $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

0

 $d\mathbf{S} = a^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{a}}_r$

El integrando en la Ec. (2.41) es entonces

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin\theta d\theta d\phi \,\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_r$$
$$= \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

lo que conduce a la integral

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{Q}{4\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{Q}{4\pi} (2\pi) (-\cos\theta) \Big|_{0}^{\pi} = Q$$

y se obtiene el resultado que muestra que *Q* culombios de flujo eléctrico cruzan la superficie, como debe ser, puesto que la carga total encerrada es de *Q* culombios.

2.8 Aplicaciones de la Ley de Gauss

Considérese ahora la ley de Gauss como herramienta para determinar la densidad de flujo eléctrico **D** cuando se conoce la distribución de carga. El procedimiento involucra determinar primero si existe simetría. La premisa esencial de un argumento de simetría es que el campo establecido por alguna fuente debe exhibir las mismas simetrías exhibidas por la misma fuente. Si, por ejemplo, la fuente es invariante a la rotación en torno a algún eje, el campo resultante debe ser invariante a la misma transformación. De manera que cualquier simetría de la fuente constituye una restricción para el campo. Si estas simetrías son lo suficientemente extensas, el campo estará suficientemente restringido y la ley de Gauss es adecuada para determinar aquellas propiedades del campo que no son completamente fijadas por las simetrías.

Una vez que se determina que existe una distribución de carga simétrica, se construye entonces una superficie hipotética cerrada definida matemáticamente (conocida como *superficie gaussiana*). Mediante la selección de la superficie gaussiana, la integral de superficie puede simplificarse bastante y reducirse a ecuación algebraica sencilla. Esta superficie se escoge de manera que **D** sea normal o tangencial a ella. Cuando **D** es normal a la superficie, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_s dS$ y D_s (el valor de D en la superficie) es constante. Cuando **D** es tangencial a la superficie, entonces $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$. De modo que se debe seleccionar una superficie que tenga alguna simetría como la exhibida por la distribución de carga.

Sólo el conocimiento de la simetría del problema permite la elección de la superficie gaussiana, y ese conocimiento se obtiene con facilidad si se recuerda siempre que la intensidad de campo eléctrico producido por una carga puntual está dirigida radialmente hacia fuera alejándose de la carga.

Ejemplo 14. Suponga una carga puntual Q localizada en el origen de un sistema de coordenadas. Para determinar D en un punto P, es fácil ver que si se elige una superficie esférica que tenga a P como su centro se cumplirá con las condiciones de simetría. Entonces una superficie esférica centrada en el origen es la superficie gaussiana en este caso y se muestra en la Fig. 2.23.



Figura 2.23

Puesto que **D** es normal en todas partes a la superficie gaussiana (esférica), es decir, $\mathbf{D} = D_r \hat{\mathbf{a}}_r$, la aplicación de la ley de Gauss da

$$Q = \oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{r} \oint_{S} dS$$
$$= D_{r} 4\pi r^{2}$$

de manera que

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

como se esperaba.

Ejemplo 15. Supóngase una línea infinita con densidad de carga uniforme ρ_{ℓ} (C/m) colocada en el eje z. Para determinar el campo D, se escoge una superficie cilíndrica que contiene a P para satisfacer la condición de simetría, como muestra la Fig. 2.24.

ρ

'n

Figura 2.24

Este ejemplo se usará para ilustrar con cierto detalle el enfoque basado en la simetría y la aplicación de la ley de Gauss.

Para la línea de carga infinita de la Fig. 2.24, el campo D más general tiene la forma

Superficie gaussiana

 $\mathbf{D} = D_{\mathbf{o}} (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, z) \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{o}} + D_{\boldsymbol{\phi}} (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, z) \hat{\mathbf{a}}_{\boldsymbol{\phi}} + D_{z} (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, z) \hat{\mathbf{a}}_{z}$



Sin embargo, la distribución de la fuente es invariable a una rotación con respecto al eje z y el campo también exhibirá esta condición sólo si D_{ρ} , D_{ϕ} y D_z son independientes de ϕ . Además, la distribución de la fuente no varía con una traslación a lo largo del eje z y el campo sólo exhibe esta invariabilidad sólo si D_{ρ} , D_{ϕ} y D_z son independientes de z. De manera que el campo más general consistente con estas dos simetrías es entonces

$$\mathbf{D} = D_{\rho}(\rho)\hat{\mathbf{a}}_{\rho} + D_{\phi}(\rho)\hat{\mathbf{a}}_{\phi} + D_{z}(\rho)\hat{\mathbf{a}}_{z}$$
(2.43)

Pero la distribución de la fuente también es invariable a una reflexión en el plano *xy*, bajo cuya transformación $z \rightarrow -z \ y \ \hat{\mathbf{a}}_z \rightarrow -\hat{\mathbf{a}}_z$; la ecuación anterior no varía con esta transformación solamente si $D_z = 0$. Finalmente, la distribución de la fuente es invariable a una reflexión en el plano *xz*, bajo cuya transformación $\phi \rightarrow -\phi$, $\hat{\mathbf{a}}_y \rightarrow -\hat{\mathbf{a}}_y \ y$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\rho} = \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{x} + \sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{y} \rightarrow \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{x} + \sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{y} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$
$$\hat{\mathbf{a}}_{\phi} = -\sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{x} + \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{y} \rightarrow \sin\phi \hat{\mathbf{a}}_{x} - \cos\phi \hat{\mathbf{a}}_{y} = -\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

pero no hay otros cambios. La Ec. (2.43) es consistente con esta invariabilidad sólo si $D_{\phi} = 0$. De modo que las simetrías de la distribución de la fuente restringen el campo a no ser más complicado que

$$\mathbf{D} = D_{\rho}(\rho)\hat{\mathbf{a}}_{\rho} \tag{2.44}$$

Ahora se usa la ley de Gauss para determinar D_{ρ} . Aunque la ley aplica a cualquier superficie cerrada, las superficies más útiles son aquellas que se aprovechan de algunas simetrías de la fuente. La superficie apropiada para este problema es una cilíndrica. La densidad de flujo eléctrico **D** es constante en la superficie lateral del cilindro y normal a ella; es decir, $\mathbf{D} = D_{\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$. Si se aplica la ley de Gauss a una longitud arbitraria de la línea, se tiene que

$$\rho_{\ell} \ell = Q = \oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{\rho} \oint_{S} dS$$
$$= D_{\rho} 2\pi\rho\ell$$

Observe que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ en las superficies superior e inferior del cilindro, ya que \mathbf{D} no tiene componente en *z*. Así pues,

 $\mathbf{D} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$

у

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

igual al resultado dado por la Ec. (2.25).

Ejemplo 16. Considérese ahora el problema del cable coaxial que es casi idéntico al de la línea infinita de carga. Suponga que se tiene dos conductores cilíndricos coaxiales, el interno de radio *a* y el externo de radio *n*, cada uno de longitud infinita (Fig. 2.25). Se supondrá una distribución de carga ρ_s en la superficie externa del conductor interno. Se desea evaluar la densidad de campo eléctrico entre los conductores.



Figura 2.25

Solución: Consideraciones de simetría muestran que sólo está presente la componente D_{ρ} y que ella debe ser función de la coordenada radial ρ solamente. De manera que se elige un cilindro circular recto de longitud *L* y radio ρ como superficie gaussiana, donde *a* < ρ < *b*, y se obtiene

$$Q = D_{\rho} 2\pi\rho L$$

La carga total en una longitud *L* del cilindro interno es

$$Q = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_s a \, d\phi \, d\rho = 2\pi a L \rho_s$$

y por tanto

$$D_{\rho} = \frac{a\rho_s}{\rho}$$
 y $\mathbf{D} = \frac{a\rho_s}{\rho}\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$

Si se toma $\rho_{\ell} = 2\pi a \rho_s$ (carga por unidad de longitud), entonces

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

la cual tiene la misma forma que la de la línea infinita.

Ejemplo 17. Dos alambres rectos no conductores, paralelos al eje *z*, pasan por los puntos *O* y *A*, como muestra la Fig. 2.26. Los alambres tienen densidades de cargas uniformes e iguales de 0.4 μ C/m. Determínese el campo **E** en el punto *P*.



Solución: La magnitud del campo E debida a cualquiera de los líneas de carga es $|E| = \rho_{\ell}/(2\pi\epsilon_0 r)$. El campo E resultante es entonces

$$\mathbf{E}_{r} = 2 \left| \mathbf{E} \right| \cos 45^{\circ} = 1 \frac{0.4 \times 10^{-6}}{2\pi (10^{-9}/36\pi) (4\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{a}}_{y} = 1800 \hat{\mathbf{a}}_{y} \quad \text{V/m}$$

Ejemplo 18. Considérese una lámina infinita con carga uniforme igual a ρ_s colocada en el plano z = 0. Para determinar **D** en un punto *P*, escogemos una pequeña caja cilíndrica, la cual es cortada en su parte media por la lámina de carga y tiene dos de sus caras paralelas a la lámina, como muestra la Fig. 2.27.



Figura 2.27. Condiciones de frontera.

Solución: Puesto que **D** es normal a la lámina, $\mathbf{D} = D_z \hat{\mathbf{a}}_z$ y la aplicación de la ley de Gauss da

$$\rho_s \int_S dS = Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\sup} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\inf} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\operatorname{lat}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

El producto $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ en la cara lateral ya que \mathbf{D} no tiene componente en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_{z}$. Por tanto,

$$\rho_{s} A = D_{n} \left[\int_{\sup} dS + \int_{\inf} dS \right]$$
$$= D_{n} (A + A)$$

donde D_n es la componente de **D** normal a la lámina. Entonces, $D_n = \rho_s/2$ y

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{\rho}_s}{2} \hat{\mathbf{a}}_z$$

También,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{\rho}_s}{2\mathbf{\varepsilon}_0} \,\hat{\mathbf{a}}_z$$

igual que la Ec. (2.28).

Ejemplo 19. Considere una esfera de radio *a* con una densidad de carga de volumen ρ_v (C/m³). Para determinar **D** en todas partes, se construyen superficies gaussianas para los casos $r \le a$ y $r \ge a$ por separado (véase la Fig. 2.28). Como la carga tiene simetría esférica, es obvio que una superficie esférica es la superficie gaussiana apropiada.



Solución: Para $r \le a$, la carga total encerrada por la superficie esférica de radio r, como muestra la Fig. 2.28a es

$$Q_{\rm enc} = \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3$$

y

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \oint_S dS = D_n \, 4\pi r^2$$

y la relación $Q_{enc} = \Phi da$

$$\rho_v \frac{4}{3}\pi r^3 = D_n 4\pi r^2$$

de modo que

$$D_n = \frac{\rho_v r}{3} \implies \mathbf{D} = \frac{\rho_v r}{3} \hat{\mathbf{a}}_r$$
 (2.45)

Para $r \ge a$, la superficie gaussiana se muestra en la Fig. 2.28*b*, y la carga encerrada en esa superficie es toda la carga en la esfera, es decir,

$$Q_{\rm enc} = \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3$$

en tanto que

José R. Morón

 $\Phi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \oint_S dS = D_n \, 4\pi r^2$

por consiguiente.

$$D_{n} 4\pi r^{2} = \rho_{v} \frac{4}{3}\pi a^{3} \quad \text{o} \quad D_{n} = \frac{\rho_{v} a^{3}}{3r^{2}}$$
$$\mathbf{D} = \frac{\rho_{v} a^{3}}{3r^{2}} \hat{\mathbf{a}}_{r} \tag{2.46}$$

y entonces se obtiene

Las Ecs. (2.45) y (2.46) dan entonces la densidad de campo D en todas partes como

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\rho}_v r}{3} \hat{\mathbf{a}}_r & 0 < r \le a \\ \frac{\boldsymbol{\rho}_v a^3}{3r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r \ge a \end{cases}$$
(2.47)

La Fig. 2.29 muestra una gráfica de $|\mathbf{D}|$ en función de la distancia radial *r*.



Figura 2.29

Ejemplo 20. Dado que $\mathbf{D} = z\rho \cos^2 \phi \hat{\mathbf{a}}_z \ C/m^2$, determinar la densidad de carga en $(1, \pi/4, 3)$ y la carga total encerrada por el cilindro de radio 1 m con $-a \le z \le a$.

Solución: Se sabe que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ y, en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho D_{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

En este caso, $D_{\rho} = 0$, $D_{\phi} = 0$ y, por tanto,

$$\rho_v = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \cos^2 \phi$$

En $(1, \pi/4, 3)$, $\rho_v = (1)\cos^2(\pi/4) = 0.5 \text{ C/m}^3$.

Una forma de hallar la carga encerrada en el cilindro se basa directamente en la definición de la carga de volumen total:

$$Q = \Phi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Esta parte se deja como ejercicio.

Ejemplo 21. Considere un haz de electrones cilíndrico como el mostrado en la Fig. 2.30. Los electrones tienen una densidad de carga $\rho_v = \rho_0 \left(1 + \rho^2/d^2\right) C/m^3$. Determinar **E** para $\rho < d \neq \rho > d$.

Solución. Aquí se tiene simetría cilíndrica (se supone un cilindro de longitud infinita), de manera que el campo es radial. Por el teorema de Gauss, para una longitud *L* del cilindro, se sabe que





Figura 2.30

Cuando $\rho < d$,

у

0

Cuando $\rho > d$

y, por tanto,

$$D_{\rho} = \frac{\rho_0}{2} \left(\rho + \frac{\rho^3}{2d^2} \right) \implies E_{\rho} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(\rho + \frac{\rho^3}{2d^2} \right)$$

 $\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_0 \pi L \left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{2d^2} \right)$

 $D_{\rho}(2\pi\rho L) = \rho_0 \pi L \left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{2r^2}\right)$

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_0 \pi L \left(\rho^2 + \frac{d^2}{2d^2} \right) = \rho_0 \pi L \left(\frac{3}{d} d^2 \right)$$

$$D_{\rho} = \frac{3\rho_0 d^2}{4\rho} \quad \Rightarrow \quad E_{\rho} = \frac{3\rho_0 d^2}{4\epsilon_0 \rho}$$

2.9 El Potencial Eléctrico

De lo estudiado en secciones anteriores, es posible determinar directamente la intensidad de campo eléctrico E producido por una distribución de carga a partir de la ley de Coulomb en general, o, cuando la distribución de carga es simétrica, a partir de la ley de Gauss. Otra forma de obtener E es a partir del potencial escalar eléctrico V, el cual se definirá en esta sección. En cierta forma, esta manera de describir y calcular el campo E es más sencilla debido a que es más fácil trabajar con escalares que con vectores.

Para entender el concepto del potencial eléctrico escalar, supóngase que se quiere mover una carga puntual Q desde un punto A hasta un punto B, a velocidad constante, en un campo eléctrico E como muestra la Fig. 2.31. Por la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica sobre Q es F = QE, de modo que el *trabajo realizado* al desplazar la carga una distancia $d\ell$ en la trayectoria es

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -Q\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{2.48}$$

Es importante señalar que el signo negativo produce un valor positivo para dW e indica que el trabajo está siendo realizado por un agente externo *contra* el campo y este trabajo aparece como energía potencial almacenada en el sistema formado por la carga Q y lo que sea que produce el campo E. Mientras la atención esté dirigida hacia la carga Q, el resto del sistema permanece fijo, se acostumbra asignar esta energía a la Q en vez del sistema como un todo. Se supone que la carga Q es tan pequeña que no perturba el campo en una forma apreciable. Así que el trabajo total realizado, o la energía potencial requerida, para mover Q desde A hasta B, es



Aunque el trabajo realizado es un escalar, el mismo involucra un sentido de dirección: un valor positivo de *W* representa el trabajo realizado por una fuerza externa, en tanto que un valor negativo de *W* representa el trabajo realizado por el campo eléctrico.

Si se divide *W* por *Q* en la Ec. (2.49), se obtiene la energía potencial por unidad de carga. Esta cantidad, denotada por V_{AB} , se conoce como la *diferencia de potencial* entre los puntos *A* y *B*. Es el trabajo *por unidad de carga positiva* que un agente externo realiza al mover, sin cambiar la velocidad, una carga desde *A* hasta *B*. Entonces,

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$
(2.50)

cuya unidad es el voltio (V).

Observe que

- **1.** En la determinación de V_{AB} , A es el punto inicial y B es el punto final. y V_{AB} no depende de Q.
- 2. Si V_{AB} es negativo, hay una pérdida de energía potencial al mover Q desde A hasta B; esto implica que el trabajo está siendo realizado por el campo. No obstante, si V_{AB} es positivo, hay una ganancia en energía potencial en el movimiento; un campo externo realiza el trabajo.
- 3. *V*_{AB} es independiente de la trayectoria recorrida (esto se demostrará más adelante).
- **4.** La unidad de V_{AB} es julios por culombio, unidad comúnmente conocida como voltios (V).

Se puede mostrar la definición en la Ec. (2.50), determinando la diferencia de potencial entre dos puntos A y B situados a distancias radiales r_A y r_B de una carga puntual. Escogiendo un origen en Q, el campo establecido por la carga puntual estacionaria es

$$\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

у

$$d\ell = dr\hat{\mathbf{a}}_r$$

Por tanto,

$$V_{AB} = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_{r_{A}}^{r_{B}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{1}{r_{B}} - \frac{1}{r_{A}}\right)$$
(2.51)

Si $r_A > r_B$, la diferencia de potencial V_{AB} es positiva, indicando que una fuente externa utiliza energía para llevar la carga positiva desde r_A hasta r_B . Esto coincide con la imagen física que muestra las dos cargas iguales repeliéndose.

Con frecuencia conviene hablar del *potencial*, o *potencial absoluto*, de un punto, en vez de la diferencia de potencial entre dos puntos, pero esto sólo significa que *se acepta medir toda diferencia de potencial con respecto a un punto de referencia especificado*, el cual consideramos está a potencial cero. Se debe tener una convención común sobre la referencia cero para que una afirmación sobre el potencial tenga algún significado. Quizás el punto de referencia cero más universal en mediciones experimentales o físicas es "tierra", por el cual se entiende el potencial de la región superficial de la tierra misma. Teóricamente, esta superficie se representa normalmente por un plano infinito con potencial cero, aunque algunos problemas de gran escala, como aquellos que involucran propagación sobre océanos, requieren una superficie esférica con potencial cero. Si la distribución de carga que crea el campo eléctrico está localizada en alguna región finita, usualmente los puntos "en infinito" se especifican con un potencial de valor cero, es decir, $V(\infty) = 0$. Entonces

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$
(2.52)

Si el potencial en el punto A es V_A y en el punto B es V_B , entonces

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\infty}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(2.53)

donde necesariamente acordamos que V_A y V_B tienen el mismo punto de referencia cero.

2.10 El Potencial Escalar de una Distribución de Carga

El potencial eléctrico de un punto, referido a infinito (referencia), a una distancia r de una carga puntual Q es dado por

$$V = -\int_{-\infty}^{r} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{a}}_r\right) \cdot (\hat{\mathbf{a}}_r dr)$$
(2.54)

0

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
(2.55)

Ésta es una cantidad escalar y depende, además de Q, sólo de la distancia r. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera P_2 y P_1 a distancias r_2 y r_1 , respectivamente, de Q es

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$
(2.56)

Este resultado puede parecer sorprendente a primera vista, ya que P_2 y P_1 pueden no estar en la misma línea radial a través de Q, como lo ilustra la Fig. 2.32(a). No obstante, los círculos concéntricos (realmente esferas) que pasan a través de P_2 y P_1 son líneas (superficies) con el mismo potencial (están a la misma distancia de Q) y $V_{P_2} - V_{P_1}$ es lo mismo que $V_{P_2} - V_{P_3}$. Desde el punto de vista de la Ec. (2.50) se puede escoger la trayectoria de integración desde P_1 hasta P_3 y entonces desde P_3 hasta P_2 . Desde P_1 hasta P_3 no se realiza trabajo porque **E** es perpendicular a $d\boldsymbol{\ell} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} r_1 d\phi$ a lo largo de la trayectoria circular ($\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$).

El hecho de que la diferencia de potencial sea diferente de la trayectoria de integración tiene un significado fundamental. Suponga que lo contrario fuese cierto. En la Fig. 2.32(b), por ejemplo, supóngase que se requiere menos trabajo para mover una carga de prueba desde *A* hasta *B* por la trayectoria I que por la II. Como una inversión de la dirección en una trayectoria resulta solamente en un cambio de signo del trabajo que realiza el agente externo, la carga podría moverse desde *A* hasta *B* por lo trayectoria I y regresada desde *B* hasta *A* por la trayectoria II, con una ganancia neta en trabajo, aunque el sistema, al final de la operación, no ha cambiado con

respecto a lo que era al comienzo. Entonces deberíamos estar obteniendo energía del sistema sin ningún cambio en el propio sistema. Claramente, este proceso cíclico podría repetirse tanto como se desee y tendríamos una atractiva violación de la ley de conservación de la energía.



Figura 2.32

Un método conveniente para expresar el potencial sin seleccionar una referencia cero específica, implica identificar r_1 con r y tomar $Q/(4\pi\epsilon_0 r_2)$ como una constante. Entonces, por integración se obtiene

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C \tag{2.57}$$

y la constante de integración *C* puede elegirse de manera que V = 0 para cualquier valor deseado de *r*. También se podría seleccionar la referencia cero indirectamente haciendo $V = V_0$ en $r = r_0$. Se debe señalar que la *diferencia de potencial* entre dos puntos *no es una función de C*.

En este punto se define una *superficie equipotencial* como una superficie compuesta de todos los puntos que tienen el mismo valor de potencial. Al mover una carga unitaria alrededor de una superficie equipotencial no se realiza trabajo ya que, por definición, no hay diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en esta superficie. Las superficies equipotenciales de una carga puntual son esferas centradas en la carga.

Si la carga puntual Q en la Ec. (2.55) no está situada en el origen de un sistema de coordenadas sino en un punto cuyo vector de posición es **r**', la relación para el potencial V(x, y, z), o simplemente $V(\mathbf{r})$, en **r** se escribe como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(2.58)

Se ha considerado el potencial eléctrico debido a una carga puntual. Las mismas ideas básicas aplican a otros tipos de distribuciones de cargas porque cualquier distribución siempre puede considerarse como formada por cargas puntuales. El principio de superposición, el cual se aplicó a los campos eléctricos, también es aplicable a potenciales. Para *n* cargas puntuales $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ ubicadas en puntos con vectores de posición **r**₁, **r**₂, ..., **r**_n, el potencial en **r** es

V

$$(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}$$
(2.59)

0

Una vez conocido el potencial de una carga puntual, es muy sencillo determinar el potencial de una distribución de carga dada. Para distribuciones de carga continuas, se reemplaza Q_k en la Ec. (2.59) con el elemento de carga diferencial $\rho_t d\ell$, $\rho_s dS$ o $\rho_v dv$, y la sumatoria se convierte en integración, de manera que el potencial en **r** es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L} \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga lineal)}$$
(2.60)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S} \frac{\rho_s(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga de superficie)}$$
(2.61)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{v} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(carga de volumen)}$$
(2.62)

donde se sigue la convención de que las coordenadas con tildes se usan para denotar la ubicación de los puntos de las fuentes y las coordenadas sin tildes se refieren a puntos del campo (puntos donde *V* se va a determinar). En las ecuaciones anteriores, el punto de referencia cero se toma en infinito.

Ejemplo 22. Dos cargas puntuales de $-4 \ \mu C \ y \ 5 \ \mu C$ están situadas en (2, -1, 3) y (0, 4, -2), respectivamente. Determinar el potencial en (1, 0, 1), suponiendo que el potencial en infinito (referencia) es cero.

Solución: Sean $Q_1 = -4 \mu C y Q_2 = 5 \mu C$. Entonces

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

у

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\langle 1.0, 1 \rangle - \langle 2, -1, 3 \rangle| = |\langle -1, 1, -2 \rangle| = \sqrt{6}$$

 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |\langle 1.0, 1 \rangle - \langle 0, 4, -2 \rangle| = |\langle 1, -4, 3 \rangle| = \sqrt{26}$

Por tanto,

$$V(1,0,1) = \frac{10^{-6}}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left(\frac{-4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = 9 \times 10^3 \left(-1.633 + 0 - 9806\right)$$
$$= -5.872 \text{ kV}$$

Ejemplo 23. Una carga puntual de $40\pi/3$ nC está distribuida uniformemente en la forma de un disco circular de radio 2 m. Hallar el potencial debido a esta carga en un punto sobre el eje, a 2 m del disco. Compárese este potencial con que resultaría si toda la carga estuviese en el centro del disco.

Solución: Usando la Fig. 2.33, se tiene que la densidad de carga superficial es

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{40}{3}\pi \times 10^{-9}}{\pi (2)^2} = \frac{10^{-8}}{3} \text{ C/m}^2$$

También, $R = \sqrt{4 + r^2}$ y

$$V = \frac{30}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r \, dr \, d\phi}{\sqrt{4 + r^2}} = 49.7 \text{ V}$$



Figura 2.33

Con toda la carga concentrada en el centro del disco, se aplica ahora la expresión para el potencial de una carga puntual, para obtener

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{\frac{40}{3} \times 10^{-9}}{4\pi (10^{-9}/36\pi)^2} = 60 \text{ V}$$

Ejemplo 24. Se quiere calcular el potencial en el eje de un anillo delgado de radio *R*, cargado uniformemente con una densidad de carga lineal $\rho_{\ell} = Q/(2\pi R)$, donde *Q* es la carga total en el anillo (Fig. 2.34).





Solución: El elemento $d\ell$ del anillo tiene una carga

$$dQ = \rho_{\ell} d\ell = \frac{Q}{2\pi R} d\ell$$

El potencial debido a esta carga es el mismo que el de una carga puntual, excepto que ahora la carga es dQ. El potencial en el punto P en el eje del anillo se obtiene entonces como

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{Q}{2\pi R} \frac{d\ell}{r} = \frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr} \int_{\text{anillo}} d\ell$$

Puesto que la integral de $d\ell$ alrededor del anillo es igual a su circunferencia, $2\pi R$, finalmente se obtiene

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

2.11 Relación entre E y V

es decir, $V_{BA} + V_{AB} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$, o

Como se demostró en la sección anterior, la diferencia de potencial entre dos puntos *A* y *B* es independiente de la trayectoria usada para calcularla. Por tanto,

$$V_{AB} = -V_{BA}$$

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$
(2.63)

Esto muestra que la integral de línea de E a lo largo de una trayectoria cerrada *C* como se muestra en la Fig. 2.35 debe ser cero. Físicamente, esto implica que no se realiza trabajo al mover una carga a lo largo de una trayectoria cerrada en un campo estático. Como la Ec. (2.63) se basa en la ley de conservación de energía, esta ecuación es una de las relaciones fundamentales para el campo eléctrico estático. Si ahora se aplica el teorema de Stokes a la Ec. (2.63), se obtiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

y, como la superficie *S* con contorno *C* es arbitraria, se tiene que el integrando debe ser igual a cero en todo punto de *S*, o



Figura 2.35

Cualquier campo vectorial que satisfaga la Ec. (2.63) o (2.64) se denomina *conservativo* o *irrotacional*. En otras palabras, los campos vectoriales cuyas integrales de línea no dependen de la trayectoria de integración se conocen como campos conservativos. Así pues, *un campo electrostático es conservativo*. Esta propiedad importante es una consecuencia de que la fuerza de Coulomb es una fuerza central: la fuerza en el campo de una carga puntual es radial. La Ec. (2.63) o la Ec. (2.64) es la *segunda ecuación de Maxwell* para campos eléctricos estáticos; ambas ecuaciones muestran la naturaleza conservativa de un campo electrostático.

Ya se conoce la relación integral entre las cantidades E y V, es decir, se sabe que

$$V = -\int_{L} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{2.65}$$

(2.64)

pero esta relación es mucho más fácil de usar en la dirección contraria; es decir, dado el potencial V hallar E.

Si se aplica la Ec. (2.65) a un elemento muy corto de longitud $\Delta \ell$ en el cual E se puede considerar esencialmente constante, se obtiene un incremento en la diferencia de potencial ΔV , el cual es dado por

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta \boldsymbol{\ell} \tag{2.66}$$

Veamos primero si se puede obtener nueva información sobre la relación entre **E** y *V* a partir de esta ecuación. Considérese una región general del espacio en la cual ambos **E** y *V* cambian al pasar de un punto a otro. La Ec. (2.66) dice (producto escalar) que se escoja un elemento vectorial de longitud $\Delta \ell = \Delta \ell \hat{a}_{\ell}$ y se multiplique su magnitud por la componente de **E** en la dirección de \hat{a}_{ℓ} para obtener la pequeña diferencia de potencial entre los dos extremos de $\Delta \ell$.

Si se denota el ángulo entre $\Delta \ell$ y **E** como θ , entonces

$$\Delta V = -E\Delta\ell\cos\theta$$

Ahora se quiere pasar al límite y considerar la derivada $dV/d\ell$. Para hacer esto, se necesita demostrar que *V* es una función de la posición. Puesto que el campo **E** es conservativo, el resultado de la integración en (2.65) sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria, y si se toma el punto inicial como referencia, entonces *V* será una función unívoca del punto final **r**, de manera que se puede pasar al límite y obtener

$$\frac{dV}{d\ell} = -E\cos\theta$$

La pregunta ahora es ¿en qué dirección se debe colocar $\Delta \ell$ para obtener un valor máximo de ΔV ? Recuerde que E tiene un valor definido en el punto en el cual se está trabajando y es totalmente independiente de $\Delta \ell$. La magnitud $\Delta \ell$ también es constante y la variable es \hat{a}_{ℓ} , en la dirección de $\Delta \ell$. Es claro que el máximo incremento positivo del potencial, $\Delta V_{\text{máx}}$, ocurrirá cuando $\cos \theta = -1$, es decir, cuando $\Delta \ell$ apunta en la dirección opuesta a la de E. Para esta condición,

$$\left. \frac{dV}{d\ell} \right|_{\text{máx}} = E$$

Lo anterior muestra que la magnitud de la intensidad de campo eléctrico se obtiene a partir del valor máximo del ritmo de cambio del potencial con la distancia, y que el valor máximo se obtiene cuando la dirección del incremento de la distancia es opuesta a la de E o, en otras palabras, la dirección de E es *opuesta* a la dirección en la cual el potencial está *creciendo* más rápidamente. Parece posible que la dirección en la cual el potencial está creciendo más rápidamente sea perpendicular a las superficies equipotenciales (en la dirección *creciente* del potencial), y esto es correcto ya que si $\Delta \ell$ está dirigido a lo largo de una superficie equipotencial, el incremento $\Delta V = 0$ por la definición misma de esas superficies. Pero entonces

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

y como ni E ni $\Delta \ell$ son cero, E debe ser perpendicular a este incremento $\Delta \ell$ o perpendicular a los equipotenciales.

Como se tiene la posibilidad de determinar primero información sobre el campo de potencial, se describirá matemáticamente la dirección de Δl que conduce a un máximo incremento en el potencial en términos del potencial en vez de la intensidad de campo eléctrico. Si se denota por \hat{a}_n el vector normal unitario a la superficie equipotencial dirigido hacia los potenciales más altos, la intensidad de campo eléctrico se puede expresar entonces en función del potencial como

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{d\ell} \bigg|_{\text{máx}} \hat{\mathbf{a}}_n \tag{2.67}$$

la cual muestra que la magnitud de E la da la máxima tasa de cambio espacial de *V* y la dirección de E es *normal* a la superficie equipotencial (en la dirección de potencial *decreciente*).

Puesto que $dV/d\ell \Big|_{max}$ ocurre cuando $\Delta \ell$ está en la dirección de $\hat{\mathbf{a}}_n$, esto se puede indicar escribiendo

$$\frac{dV}{d\ell}\Big|_{máx} = \frac{dV}{dn}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dn}\hat{\mathbf{a}}_n \tag{2.68}$$

У

donde dV/dn es la derivada de V en la dirección de la normal. La operación por la cual se obtiene –**E** a partir de V es el *gradiente* (ya definido en el Cap. 1). Usando esta operación, ahora se puede escribir la relación entre V y **E** como

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V \tag{2.69}$$

El *campo eléctrico estático es igual al negativo del gradiente del potencial eléctrico*. La Ec. (2.69) permite obtener E si primero se calcula el potencial *V* de una distribución de carga y después se toma el negativo del gradiente de *V*.

Puesto que *V* es una función unívoca de la posición, se puede tomar el diferencial total (en coordenadas cartesianas) y escribir

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

También se tiene que

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

y al comparar estas dos ecuaciones, se obtiene entonces que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

lo que puede escribirse vectorialmente como

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z\right)$$
(2.70)

El *potencial eléctrico* V(x, y, z) describe el campo completamente. El signo negativo indica que E apunta hacia la dirección de *máxima disminución* en *V*. Observe que *V* no está definido en forma única. De hecho, a *V* se le puede añadir cualquier cantidad que sea independiente de las coordenadas sin afectar a E.

La relación $\mathbf{E} = -\nabla V$ implica de inmediato que las *superficies de potencial constante* dadas por $V(\mathbf{r})$ = constante, son perpendiculares a \mathbf{E} en todo punto, es decir, son *superficies equipotenciales*.

Ejemplo 25. Dado el campo de potencial $V = 2x^2y - 5z$ y un punto P(-4, 3, 6), se quiere determinar la intensidad de campo eléctrico **E**, la dirección de **E**, la densidad de flujo eléctrico **D** y la densidad volumétrica de carga ρ_v .

Solución: El potencial en P(-4, 3, 6) es

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$$

Ahora se usa la operación gradiente para obtener la intensidad de campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy\hat{\mathbf{a}}_x - 2x^2\hat{\mathbf{a}}_y + 5\hat{\mathbf{a}}_z \quad V/m$$

El valor de **E** en el punto *P* es

$$\mathbf{E}_P = 48\hat{\mathbf{a}}_x - 32\hat{\mathbf{a}}_y + 5\hat{\mathbf{a}}_z \quad \text{V/m}$$

La dirección de **E** en *P* la da el vector unitario

$$\hat{\mathbf{a}}_{E_p} = \frac{\mathbf{E}_p}{|\mathbf{E}_p|} = \frac{1}{57.9} \Big(48\hat{\mathbf{a}}_x - 32\hat{\mathbf{a}}_y + 5\hat{\mathbf{a}}_z \Big) \\= 0.829\hat{\mathbf{a}}_x - 0.553\hat{\mathbf{a}}_y + 0.086\hat{\mathbf{a}}_z$$

Si se supone que estos campos existen en el espacio libre, entonces

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = -35.4 xy \hat{\mathbf{a}}_x - 17.71 x^2 \hat{\mathbf{a}}_y + 44.3 \hat{\mathbf{a}}_z \text{ pC/m}^3$$

Finalmente, se puede usar la relación de la divergencia para hallar la densidad de carga que es la fuente del potencial dado,

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35.4y \ \mathrm{pC/m^3}$$

En *P*, $\rho_v = -106.2 \text{ pC}/\text{m}^3$.

Ejemplo 26. Obténgase una fórmula para la intensidad de campo eléctrico en el eje de un disco circular de radio *b* que tiene una densidad superficial de carga uniforme ρ_s .

Solución: Aunque el disco tiene simetría circular, no es posible visualizar una superficie en su alrededor donde la componente normal de **E** tenga una magnitud constante; por tanto, no se puede usar la ley de Gauss para obtener la solución este problema. Se usará la Ec. (2.61). Trabajando con coordenadas cilíndricas, como indica la Fig. 2.36, se tiene que

$$dS' = \rho' d\rho' d\phi'$$
 y $R = \sqrt{z^2 + \rho'^2}$



 \overline{Z}

El potencial eléctrico en el punto P(0, 0, z) referido al punto en infinito es

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{\rho'}{\left(z^2 + {\rho'}^2\right)^{1/2}} d\rho' d\phi'$$

= $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[\left(z^2 + b^2\right)^{1/2} - |z| \right]$ (2.71)

En consecuencia,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\rho_{s}}{2\varepsilon_{0}} \left[1 - z \left(z^{2} + b^{2} \right)^{-1/2} \right], & z > 0 \\ -\hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\rho_{s}}{2\varepsilon_{0}} \left[1 + z \left(z^{2} + b^{2} \right)^{-1/2} \right], & z < 0 \end{cases}$$
(2.72)

La determinación del campo E en un punto fuera del eje sería un problema mucho más complicado. Para *z* muy grande, conviene expandir el segundo término en las Ecs. (2.72) en una serie binomial y despreciar los términos con potencias mayores que uno en el cociente (b^2/z^2) . Así se obtiene que

$$z(z^{2}+b^{2})^{-1/2} = \left(1+\frac{b^{2}}{z^{2}}\right)^{-1/2} \approx 1-\frac{b^{2}}{2z^{2}}$$

Sustituyendo esta relación de aproximación en las Ecs. (2.72), obtenemos

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\left(\pi b^{2} \rho_{s}\right)}{4\pi \varepsilon_{0} z^{2}}$$

$$= \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{0} z^{2}}, \quad z > 0 \\ -\hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_{0} z^{2}}, \quad z < 0 \end{cases}$$
(2.73)

donde Q es la carga total en el disco. Por tanto, cuando el punto de observación está muy alejado del disco cargado, el campo E sigue aproximadamente la ley del cuadrado inverso como si toda la carga estuviese concentrada en un solo punto en el centro del disco.

Ejemplo 27. Una lámina cargada (Fig. 2.37) tiene una densidad de carga uniforme ρ_v (C/m³). En $x = x_1$, $V = V_1$ y $E_x = E_1$. No hay variación de E_x en las direcciones de y y de z. Determine el potencial V(x) dentro de la lámina.

Solución: Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \varepsilon_0$, entonces

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad \text{o} \quad \int_{E_1}^{E_x} dE_x = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \int_{x_1}^x dx$$

de donde

$$E_{x} = \frac{\rho_{v}}{\varepsilon_{0}} (x - x_{1}) + E_{1}, \quad x_{1} < x < x_{2}$$

También se tiene que E = -dV/dx, o

$$\int_{V_1}^V dV = -\int_{x_1}^x \left[\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}(x-x_1) + E_1\right] dx$$

у

$$V(x) = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_0} (x - x_1)^2 - E_1 (x - x_1) + V_1, \quad x_1 < x < x_2$$

Ejemplo 28. Un campo eléctrico se representa por $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_x ay + \hat{\mathbf{a}}_y ax$, donde $a = 100 \text{ V/m}^2$. Hállese

(a) La función potencial *V*, tomando V = 0 en el origen.



- (b) El trabajo realizado por el campo cuando una carga $a = 10^{-8}$ C se traslada desde x = -1 m, y = -2 m hasta x = 2 m, y = 3 m por la trayectoria indicada en la Fig. 2.38.
- (c) La densidad de carga en cualquier punto.



Solución:

(a) El campo eléctrico **E** está relacionado con el potencial *V* por la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$. Por tanto,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \implies V = -axy + f(y)$$

donde f(y) es una función posible de y. También

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \implies V = -axy + g(x)$$

donde g(x) es una función posible de x. De manera que

$$V = -axy + f(y) + g(x)$$

Pero se tiene la condición de que V = 0 en x = y = 0, y se obtiene

$$V = -axy$$

(b) Si *W* es el trabajo realizado para llevar la carga desde *a* hasta *b*, entonces

$$W = q \int_{a}^{e} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q \int_{a}^{b} \left(E_{x} dx + E_{y} dy \right) = 10^{-8} \left\{ \int_{-1}^{2} E_{x} dx + \int_{-2}^{2} E_{y} dy \right\}_{\text{trayectoria } C_{1}} \text{trayectoria } C_{2}$$

0

$$W = 10^{-8} \left\{ \int_{-1}^{2} ay dx + \int_{-2}^{2} ax dy \\ trayectoria C_{1} + \int_{-2}^{-2} ax dy \\ trayectoria C_{2} + \left[axy \right]_{x=-1}^{2} + \left[axy \right]_{y=-2}^{3} \right\}$$
$$= 10^{-8} \left\{ (100)(-2)[2 - (-1)] + (100)(2)[3 - (-2)] \right\}$$
$$= 400 \times 10^{-8} \text{ J}$$

(c) Aquí se usa la forma diferencial de la ley de Gauss para hallar la densidad de carga ρ_v , $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \epsilon_0$:

$$\rho_v = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right)$$
$$= \varepsilon_0 \left(\frac{\partial (ay)}{\partial x} + \frac{\partial (ax)}{\partial y} \right) = 0$$

Ejemplo 29. Supóngase que se tienen dos conchas esféricas conductoras concéntricas de radios internos R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) y que se colocan cargas Q_1 y Q_2 en estas conchas; se quiere encontrar la función potencial en todos los puntos debida a la distribución de carga resultante (Fig. 2.39).



Figura 2.39

Solución: Defina los campos E_1 , E_2 y E_3 y los potenciales V_1 , V_2 y V_3 en las regiones respectivas $r > R_2$, $R_3 < r < R_2$ y $R_1 < r < R_3$. Los campos eléctricos en las diferentes regiones son radiales debido a la simetría esférica y se determinan fácilmente aplicando la ley de Gauss a superficies esféricas en las diferentes regiones y concéntricas con las capas. Por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \qquad r > R_2$$
$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \qquad R_1 < r > R_3$$

El campo eléctrico se anula en el interior de la concha conductora; por tanto, $E_2 = 0$.

Ahora los potenciales se pueden determinar fácilmente. Sustituyendo E_1 en la Ec. (2.52), se obtiene

$$V_1 = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En la región 2 el campo eléctrico es cero y por tanto el potencial correspondiente es constante:

$$V_2 = \text{constante} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Finalmente, el potencial en la región 3 se determina sustituyendo E3 en la Ec. (2.52), y se obtiene

$$V_{3} = \frac{Q_{1} + Q_{2}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{2}} - \int_{R_{3}}^{r} \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{dr}{r^{2}} = \frac{Q_{1} + Q_{2}}{4\pi\varepsilon_{0}R_{2}} + \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{3}}\right)$$

2.12 El Dipolo Eléctrico

Como ya se mencionó en la Sec. 2.3, un **dipolo eléctrico** se forma cuando dos cargas puntuales de igual magnitud pero de signos opuestos están separadas por una distancia muy pequeña.

La importancia del campo producido por un dipolo se evidenciará más adelante. Por los momentos, considere el dipolo mostrado en la Fig. 2.40. El potencial en el punto $P(r, \theta, \phi)$ está dado por



119

Figura 2.40

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right]$$
(2.74)

Si $d \ll r$, se tiene que

$$\frac{1}{r_1} \cong \left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \cong r^{-1} \left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$
(2.75)

у

$$\frac{1}{r_2} \cong \left(r + \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \cong r^{-1} \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$
(2.76)

Sustituyendo las Ec. (2.75) y (2.76) en la Ec. (2.74), se obtiene

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2}$$
(2.77)

Puesto que $d \cos \theta = \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r$, donde $\mathbf{d} = d \hat{\mathbf{a}}_z$, si se define

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{2.78}$$

como el momento del dipolo, entonces la Ec. (2.77) puede escribirse como

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.79}$$

Observe que el vector del momento del dipolo **p** está dirigido desde -Q hacia +Q. Si el centro del dipolo no está en el origen sino en una posición dada por **r**', la Ec. (2.79) se convierte en

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
(2.80)

El campo eléctrico debido al dipolo con centro en el origen (Fig. 2.39), puede obtenerse rápidamente a partir de las Ecs. (2.69) y (2.77) como

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta\right)$$
$$= \frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{a}}_r + \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{a}}_\theta$$

0

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos\theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \right)$$
(2.81)

donde $p = |\mathbf{p}| = Qd$ y es igual a la dada por la Ec. (2.15).

Nótese que una carga puntual es un *monopolo* y su campo eléctrico varía como $1/r^2$, en tanto que su potencial varía como 1/r. De las Ecs. (2.79) y (2.81) se ve que el campo eléctrico debido al dipolo varía como $1/r^3$, mientras que su potencial varía como $1/r^2$. Los campos eléctricos producidos por multipolos de orden superior (tales como un cuadripolo, el cual consiste de dos dipolos) varían inversamente como r^4 , r^5 , ..., en tanto que sus potenciales correspondientes varían inversamente como r^3 , r^4 ,

Ejemplo 30. Dibujar las líneas del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico.

Solución: La ecuación de una superficie equipotencial de una distribución de carga se obtiene igualado la expresión para *V* a una constante. Como *Q*, *d* y ε_0 en la Ec. (2.77) para un dipolo eléctrico son cantidades fijas, un potencial constante requiere un cociente $\cos \theta/r^2$. Por tanto, la ecuación para una superficie equipotencial es

$$r = C_V \sqrt{\cos \theta} \tag{2.82}$$

donde C_V es una constante. En el intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$, V es positiva; r es máxima en $\theta = 0$ y cero en $\theta = 90^\circ$. En el intervalo $\pi/2 \le \theta \le \pi$, se obtiene una imagen especular y allí, el potencial V es negativo.

Las líneas del campo eléctrico se obtienen en la forma siguiente. Se toma

$$d\ell = k\mathbf{E} \tag{2.83}$$

donde k es una constante. En coordenadas esféricas, la expresión para la Ec. (2.83) es

$$\hat{\mathbf{a}}_r dr + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} r d\theta + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} r \operatorname{sen} \theta d\phi = k \left(\hat{\mathbf{a}}_r E_r + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} E_{\theta} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} E_{\phi} \right)$$

la cual puede escribirse como

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_{\theta}} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_{\phi}}$$

El dipolo eléctrico no tiene componente E_{ϕ} y entonces

$$\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta} \implies \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$
(2.84)

Ahora se integra para obtener

$$r = C_E \operatorname{sen}^2 \theta \tag{2.85}$$

donde C_E es una constante. En la Fig. 2.41 se ilustran las líneas del campo eléctrico. Tienen simetría rotacional con respecto al eje z (independientes de ϕ). Las líneas de los equipotenciales, si se dibujasen, serían normales en todas partes a las líneas del campo eléctrico.



Figura 2.41

2.13 Densidad de Energía en el Campo Electrostático

El concepto de potencial se introdujo considerando el trabajo realizado al mover un carga puntual en el interior de un campo eléctrico; ahora se debe continuar ese análisis siguiendo al flujo de energía un paso adicional.

El traslado de una carga positiva desde infinito hacia el campo de otra carga positiva estacionaria requiere que la fuerza externa que mueve la carga realice un trabajo. Imagínese que esa fuerza externa lleva la carga hasta un punto cercano a la carga fija y la mantiene allí. La energía debe conservarse, y la energía utilizada para colocar esa carga en posición ahora representa energía potencial, ya que si la fuente externa liberase la carga, ésta se aceleraría alejándose de la carga fija, adquiriendo energía cinética y la capacidad de realizar trabajo. Si se extiende este concepto a un sistema de cargas, el trabajo realizado para ensamblar las cargas es almacenado como energía potencial del sistema de cargas.

Para calcular la energía potencial presente en un sistema de *N* cargas, se debe hallar el trabajo realizado por una fuente externa para posicionar las cargas.

Se supone un universo vacío para comenzar. Traer una carga Q_1 desde el infinito hasta cualquier posición no requiere trabajo, ya que no hay ningún campo presente. El posicionamiento de una segunda carga Q_2 en un punto en el campo de Q_1 requiere un trabajo dado por el producto de la carga Q_2 y el potencial en ese punto debido a Q_1 . Este potencial lo se representa por $V_{2,1}$, donde el primer subíndice indica la posición y el segundo la fuente. Es decir, $V_{2,1}$ es el potencial en la posición de Q_2 debido a la carga Q_1 . Entonces,

Trabajo para posicionar $Q_2 = Q_2 V_{2,1}$

En la misma forma, se puede expresar el trabajo requerido para colocar cada carga adicional en el campo de todas las demás cargas allí presentes; es decir,

Trabajo para posicionar
$$Q_3 = Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2}$$

Trabajo para posicionar $Q_4 = Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3}$

y así sucesivamente hasta posicionar las *N* cargas. El trabajo total realizado se obtiene sumando cada contribución:

Trabajo total realizado = Energía potencial del campo
=
$$W_F$$

donde

$$W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \cdots$$
(2.86)

Un término representativo en esta última ecuación tiene la forma

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

donde R_{13} y R_{31} representan cada uno la distancia entre Q_1 y Q_3 . Se observa entonces que este término también pudo haberse escrito como $Q_1V_{1,3}$. Si cada término en la expresión para la energía se reemplaza por su igual simétrico, se encuentra que

$$W_e = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots$$
(2.87)

Sumando las dos expresiones dadas por las Ecs. (2.86) y (2.87), se obtiene

$$2W_E = Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) + Q_2 (V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots) + \cdots$$

Cada uno de los potenciales entre paréntesis representa el potencial combinado debido a todas las cargas excepto por la carga en el punto donde se está midiendo el potencial. En otras palabras, por ejemplo,

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots = V$$

es el potencial en Q_1 debido a la presencia de Q_2, Q_3, \dots . Por tanto, se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} Q_m V_m$$
(2.88)

Para obtener una expresión para la energía almacenada en una región donde está presente una distribución de carga continua, cada carga se reemplaza por un elemento de carga $\rho_v dv$ y la sumatoria se convierte en una integral. Así pues,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dv \tag{2.89}$$

Las Ecs. (2.88) y (2.89) permiten calcular la energía potencial total presente en un sistema de cargas puntuales o de una densidad volumétrica de carga. Se pueden escribir ecuaciones similares en términos de una densidad de carga lineal o de superficie. Usualmente se prefiere usar la Ec. (2.89) para representar los diferentes tipos de cargas que deben considerarse. Esto siempre puede hacerse considerando a cualquier carga como una distribución de volumen en regiones muy pequeñas.

Ahora se sustituye la relación de la divergencia de **D** dada por $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$ en la Ec. (2.89) para obtener

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv$$
(2.90)

Pero para cualquier vector **D** y cualquier escalar *V*, se cumple la identidad

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot \nabla V + V (\nabla \cdot \mathbf{D})$$

0

$$(\nabla \cdot \mathbf{D})V = \nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla V \tag{2.91}$$

Aplicando la identidad en la Ec. (2.91) a la Ec. (2.90), se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$

Ahora se aplica el teorema de la divergencia al primer término en el lado derecho de esta ecuación, y se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_{S} (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$
(2.92)

La integral de superficie es igual a cero, ya que en esta superficie que rodea todas las cargas, *V* tiende a cero tan rápido como 1/r (las cargas se asemejan a cargas puntuales) y **D** tiende a cero tan rápido como $1/r^2$. El elemento diferencial de superficie tiende a cero como r^2 (se parece a una esfera). En consecuencia, en el límite conforme $r \rightarrow \infty$, el integrando (y la integral) tiende a cero, y la Ec. (2.92) se reduce a

$$W_E = -\frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv$$
(2.93)

Puesto que $\mathbf{E} = -\nabla V$ y como $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \varepsilon_0 E^2 dv$$
(2.94)

y a partir esta última relación es posible definir la densidad de energía electrostática w_E (en J/m²) como

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}$$
(2.95)

y otra forma de la Ec. (2.94) es entonces

$$W_e = \int_{\text{vol}} w_E dv \tag{2.96}$$

Ejemplo 31. Calcúlese la energía almacenada en un sistema de cuatro cargas puntuales idénticas, Q = 4 nC, en las esquinas de un cuadrado de 1 m por lado. ¿Cuál es la energía almacenada cuando sólo dos cargas están en esquinas opuestas?

Solución: La energía almacenada es

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4) = 2Q_1 V_1$$

donde la última igualdad se debe a la simetría del sistema. El potencial V_1 es

$$V_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} = \frac{4\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 97.5 \text{ V}$$

y la energía almacenada es

$$W_e = 2Q_1V_1 = 2\left(\frac{4 \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2}}\right) = 102 \text{ nJ}$$

Para dos cargas en las esquinas opuestas,

$$2W_e = Q_1 V_1 = (4 \times 10^{-9}) \left(\frac{4 \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}}\right) = 107 \text{ nJ}$$

Ejemplo 32. Calcular la energía almacenada en el campo electrostático de una sección de cable coaxial (o capacitor) de longitud *L*.

Solución: Anteriormente (Ejemplo 15) se encontró que

$$D_{\rho} = \frac{a\rho_s}{\rho}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{a \rho_s}{\varepsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

donde p_s es la densidad de carga superficial en el conductor interno cuyo radio es a. Así,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \varepsilon_0 \frac{a^2 \rho_s^2}{\varepsilon_0^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para una densidad de carga superficial, la Ec. (2.89) establece que

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S} \rho_s V dS$$
$$= \frac{1}{2} \rho_s \int_{0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \frac{a \rho_s}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) a \, d\phi \, dz$$
$$= \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

y éste es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Esta expresión toma una forma más conocida al observar que la carga total en el conductor interno es $Q = 2\pi a L \rho_s$. Combinando este valor con la diferencia de potencial entre los cilindros, V_a , se obtiene que

$$W_e = \frac{1}{2}QV_a$$

y de un curso de Circuitos Eléctricos se sabe que ésta es la energía almacenada en un capacitor.

Ejemplo 33. Una distribución de carga con simetría esférica tiene una densidad

$$\boldsymbol{\rho}_{v} = \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_{0}, & 0 \le r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Determinar el potencial V en todas partes y la energía almacenada en la región $r \le R$. Compare este último resultado con la energía de dos cargas puntuales Q separadas por una distancia R.

Solución. El campo E ya se calculó en el Ejemplo 19 utilizando la ley de Gauss.

(a) Para $r \ge R$,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Una vez conocido E, el potencial V se determina como

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \int \frac{1}{r^2} dr$$
$$= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1, \quad r > R$$

Tomando el potencial en infinito $V(r \rightarrow \infty) = 0$, se obtiene que $C_1 = 0$. (b) Para $r \le R$,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{\rho}_0 r}{3\mathbf{\varepsilon}_0} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Por tanto,

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \int r dr$$
$$= -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + C_2$$

De la parte (a) se sabe que $V(R = r) = \rho_0 R^2 / 3\epsilon_0$, y se obtiene

$$\frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \implies C_2 = \frac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0}$$
$$V = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} \left(3R^2 - r^2\right)$$

у

Entonces, de las partes (a) y (b) se obtiene la relación completa para el potencial *V*:

$$V = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2), & r \le R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}, & r \ge R \end{cases}$$

(c) La energía almacenada es dada por

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\text{vol}} E^2 dv$$

Para $r \le R$, $\mathbf{E} = (\rho_0 r / 3\varepsilon_0) \hat{\mathbf{a}}_r$ y entonces

$$W_{e} = \frac{1}{2} \varepsilon_{0} \frac{\rho_{0}^{2}}{9\varepsilon_{0}^{2}} \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (r^{2}) r^{2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$
$$= \frac{\rho_{0}^{2}}{18\varepsilon^{2}} 4\pi \frac{r^{5}}{5} \bigg]_{0}^{R} = \frac{2\pi\rho_{0}^{2}R^{5}}{45\varepsilon_{0}^{2}} \quad (J)$$

En términos de la carga total en la esfera, esta última relación puede escribirse como

$$W_E = \frac{1}{10} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

La energía de dos cargas puntuales *Q* separadas por una distancia *a* es dada por

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

y tenemos que la energía de la esfera es menor que la de dos cargas puntuales separadas por una distancia igual al radio de la esfera.

PROBLEMAS

- **2.1** Tres cargas puntuales, cada una de intensidad 3×10^{-9} C, están colocadas una en cada una de las tres esquinas de un cuadrado de 10 cm de lado. Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en la cuarta esquina.
- **2.2** Cinco cargas puntuales idénticas de 15 μC están ubicadas en el centro y esquinas de un cuadrado de lado 1 m en el plano *xy*. Halle la intensidad de campo eléctrico en el punto (0, 0, 3) m y la fuerza sobre una carga puntual de 10 μC.
- **2.3** Dos bolas conductoras pequeñas cuyos centros están separados una distancia *d*, tienen cargas Q_1 y Q_2 . Las bolas se ponen en contacto y después se regresan a sus posiciones originales. Determina la fuerza eléctrica si las cargas Q_1 y Q_2 tienen (1) el mismo signo; (2) signos opuestos.
- **2.4** Cargas +2Q y +3Q están separadas por una distancia de 2 m. Se coloca una tercera carga de tal manera que el sistema electrostático está en equilibrio. Halle la posición de la tercera carga en términos de Q.
- **2.5** Tres cargas puntuales de igual masa m y carga Q están suspendidas desde un punto común por tres hilos de masa despreciable y longitud ℓ . Determine la separación entre las cargas cuando el sistema está en equilibrio.
- **2.6** Cargas puntuales idénticas se alternan en signo en las ocho esquinas de un cubo de lado *a*, como se muestra en la Fig. P2.6. Calcule la fuerza eléctrica neta que actúa sobre la carga positiva ubicada en el origen.



- **2.7** Un rectángulo en el plano *xy* tiene sus vértices en los puntos (*a*, *b*), (*a*, –*b*), (–*a*, *b*) y (–*a*, –*b*). En los bordes del rectángulo hay una carga eléctrica en la forma de una densidad lineal uniforme de ρ_{ℓ} C/m. Obtenga una expresión para el campo eléctrico en el punto del campo (*x*, *y*, *z*) = (0, 0, *h*).
- **2.8** Un electrón de carga –*e* y masa *m* se mueve en un campo eléctrico uniforme *E*. En t = 0 la velocidad del electrón es v_0 y esta velocidad forma un ángulo θ_0 con la dirección del campo. Defina ejes apropiados y determine la ecuación de la trayectoria de este electrón.
- **2.9** Un cono truncado se define mediante las ecuaciones

$$0 \le \rho \le 1 - z$$
$$0 \le z \le 0.5$$

Halle el campo eléctrico en el punto (*x*, *y*, *z*) = (0, 0, 1) si la densidad de carga dentro del cono truncado está dada por $\rho_v = 2.9 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3$.

- **2.10** Una carga eléctrica está distribuida a lo largo de un arco ubicado en el plano *xy* y definido por $\rho = 2$ cm y $0 \le \phi \le \pi/4$. Si $\rho_l = 5 \,\mu\text{C/m}$, determine **E** en (0, 0, *z*) y después evalúelo en:
 - (a) El origen.; (b) z = 5 cm.; (c)z = -5 cm.

2.11 La superficie definida por

$$-1 < z < 1$$
$$\rho = 0.8$$
$$\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$$

contiene una densidad superficial de carga dada por

$$\rho_{\upsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 3 \times 10^{-9} , & 0 < \phi < 3\pi/2 \\ -4 \times 10^{-9} , & 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

Determine el campo eléctrico en el punto (x, y, z) = (0, 0, 0).

- **2.12** Es posible separar las semillas normales de las decoloradas y de objetos extraños mediante un dispositivo que opera en la forma siguiente. Las semillas caen una por una entre un par de foto celdas. Si el color no es el correcto, se aplica un voltaje a una aguja que deposita una carga en la semilla. Las semillas caen entonces entre un par de placas cargadas eléctricamente que desvían las semillas indeseadas hacia un recipiente separado. Una máquina como ésta puede clasificar arvejas con un ritmo de 100 por segundo, o aproximadamente 2 toneladas métricas por día de 24 horas.
 - (a) Si las semillas caen con una tasa de 100 por segundo, ¿a qué distancia deben caer si deben estar separadas verticalmente por 20 milímetros cuando pasan entre las foto celdas? Desprecie la resistencia del aire.
 - (b) Suponga que las semillas adquieren una carga de 1.5×10⁻⁹ culombios, que las placas deflectoras son paralelas y tienen una separación de 50 milímetros y que la diferencia de potencial entre ellas es de 25000 voltios. ¿A qué distancia deben extenderse las placas por debajo de la aguja cargadora si las semillas cargas deben desviarse por 40 milímetros al salir de las placas? Suponga que la aguja de carga y la parte superior de las placas deflectoras están muy cerca de la foto celda.
- **2.13** Una distribución de carga lineal y uniforme de λ culombios/metro está situada a una distancia *r* de una carga puntual *Q* de signo opuesto.
 - (a) Calcule la fuerza de atracción.
 - (b) Demuestre que la fuerza es la misma que existiría si la distribución lineal fuese reemplazada por una sola carga $Q' = 2\lambda r$ situada en el pie de la perpendicular dibujada desde Q.
- **2.14** Demuestre la Ec. (2.15).
- **2.15** Un disco circular de radio *a* tiene una densidad de carga no uniforme $\rho_s = \rho_0 \operatorname{sen}^2 \phi$. Determine E en su eje en *z* = *h*.
- **2.16** Sea *Q* una caga puntual colocada en el origen y sea $\mathbf{p} = p(\cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_{\theta})$ el momento de un dipolo situado en el punto (*r*, θ , ϕ) en coordenadas esféricas. Determine la fuerza experimentada por este dipolo y las tres componentes esféricas de la fuerza como funciones de α . Explique físicamente el origen de la componente en $\hat{\mathbf{a}}_{\theta}$.
- **2.17** Dos cargas iguales de signo opuesto tienen una separación fija *d* y forman un dipolo de momento *p*. Este dipolo está en un campo eléctrico uniforme de intensidad *E*; la dirección del vector del momento del dipolo forman un ángulo θ con la dirección de E. Demuestre que el par de fuerzas sobre este dipolo es dado por *pE* sen θ .
- **2.18** Un objeto conductor no cargado tiene una cavidad hueca en su interior. Si se coloca una carga Q en la cavidad, demuestre que una carga -Q es inducida en la superficie de la cavidad y una carga Q es inducida en la superficie externa del conductor.

- **2.19** Dos planos infinitos son paralelos. Uno está cargado uniformemente con un una densidad de carga superficial $+\rho_s$ y el otro con una densidad de carga $-\rho_s$. Demuestre que la intensidad del campo entre los dos planos tiene un valor ρ_s/ϵ_0 y que es igual a cero fuera de los dos planos.
- **2.20** Use la ley de Gauss para determinar el campo E producido por un cilindro de carga muy largo de densidad de volumen $\rho_v = 5re^{-2r}$ C/m³, donde *r* es la distancia al eje del cilindro.
- **2.21** Un cascarón esférico cargado uniformemente tiene un radio *a*. Otro cascarón, concéntrico con el anterior, tiene una carga igual y de signo opuesto y un radio b > a. Determine el campo eléctrico a una distancia *r* del centro común, donde *r* está entre *a* y *b*. ¿Cómo se compara este campo con el que existiría si la esfera externa no estuviese presente?
- **2.22** Dentro de una región dada por $-0.15 \le z \le +0.15$ m, la expresión que define la densidad volumétrica de carga es $\rho_v(\mathbf{r}) = 10^{-8}z^2 \text{ C/m}^3$. Utilice la ley de Gauss para deducir una expresión para el campo eléctrico en cada una de las tres regiones z > 0.15 m; $-0.15 \le z \le 0.15$ m; y < z < -0.15 m.
- **2.23** Una densidad de flujo eléctrico es dada como $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho}/r$ en coordenadas esféricas. Calcule la carga total contenida en un cascarón esférico de radio interno *a* y radio externo *b* (0 < *a* < *b*) y centro en el origen.
- 2.24 En una cierta región del espacio, la densidad de carga es dada en coordenadas cilíndricas por la función

$$\rho_v = 5\rho e^{-\rho} \quad (C/m^3)$$

Aplique la ley de Gauss para hallar **D**.

- **2.25** Un cascarón cilíndrico de longitud infinita se extiende en $\rho = 1$ m y $\rho = 3$ m y contiene una densidad de carga uniforme ρ_{v0} . Aplique la ley de Gauss para hallar **D** en todas las regiones.
- **2.26** Un campo electrostático es especificado por $\mathbf{E} = \lambda (x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y)$, donde λ es una constante. Use la ley de Gauss para determinar la carga total encerrada por la superficie mostrada en la Fig. P2.26, la cual consiste de *S*₁, la porción curva del semicilindro $z = (r^2 y^2)^{1/2}$ de longitud *h*: *S*₂ y *S*₃, los dos planos semicirculares en los extremos y *S*₄, la parte rectangular del plano *xy*. Exprese sus resultados en función de λ , *r* y *h*.



Figura P2.26

- **2.27** En la presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E} = y\hat{\mathbf{a}}_x + x\hat{\mathbf{a}}_y$, calcule el trabajo realizado al transportar una carga de 3 µC desde un punto *P*₁:(3, 4, 0) hasta un punto *P*₂:(0, 1, 0) a lo largo de
 - (a) una parábola definida por $y = (x-1)^2 y$
 - (b) una línea recta definida por y = x + 1.
 - (c) ¿Es **E** un campo conservativo?
 - (d) Verifique la respuesta en la parte (c) calculando $\nabla \times \mathbf{E}$.
- **2.28** La densidad de carga de volumen de una placa gruesa y muy grande varía como $\rho_v = \rho_0 x/d$ a través de la placa, donde *x* es la distancia a uno de sus planos de frontera y *d* es el espesor de la placa. Halle el

vector de la intensidad del campo eléctrico en todas partes y grafique su resultado. ¿Cuál es la magnitud de la diferencia de potencia entre las superficies de frontera de la placa?

- **2.29** Si la densidad de carga se incrementa linealmente con la distancia al origen de modo que $\rho_v = 0$ en el origen y $\rho_v = 4 \text{ C/m}^3$ en $\rho = 2m$, halle la variación correspondiente de **D**.
- **2.30** Sea $F(x, y, z) = \lambda$ la representación de una familia de superficies tales que *F* posee derivadas parciales continuas del primer y segundo órdenes. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que estas superficies sean equipotenciales es

$$\frac{\nabla^2 F}{\left(\nabla F\right)^2} = f(\lambda)$$

donde $f(\lambda)$ es una función de λ solamente. Demuestre que si se cumple esta condición el potencial es

$$V = c_1 \int e^{-\int f(\lambda) d\lambda} d\lambda + c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

2.31 (a) Determine el campo E asociado con el potencial

$$V = \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

(b) ¿Cuál es la distribución de carga responsable de este potencial? (c) Halle la distribución de carga que da lugar al potencial $V(\mathbf{r}) = -q e^{-\alpha r} / r$, donde $q \neq \alpha$ son constantes.

- **2.32** La superficie $\rho = 0.02$ m contiene una densidad superficial uniforme de carga ρ_{s0} C/m². La región $0.03 < \rho < 0.04$ contiene una densidad volumétrica de carga $\rho_v(\mathbf{r})$ no uniforme y varía en función de ρ , en tanto que no depende de ϕ y z. El campo eléctrico en la región $0.03 < \rho < 0.04$ m está en la dirección de $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$ y su magnitud es constante. Exprese la densidad volumétrica de carga $\rho_v(\mathbf{r})$ en función de ρ_{s0} y de la coordenada cilíndrica ρ .
- **2.33** Dos pequeñas esferas conductoras de radios *a* y *b* están conectadas por un conductor flexible y muy delgado de longitud *d*. La carga total del sistema es *Q*. Suponiendo que *d* es mucho mayor que *a* y *b*, determine la fuerza *F* que actúa sobre el alambre de modo que tienda a extenderlo. Considere que las cargas están localizadas sólo en las dos esferas y distribuidas uniformemente en sus superficies.

Sugerencia: Al conectarse por el alambre conductor, las esferas tendrán el mismo potencial.

- **2.34** Considere un cable coaxial de longitud infinita. El radio del conductor central es *a* metros, y el radio interno del conductor externo es *b* metros. Si el aislamiento entre los conductores tiene una resistencia a la ruptura de KV/m, determine la mínima diferencia de potencial entre los conductores que causa la ruptura. La respuesta debe estar dada en términos de *a*, *b* y *K*.
- **2.35** Un cilindro conductor largo de radio *a* se sitúa en un campo eléctrico, el cual, lejos del cilindro, está dado por $V = -E_0 \rho \cos \phi$, donde ρ y ϕ son las coordenadas cilíndricas usuales y E_0 es una constante. El eje *z* se orienta para que coincida con el eje del cilindro.
 - (a) Determine la distribución del campo en la región exterior al cilindro, suponiendo que el potencial del cilindro es cero.
 - (b) Determine la magnitud y la dirección del campo electrostático en puntos alejados del cilindro (*r* >>*a*).
- **2.36** ¿Para qué valores de *A* y *B* es la siguiente función una función potencial válida en una región libre de cargas?

$$V = \frac{A\cos^2 \theta - B}{r^3}?$$

2.37 El potencial electrostático en una cierta región viene dado por

$$V = \frac{k \, e^{-ar}}{r}$$

donde *k* y *a* son constantes. ¿Cómo está distribuida la carga en esta región? Verifique su respuesta mediante la ley de Gauss. ¿Qué interpretación física se le puede dar a la constante *k*?

2.38 Se tiene una esfera de permitividad ε_2 la cual está colocada en un medio de permitividad ε_1 . Demuestre que en este caso el potencial fuera y dentro de la esfera viene dado respectivamente por

$$V_1 = E_0 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] r \cos \theta$$

у

$$V_2 = E_0 \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} r \cos \theta$$

2.39 Una carga está distribuida en una línea recta infinita con una densidad constante de ρ_{ℓ} culombios/metro. Demuestre que la intensidad del campo en cualquier punto cuya distancia a la línea es *r* es

$$E_r = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon r}$$

y que este campo es el negativo del gradiente de una función potencial

$$V(x,y) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es una constante arbitraria que representa el radio de un cilindro en el cual V = 0.

A partir de estos resultados demuestre que si la carga se distribuye en un espacio bidimensional con una densidad $\sigma_s(x,y)$, el potencial en cualquier punto del plano *xy* es

$$V(x',y') = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{S} \sigma_{s} \ln \frac{r_{0}}{r} da$$

donde $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$ y demuestre también que V(x,y) satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \sigma_s(x, y)$$

- **2.40** Determine la energía almacenada en un sistema consistente de una carga puntual situada a una distancia *d* de un plano conductor infinito.
- **2.41** Una esfera sólida con radio de 0.1 m está centrada en (0, 0, 5) m. La densidad de carga en la esfera está dada por $\rho_v = 3 \times 10^{-11} \text{ C/m}^3$. Una carga puntual de $1.5 \times 10^{-12} \text{ C}$ está situada en el origen. Calcule el trabajo realizado al mover la esfera sólida verticalmente hacia abajo sobre el eje *z* hasta que la distancia entre el centro de la esfera y la carga puntual sea de 2.5 m (*Sugerencia*: Considere el trabajo realizado si la esfera sólida permanece estacionaria en tanto que la carga puntual se desplaza hacia arriba por el eje *z* desde *z* = 0 hasta *z* = 2.5 m).
- **2.42** Considere un dipolo eléctrico $\mathbf{p} = p_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ ubicado en el origen y colocado en un potencial externo $V = \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$. ¿Qué energía se necesitó para colocar el dipolo en el potencial? (b) Determine la fuerza que actúa sobre el dipolo. (c) Determine el par de fuerzas que actúa sobre el dipolo (α_1 , α_2 y α_3 son constantes).

CAPÍTULO 3

Medios Materiales en Campos Eléctricos Estáticos

3.1 Introducción

En el Cap. 2 se estudió solamente el campo eléctrico de distribuciones de cargas eléctricas en el espacio libre o en el aire; dicho de otra forma, se estudió la teoría del campo eléctrico en el "vacío". Ahora se iniciará el estudio del comportamiento del campo en medios materiales. Como se evidenciará, la mayoría de las relaciones desarrolladas en el Cap. 2 todavía mantienen su validez, aunque algunas pueden requerir de ciertas modificaciones.

Los campos eléctricos pueden existir en medios materiales en mucho la misma forma en que se manifiestan en el espacio libre. En general, los medios materiales se clasifican según sus propiedades eléctricas en tres tipos: conductores, semiconductores y no conductores (aislantes o dieléctricos). Se estudiará brevemente sobre las propiedades eléctricas de los materiales en general para proporcionar una base para comprender los conceptos de conducción, corriente eléctrica y polarización. Adicionalmente se estudiarán algunas propiedades de materiales dieléctricos tales como la susceptibilidad, la permitividad, linealidad, isotropía, homogeneidad, resistencia dieléctrica y tiempo de relajación. También se introducirá el concepto de condiciones de frontera para campos eléctricos que existen en dos medios vecinos diferentes.

3.2 Propiedades de los Materiales y Tipos de Corrientes

En el curso de nuestros estudios de electricidad pueden surgir preguntas tales como por qué un electrón no abandona la superficie de un conductor o por qué los materiales se comportan en forma diferente en la presencia de un campo eléctrico. Éstas, por supuesto, no son las únicas preguntas con las que nos enfrentamos. Por ello se dará una explicación breve para ayudar a comprender el mecanismo mediante el cual los materiales influyen un campo eléctrico.

Los parámetros constitutivos electromagnéticos de un material son su permitividad eléctrica ε , su permeabilidad magnética μ y su conductividad σ . Un material es homogéneo si sus parámetros constitutivos no varían de un punto a otro, y es *isótropo* si esos parámetros son independientes de la dirección. La mayoría de los materiales exhiben propiedades de isotropía, pero no algunos cristales.

Se sabe que ciertos materiales "conducen electricidad" bien y otros no. Lo que se entiende por conducir electricidad es que en los primeros, los elementos de carga (por ejemplo, electrones) se pueden mover libremente de un punto a otro. En realidad, la mayoría de los materiales permiten el movimiento de cargas bajos ciertas condiciones, pero aquí sólo se quiere resaltar que por el nombre *conductor* se entiende un medio que contiene elementos de carga y también que estos elementos tienen libertad para moverse bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado.

En un sentido amplio, entonces, los materiales pueden clasificarse en términos de su *conductividad* σ , en siemens por metro (S/m), como *conductores* y *no conductores*, o técnicamente como metales y aislantes (o dieléctricos). La conductividad de un material es una medida de la facilidad con la cual los electrones pueden desplazarse por el material bajo la influencia de un campo eléctrico externo. La conductividad de un material usualmente depende de la temperatura y la frecuencia. Un material de *alta conductividad* ($\sigma \gg 1$) se conoce como un *conductor* (metal), en tanto que uno con *baja conductividad* ($\sigma \ll 1$) se conoce como un *aislante* o *dieléctrico*. Un material cuya conductividad está entre esos dos extremos mencionados se denomina un *semiconductor*.

La conductividad de los metales, como ya se mencionó, es una función de la temperatura. La *resistividad*, que es el recíproco de la conductividad, varía casi linealmente con la temperatura en la zona de la temperatura ambiente, y para el aluminio, cobre o plata crece cerca de 0.4 por ciento por 1 K de aumento en la temperatura. A temperaturas cerca del cero absoluto (T = 0 K), la resistividad cae abruptamente a cero (conductividad infinita); esta propiedad se denomina *superconductividad*. El cobre y la plata no son superconductores, aunque el plomo y el aluminio sí lo son para temperaturas inferiores a 1.14 K.

Para los efectos de estas notas, sólo estaremos interesados en metales y dieléctricos, Microscópicamente, la diferencia principal entre un metal y un aislante está en el número de electrones disponibles para la conducción de corriente. Los materiales dieléctricos tienen pocos electrones de conducción, en tanto que los metales tienen abundancia de electrones libres.

En la ingeniería eléctrica el voltaje (o diferencia de potencial) y la corriente eléctrica son dos cantidades fundamentales. En el Cap. 2 se consideró el potencial. Antes de examinar cómo se comporta el campo eléctrico en un conductor o en un dieléctrico, es conveniente considerar la corriente eléctrica. Ésta es producida generalmente por el movimiento de cargas eléctricas.

La *corriente* que atraviesa un área dada es la carga eléctrica neta que pasa por esa área por unidad de tiempo.

Es decir,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$
(3.1)

La unidad de corriente es el culombio por segundo o amperio. Así, una corriente de un amperio transfiere carga con un ritmo de un culombio por segundo. La dirección de referencia positiva de la corriente es la dirección en la cual fluye la carga positiva. Una corriente debe fluir a través de un área finita; por tanto no es una función puntual.

El concepto básico de la corriente eléctrica es la tasa de flujo de la carga, y por tanto se esperaría tener un vector de flujo asociado con la corriente. En la teoría del campo electromagnético se define una función vectorial puntual, la *densidad de corriente de volumen* (o simplemente la *densidad de corriente*) J, la cual mide la cantidad de corriente que fluye a través de un área unitaria normal a la dirección del flujo de corriente. Así, si a través de una superficie plana ΔS fluye una corriente ΔI , la densidad de corriente es

0

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$
$$\Delta I = J \Delta S \tag{3.2}$$

suponiendo que la corriente es perpendicular a la superficie. Si la densidad de corriente no es normal a la superficie, entonces

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S} \tag{3.3}$$

y, pasando al límite, la corriente total que atraviesa la superficie es

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$
(3.4)

Es decir, el concepto de la densidad de corriente se extiende a una situación para la cual **J** no es constante y la superficie *S* no es plana.

Ahora se estudiará un poco mejor la definición de la densidad de corriente. La definición matemática de J es

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{a}}_{I} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}$$
(3.5)

y se interpreta así: ΔI es la corriente que atraviesa el elemento de superficie infinitesimal ΔS , el cual está orientado en la dirección perpendicular a la del flujo de ΔI y por ello corta el máximo valor de la corriente; $\hat{\mathbf{a}}_I$ es un vector unitario en la dirección de la corriente y es por tanto también el vector unitario normal a ΔS . A J se le llama una "distribución de volumen" de corriente, ya que ella especifica la densidad de corriente en todos los puntos en una región. Sin embargo, como lo implica la ecuación de definición, J se mide en *amperios por metro cuadrado*. Así pues, J parece ser algún tipo de "densidad de superficie". Lo que pareciese ser una paradoja puede aclararse mediante el concepto de un *elemento de corriente*, definido como el producto de la magnitud de una corriente y la longitud en la cual se extiende. Un elemento de volumen Δv puede expresarse como el producto de una sección transversal ΔS perpendicular a la corriente y una longitud infinitesimal $\Delta \ell$ en la dirección de la corriente; es decir, $\Delta v = \Delta S \Delta \ell$. La cantidad $J\Delta v = J\Delta S \Delta \ell = \Delta I \Delta \ell$ es, por tanto, un elemento de corriente incremental y se puede escribir la Ec. (3.5) como

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{a}}_{I} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta I \Delta \ell}{\Delta v}$$
(3.6)

poniendo en evidencia que J es una densidad de volumen de elementos de corriente.

Dependiendo de la forma en que se produce I, hay diferentes tipos de densidades de corriente: densidad de *corriente de convección*, densidad de *corriente de conducción* y densidad de *corriente de desplazamiento*. Ahora se considerarán las densidades de corriente de conducción y de convección. Lo que se debe mantener en mente es que la Ec. (3.4) aplica a cualquier tipo de densidad de corriente. Comparada con la definición general de flujo, la Ec. (3.4) muestra que la corriente I a través de la superficie S es simplemente el flujo del vector densidad de corriente **J**.

La *corriente de convección* no involucra conductores y en consecuencia *no satisface la ley de Ohm*. Una corriente de convección es una en donde pareciese que un material se mueve como un volumen de masa, llevando consigo toda una carga neta asociada con él. Esta corriente depende del movimiento del observador, ya que si el observador se moviese junto con el material cargado en movimiento, la densidad de corriente aparecería como igual a cero. Ocurre cuando fluye una corriente a través de un medio aislante, tal como un líquido, gas enrarecido o un haz de electrones en un tubo o válvula de vacío. Considérese un filamento como el que se muestra en la Fig. 3.1. Si existe un flujo de carga, de densidad ρ_v , con velocidad $\mathbf{u} = u_y \hat{\mathbf{a}}_y$, por la Ec. (3.1) la corriente que atraviesa el filamento es entonces

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta y}{\Delta t} = \rho_v \Delta S u_y \tag{3.7}$$

La *densidad de corriente* en un punto dado se define como la corriente que pasa por un área normal unitaria en ese punto. En la Fig. 1, la dirección de corriente es en la dirección de y, y entonces J_y está dada por

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y \tag{3.8}$$

El mismo procedimiento se puede aplicar en las otras dos direcciones y, por tanto, en general, se tiene que

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\rho}_{v} \mathbf{u} \tag{3.9}$$



Figura 3.1

Aquí, la corriente I es la corriente de convección y J es la densidad de corriente de convección en amperios por metro cuadrado (A/m^2) .

La *corriente de conducción* necesita de un conductor y usualmente denota el movimiento de portadores de carga a través de un medio neutral, como electrones en un alambre metálico o iones en una solución. La diferencia crucial con la corriente de convección, es que la corriente de conducción es independiente del movimiento del observador debido al movimiento relativo de las cargas positivas y negativas en el medio. Un conductor tiene un gran número de electrones débilmente ligados en las capas más externas de los átomos. En la ausencia de un campo eléctrico externo, estos electrones libres se mueven en direcciones aleatorias y con diferentes velocidades. Su movimiento aleatorio produce una corriente cuyo promedio es igual a cero en el conductor. Sin embargo, al aplicar un campo eléctrico externo, los electrones se mueven de un átomo al siguiente a lo largo de una dirección opuesta a la del campo externo. Cuando se aplica un campo eléctrico E, la fuerza sobre un electrón con carga (-e) es

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \tag{3.10}$$

Puesto que el electrón no está en el espacio libre, no experimentará una aceleración promedio bajo la influencia del campo eléctrico. Más bien, choca constantemente con la estructura atómica y se mueve a la deriva entre los átomos, y sus movimientos, caracterizados por una velocidad promedio denominada la *velocidad de arrastre* del electrón, \mathbf{u}_{e} , dan lugar a una *corriente de conducción*. Si un electrón con masa *m* está moviéndose en un campo eléctrico **E**, con una velocidad de arrastre \mathbf{u}_{e} , de acuerdo con la ley de Newton, el cambio promedio en el momento del electrón libre debe igualar la fuerza aplicada. Así

mu,

0

$$\frac{-\tau}{\tau} = -e\mathbf{E}$$

$$\mathbf{u}_e = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E} = -\mu_e\mathbf{E}$$
(3.11)

donde τ es el tiempo promedio entre colisiones y μ_e es una propiedad del material llamada la *movilidad electrónica* con unidades de $(m^2 / V \cdot s)$. Esta ecuación indica que la velocidad de arrastre del electrón es directamente proporcional al campo aplicado. Si hay *n* electrones por unidad de volumen, la densidad de carga electrónica es dada entonces por

$$\rho_v = -ne \tag{3.12}$$

de modo que la densidad de corriente de conducción es

0

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\rho}_{v} \mathbf{u}_{e} = \frac{ne^{2}\tau}{m} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}$$
(3.13)

donde $\sigma = ne^2 \tau/m$ es la *conductividad* del material conductor. La relación en la Ec. (3.13) se conoce como la forma puntual de la *ley de Ohm para campos*.

3.3 Conductores

Como ya se mencionó, un conductor tiene una abundancia de carga que tiene bastante libertad para moverse. Considérese un conductor aislado como el ilustrado en la Fig. 3.2*a*. Cuando se aplica un campo eléctrico externo E_e , las cargas libres positivas son empujadas en la misma dirección que el campo aplicado, en tanto que las cargas negativas se mueven en la dirección opuesta. Este movimiento de cargas ocurre muy rápidamente. Las cargas libres hacen lo siguiente. Primero, se mueven acumulándose en la superficie del conductor y forman lo que se denomina una *carga superficial inducida*. Segundo, las cargas inducidas establecen un *campo inducido interno* E_i , el cual cancela el campo aplicado externamente E_e . Las cargas se redistribuyen en una forma tal que tanto la carga como el campo se anulan en el interior. El resultado se ilustra en la Fig. 3.2*b*. Esto conduce a una propiedad importante de un conductor:

Un *conductor perfecto* ($\sigma = \infty$) no puede mantener un campo electrostático en su interior; esto es, en electrostática, **E** = 0 en el interior de conductores.



Figura 3.2

Otra forma de analizar esta situación es considerar la ley de Ohm, $J = \sigma E$. Para mantener una densidad de corriente J finita en un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) se requiere que el campo eléctrico en el conductor se anule. En otras palabras, $E \rightarrow 0$ porque $\sigma \rightarrow \infty$ en un conductor perfecto. Si se introducen algunas cargas en el interior de este conductor, las cargas se moverán hacia la superficie y se redistribuirán rápidamente en una forma tal que el campo dentro del conductor se anula. De acuerdo con la ley de Gauss, si E = 0, la densidad de carga ρ_v debe ser cero. Se concluye entonces, una vez más, que un conductor perfecto no puede sostener un campo electroestático en su interior; es decir, bajo condiciones estáticas se tiene que

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \ \rho_v = 0$$
 en el interior de un conductor (3.14)

La distribución de carga en la superficie de un conductor depende de la forma de la superficie. Obviamente, las cargas no estarían en equilibrio si existiese una componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico que produzca una fuerza para mover las cargas. En otras palabras, bajo condiciones estáticas, el campo **E** en la superficie de un conductor es *normal* en todas partes a la superficie; es decir, *la superficie de un conductor es una superficie equipotencial bajo condiciones estáticas.* También, como $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ en todas partes en el interior de un conductor, *todo el conductor* tiene el mismo potencial electrostático. Como σ es del orden de 10⁶ S/m para la mayoría de los metales, tales como plata, cobre, oro y aluminio, se acostumbra tomar $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ en conductores metálicos.

Tenemos entonces las siguientes conclusiones para un conductor:

- **1.** En el interior de un conductor aislado, la densidad de carga microscópica será cero, esto es, $\rho_v = (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$ en todas partes en el interior de un conductor.
- 2. La afirmación 1 implica que, en electrostática, una carga neta sólo puede existir en la superficie del conductor. En realidad, la carga existirá en una región cerca de la superficie del conductor y el campo eléctrico penetrará ligeramente en el conductor. Desde un punto de vista macroscópico, suponer que la carga está en la superficie es una excelente aproximación.
- **3.** El campo electrostático externo en la superficie del conductor es perpendicular a la superficie. Si esto no fuese así, se ejercerían fuerzas sobre la carga para moverla lateralmente, creando una condición no estática, lo que violaría nuestras precondiciones. En electrostática, E_{tangencial} = 0. Además, si el conductor es finito y está aislado, la carga se reacomodará ella misma para anular cualquier componente natural del campo eléctrico alcanzado así una condición estática.
- 4. La magnitud del campo electrostático en la superficie del conductor es ρ_s/ϵ_0 , donde ρ_s es la densidad de carga superficial. Esto se demuestra en la forma siguiente: Si existe un campo E fuera del conductor y es cero en el interior del conductor, $\nabla \cdot E$ diverge a infinito en la superficie, lo que implica que allí existe una densidad de carga infinita. En otras palabras, allí existe una densidad de carga superficial. Para hallar su
magnitud, aplicamos la ley de Gauss a un volumen en forma de disco que abarca un elemento de área Δa . Conforme el espesor del disco se encoge a cero, el flujo eléctrico en ambos lados del disco perpendicular a la superficie se vuelve despreciablemente pequeño puesto que el campo en la superficie misma se acerca perpendicularmente a ella. Como el campo en el interior del conductor es cero, el flujo total que sale del disco proviene del elemento de superficie ΔS fuera del conductor. Si ΔS es lo suficientemente pequeño, el flujo de E a través del elemento es dado por $\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}$, donde E se toma como el valor en el centro de Δa . Como un resultado, se obtiene

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} = \rho_s \frac{\Delta S}{\varepsilon_0}$$

de modo que en la superficie del conductor

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \qquad \mathbf{o} \qquad \rho_s = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{3.15}$$

Considérese ahora un conductor entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial *V*, como muestra la Fig. 3.3. Observe que en este caso, **E** es diferente de cero en el interior del conductor como en el caso de la Fig. 3.2. La diferencia es que no hay equilibrio estático, ya que el conductor no está aislado sino que está conectado a una fuente de fuerza electromotriz, que hace que las cargas se muevan y evita el establecimiento de un equilibrio electrostático. De modo que en este caso debe existir un campo eléctrico dentro del conductor para mantener el flujo de corriente. Conforme los electrones se mueven, encuentran ciertas fuerzas de amortiguamiento llamadas *resistencia*. Con base en la ley de Ohm dada por la Ec. (3.13), se derivará la resistencia de material conductor.



Figura 3.3

Supóngase que el conductor tiene una sección transversal *uniforme* de área *S* y longitud ℓ . La dirección del campo eléctrico **E** producido por la fuente externa es la misma que la dirección del flujo de las cargas positivas o de la corriente *I*. Esta dirección es opuesta a la del flujo de electrones. Supóngase también que **J** y **E** son uniformes; en este caso

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

у

$$V_{ab} = -\int_{b}^{a} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\mathbf{E} \cdot \int_{b}^{a} d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}_{ab} = E\boldsymbol{\ell}$$

Como el conductor tiene una sección transversal uniforme,

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{\ell}$$

0



 $V = \frac{\ell}{\sigma S} I$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$$

$$\overline{R = \rho_c \ell / S}$$
(3.16)

0

donde $\rho_c = 1/\sigma$ es la *resistividad* del material. La Ec. (3.16) es útil para determinar la resistencia de cualquier conductor que tenga una sección transversal uniforme.

Si la sección transversal del conductor no es uniforme, la Ec. (3.16) no puede aplicarse. Sin embargo, la definición básica de resistencia como el cociente entre la diferencia de potencial V entre los extremos del conductor y la corriente que lo atraviesa todavía es aplicable. Por tanto, se generaliza el resultado y la resistencia R de un conductor de sección transversal arbitraria se define por

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_{C} \mathbf{E} \cdot d\ell}{\int_{S} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$
(3.17)

Observe que se omite el signo negativo antes de $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ porque $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} < 0$ si I > 0. La integral de línea de E se evalúa en una trayectoria *L* entre dos puntos especificados.

Aunque la fórmula dada por la Ec. (3.17) es bastante sencilla en concepto y forma, las integrales no pueden evaluarse antes de tener una solución detallada para el campo E o para la densidad de corriente J. Para un conductor de forma general esto no posible normalmente y hay que recurrir a métodos de análisis aproximados o experimentales para obtener la resistencia *R*.

Se puede formular otra expresión para *R* que demuestra más claramente las propiedades geométricas de la resistencia. Aquí se supone que se conoce la distribución del campo y de la corriente en todas partes en el interior del conductor. En la Fig. 3.4 se ilustra un conductor general y dos superficies transversales equipotenciales S_i y S_{i+1} . Suponga que la diferencia de potencial entre estas dos superficies es ΔV_i . El volumen entre S_i y S_{i+1} puede descomponerse en varios tubos de flujo elementales de longitud Δl_i y sección transversal ΔS_j . Para cada tubo elemental, la resistencia r_j es dada por

$$r_j = \frac{\Delta V_i}{\Delta I_j} = \frac{E \,\Delta I_i}{\sigma E \,\Delta S_j}$$

La conductancia de este tubo de flujo es

$$g_j = r_j^{-1} = \frac{\sigma \Delta S_j}{\Delta I_i}$$

Como las conductancias en paralelo se suman directamente, la conductancia total entre las superficies S_i y S_{i+1} es

$$\Delta G_i = \sum_j g_j = \sum_j \frac{\sigma \Delta S_j}{\Delta I_i}$$
(3.18)

y la resistencia correspondiente es

$$\Delta R_i = \frac{1}{\sum_j \frac{\sigma \Delta S_j}{\Delta I_i}}$$
(3.19)

En general, ΔI_i variará en la sección transversal puesto que la separación entre las superficies equipotenciales no es necesariamente uniforme. Si dividimos todo el conductor en *n* de estas secciones, entonces la Ec. (3.19) es la resistencia de la *i*-ésima sección. La resistencia total es la combinación en serie de todas las ΔR_i y es dada por



Figura 3.4 Dos superficies equipotenciales en un conductor arbitrario.

$$R = \sum_{i} \frac{1}{\sum_{j} \frac{\sigma \Delta S_{j}}{\Delta I_{i}}}$$
(3.20)

Para obtener una fórmula significativa, se introduce un conjunto adecuado de coordenadas curvilíneas ortogonales (véase la Sección 1.20). La distancia *dl* a lo largo de las líneas de flujo es dada por $h_1 du_1$. Suponiendo las coordenadas u_2 y u_3 sobre la superficie de potencial constante, el área de la sección transversal es dada entonces por $\Delta S_i = h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3$. Ahora la Ec. (3.20) se puede escribir como

$$R = \sum_{i} \frac{1}{\sum_{h_{j}} \frac{\sigma h_{2} h_{3} \left(\Delta u_{2} \Delta u_{3}\right)_{j}}{h_{1} \left(\Delta u_{1}\right)_{i}}}$$
$$= \sum_{i} \frac{\left(\Delta u_{1}\right)_{i}}{\sum_{h_{j}} \frac{\sigma h_{2} h_{3}}{h_{1}} \left(\Delta u_{2} \Delta u_{3}\right)_{j}}$$

puesto que u_1 , u_2 y u_3 son variables independientes debido a su ortogonalidad mutua. En el límite se obtiene

$$R = \int_{0}^{L} \frac{du_{1}}{\int_{S} \frac{\sigma h_{2} h_{3}}{h_{1}} du_{2} du_{3}}$$
(3.21)

que es claramente una función de la geometría del conductor solamente.

Ejemplo 1. Resistencia de una Sección de un Resistor Esférico

Considere una porción de un resistor esférico obtenida al cortar una sección cónica de semiángulo θ_0 , como se muestra en la Fig. 3.5(*a*). Las superficies en los extremos r = a y r = b se mantienen a potenciales V y 0, respectivamente. En consecuencia, todas las superficies r = constante son superficies equipotenciales. En una superficie equipotencial, el elemento de área *dS* puede describirse en términos de las coordenadas esféricas θ y ϕ , como en la Fig. 3.5(*b*). La separación entre las superficies equipotenciales es simplemente *dr*.

Las coordenadas curvilíneas u_1 , u_2 y u_3 y los factores de escala h_1 , h_2 y h_3 en este caso son

$$u_1 = r, h_1 = 1$$
 $u_2 = \theta, h_2 = r$ $u_3 = \phi, h_3 = r \sin \theta$

Al aplicar la Ec. (3.21), se obtiene la siguiente expresión para la resistencia:



Figura 3.5. (a) Un resistor cónico; (b) coordenadas curvilíneas ortogonales en una superficie equipotencial.

$$R = \int_{a}^{b} \frac{dr}{\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\theta_{0}} \sigma r^{2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi} = \int_{a}^{b} \frac{dr}{\sigma r^{2} 2\pi (1 - \cos \theta_{0})}$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma (1 - \cos \theta_{0})} \frac{b - a}{ab}$$
(3.22)

El recíproco de R se llama la conductancia G, y su unidad es el siemens (S). Para un resistor lineal de sección uniforme,

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\sigma A}{l} \quad (S) \tag{3.23}$$

La potencia P (en vatios, W) se define como el ritmo de cambio de la energía W (en julios, J) o el producto de la fuerza por la velocidad. Por tanto,

$$P = \int_{v} \rho_{v} dv \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \int_{v} \mathbf{E} \cdot (\rho_{v} \mathbf{u}) dv$$

$$P = \int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$
(3.24)

0

la cual se conoce como la *ley de Joule*. La densidad de potencia
$$w_P$$
 (en W/m²) la da el integrando en la Ec. (3.24); es decir,

$$w_P = \frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{\sigma} E^2 \tag{3.25}$$

Para un conductor con sección transversal uniforme, $dv = dSd\ell$, y la Ec. (3.24) se convierte en

. . . .

$$P = \int_{L} Ed\ell \int_{S} JdS = VI$$
$$P = I^{2}R$$

0

Ejemplo 2. Si $J = \frac{1}{r^3} (2\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta)$ (A/m²), calcúlese la corriente que pasa por (a) un cascarón hemisférico de radio 20 cm, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$; y (b) un cascarón esférico de 10 cm de radio.

Solución: Se tiene que $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, donde $d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{a}}_r$ en este caso. Entonces

(a)
$$I = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^3} 2\cos\theta r^2 \sin\theta d\phi d\theta \bigg|_{r=0.2} = \frac{2}{r} 2\pi \frac{\sin^2\theta}{2} \bigg|_{0}^{\pi/2} = 10\pi$$

(b) Aquí la única diferencia es que $0 \le \theta \le \pi$ en vez de $0 \le \theta \le \pi/2$ y r = 0.1. Por tanto,

$$I = \frac{4\pi}{0.1} \frac{\sin^2 \theta}{2} \bigg|_0^{\pi} = 0$$

Ejemplo 3. Conductancia de un Cable Coaxial

Los radios de los conductores interno y externo de un cable coaxial *l* son *a* y *b*, respectivamente, (Fig. 3.6). El material aislante tiene conductividad σ . Obtenga una expresión para *G*', la conductancia por unidad de longitud de la capa aislante.

Solución: Sea *I* la corriente total que fluye desde el conductor interno hacia el externo a través del material aislante. A cualquier distancia *r* del eje del conductor central, el área a través de la cual fluye la corriente es $A = 2\pi rl$. Por tanto,

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{I}{A} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{I}{2\pi r l}$$
(3.26)

y de **J** = σE ,

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \frac{l}{2\pi\sigma r l} \tag{3.27}$$

En un resistor, la corriente fluye desde el potencial más alto al más bajo. Por tanto, si **J** está en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$, el conductor interno debe estar a un potencial mayor que el conductor externo. En consecuencia, la diferencia de voltaje entre lo conductores es

$$V_{ab} = -\int_{b}^{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{b}^{a} \frac{I}{2\pi\sigma l} \frac{\hat{\mathbf{a}}_{\rho} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\rho} dr}{r}$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
(3.28)

La conductancia por unidad de longitud es entonces

$$G' = \frac{G}{l} = \frac{1}{Rl} = \frac{I}{V_{ab}l} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (S/m)$$
(3.29)



Figura 3.6. Cable coaxial del Ejemplo 3.

3.4 Polarización en Dieléctricos

En la Sec. 3.2 se señaló que la principal diferencia entre un conductor y un dieléctrico reside en la disponibilidad de electrones libres para conducir corriente en las capas atómicas más alejadas del núcleo. En la ausencia de un campo eléctrico, los electrones en cualquier material forman una nube simétrica en torno al núcleo, con el centro de la nube en la misma posición que el centro del núcleo. El campo eléctrico generado por el núcleo cargado positivamente atrae y sostiene la nube de electrones a su alrededor, y la repulsión mutua de las nubes de electrones de átomos adyacentes le da a la materia su forma. Aunque las cargas en un dieléctrico no pueden moverse libremente, las fuerzas que impiden ese movimiento son finitas y es de esperar que se produzca cierto desplazamiento cuando se aplica una fuerza externa.

Cuando un conductor se somete a un campo eléctrico aplicado externamente, los electrones más débilmente ligados en cada átomo pueden saltar fácilmente de un átomo al siguiente, estableciendo así una corriente eléctrica. Sin embargo, en un dieléctrico, un campo eléctrico aplicado externamente E_{ext} no puede producir migraciones de cargas ya que éstas no pueden moverse libremente.

Para entender el efecto macroscópico de un campo eléctrico sobre un dieléctrico, considérese un átomo del dieléctrico como consistente de una carga negativa -Q (nube de electrones) y una carga positiva +Q (núcleo). Se puede tener una imagen similar para una molécula de un dieléctrico y considerar a todos los núcleos en las moléculas como cargas puntuales positivas, y la estructura electrónica como una sola nube de carga negativa. Como se tienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas, todo el átomo o la molécula normalmente es neutra y no tiene momento de dipolo. Cuando se aplica un campo eléctrico E_{ext} , el núcleo del átomo tiende a moverse en la dirección de E_{ext} en tanto que los electrones en el átomo tienden a moverse en la dirección opuesta. Tan pronto como ocurren estos movimientos, se establecen fuerzas eléctricas restauradoras entre las cargas opuestas que tienden a regresar las condiciones a su estado original. Estas fuerzas restauradoras llevan el átomo al equilibrio, con el centro de la carga positiva desplazado del centro de la carga negativa por una distancia muy pequeña, de modo que el átomo adquiere así un momento dipolar inducido, y se dice que el dieléctrico como un todo está *polarizado*. En este estado, la nube electrónica es distorsionada por el campo eléctrico aplicado E_{ext} . Esta distribución de carga distorsionada es equivalente, por el principio de superposición, a la distribución original más un dipolo cuyo momento es

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{3.30}$$

donde **d** es el vector distancia dirigido desde la carga electrónica efectiva -Q hasta la carga efectiva del núcleo +Q, y **p** es el **momento dipolar** del átomo. Si hay *N* dipolos en un volumen Δv del dieléctrico, el momento dipolar total debido al campo eléctrico es

$$Q_1 \mathbf{d}_1 + Q_2 \mathbf{d}_2 + \dots + Q_N \mathbf{d}_N = \sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{d}_k$$
(3.31)

Como una medida de la intensidad de la polarización, se define el vector de la *polarización* **P** (en C/m³) como el *momento dipolar por unidad de volumen* del dieléctrico (densidad de momento dipolar); es decir,

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \mathbf{d}_k}{\Delta v} = N\mathbf{p}$$
(3.32)

Se concluye entonces que el principal efecto del campo eléctrico **E** sobre un dieléctrico es la creación de momentos dipolares que se alinean en la dirección de **E**. Este tipo de dieléctrico se llama *no polar*. Ejemplos de estos dieléctricos son el hidrógeno, oxígeno, nitrógeno y los gases raros. Las moléculas no polares no poseen dipolos hasta que no se aplica un campo eléctrico.

Además de la polarización inducida de los átomos, muchas sustancias tienen una polarización permanente causada, por ejemplo, por el hecho de que las *moléculas* son asimétricas. Cuando dos átomos neutros se combinan para formar una molécula, con frecuencia los electrones de un átomo se desplazan hacia el segundo átomo, dando así a la molécula un momento dipolar permanente. Este momento permanente usualmente es

considerablemente mayor que el momento dipolar atómico inducido. Los dieléctricos con moléculas que tienen momentos dipolares permanentes se denominan *sustancias polares*. En el estado normal, cuando no hay campo eléctrico externo **E**, la mayoría de las sustancias polares no tienen ninguna polarización ya que la agitación molecular dependiente de la temperatura resulta en una distribución aleatoria. Sin embargo, hay algunas sustancias, llamadas *ferroeléctricas*, en las cuales la fuerza de alineación es lo suficientemente fuerte para hacerse sentir a pesar del efecto de aleatoriedad del calor.

Las moléculas polares tienden a alinearse con el campo eléctrico externo. Pero las moléculas no polares también desarrollan un momento dipolar inducido en un campo externo; hay diferentes mecanismos por los cuales un cuerpo puede polarizarse. En prácticamente todos los dieléctricos, la polarización inducida por el campo no es una propiedad permanente sino una que existe solamente cuando **E** está presente. Cuando se remueve el campo, el dieléctrico regresa a su estado no polarizado normal. Hay sustancias en las cuales se puede hacer que la polarización se vuelva permanente por un tiempo apreciable, aun después de remover el campo. Una sustancia de este tipo se denomina un *electret*. Es el análogo eléctrico del imán permanente; tienen aplicaciones importantes en micrófonos de alta fidelidad.

Ahora se calculará el campo debido a un dieléctrico polarizado. Considérese el material dieléctrico mostrado en la Fig. 3.7 y el cual consiste de dipolos con momento **P** por unidad de volumen. De acuerdo con la Ec. (2.72), el potencial dV en un punto exterior P debido al momento del dipolo **P**dv es (véase la Fig. 3.8)

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_R dv'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$
(3.33)

donde $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ y *R* es la distancia entre el elemento de volumen *dv'* en (x', y', z') y el punto del campo P(x, y, z).



Figura 3.7

Se puede transformar la Ec. (3.33) en una forma que facilita la interpretación física. Es fácil demostrar que el gradiente de 1/R con respecto a las coordenadas con tilde es

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{\mathbf{a}}_R}{R^2}$$

donde ∇' es el operador nabla aplicado con respecto a las coordenadas (x', y', z'). Entonces

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R}\right)$$



Figura 3.8

Aplicando la identidad vectorial $\nabla' \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f$, se obtiene

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R}$$
(3.34)

► v

Sustituyendo esta relación en la Ec. (3.33) e integrando sobre todo el volumen v' del dieléctrico, se obtiene

$$V = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] dv$$

y la aplicación del teorema de la divergencia al primer término conduce a la relación

$$V = \oint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}'_n}{4\pi\varepsilon_0 R} dS' + \int_{v'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\varepsilon_0 R} dv'$$
(3.35)

donde \hat{a}'_n es la normal unitaria saliente desde la superficie dS' del dieléctrico. Comparando los dos términos en el lado derecho de la Ec. (3.35) con las Ecs. (2.54) y (2.55) se ve que los dos términos denotan el potencial debido a distribuciones de carga de superficie y de volumen (las tildes no se necesitan):

$$\mathbf{\rho}_{ps} \triangleq \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{pv} \triangleq -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{3.37}$$

En otras palabras, la Ec. (3.35) revela que si ocurriese polarización, en todo el dieléctrico se formará una densidad de carga de volumen equivalente ρ_{pv} , en tanto que en la superficie se formará una densidad de carga de superficie equivalente ρ_{ps} . A a ρ_{pv} y ρ_{ps} se les refiere como *densidades de carga de polarización de volumen y superficie ligadas*, para diferenciarlas de las densidades de cargas *libres* ρ_v y ρ_s . Las cargas ligadas son aquellas que no tienen libertad de movimiento en el interior de un material dieléctrico; son producidas por el desplazamiento que ocurre en una escala molecular durante la polarización. Las cargas libres son aquellas capaces de moverse distancias macroscópicas, como lo hacen los electrones en un conductor; esto se puede controlar. La carga ligada positiva total en la superficie *S* que delimita al dieléctrico es

$$Q_b = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \rho_{ps} dS \tag{3.38}$$

en tanto que la carga que permanece en el interior de S es

$$-Q_b = \int_{v} \rho_{pv} dv = -\int_{v} \nabla \cdot \mathbf{P} \, dv \tag{3.39}$$

Si todo el dieléctrico era eléctricamente neutro antes de la aplicación del campo eléctrico y si no se ha añadido carga libre, el dieléctrico permanecerá eléctricamente neutro. De modo que la carga total en el dieléctrico permanecerá igual a cero, es decir,

carga total =
$$\oint_{S} \rho_{ps} dS + \int_{v} \rho_{pv} dv = Q_b - Q_b = 0$$

Considérese ahora el caso en que la región dieléctrica contiene cargas libres. Si ρ_v es la densidad de volumen de carga libre, la densidad de carga de volumen total ρ_t es dada por

$$\rho_t = \rho_v + \rho_{vv} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{3.40}$$

Por tanto,

$$\rho_{v} = \nabla \cdot \varepsilon_{0} \mathbf{E} - \rho_{pv}$$

$$= \nabla \cdot (\varepsilon_{0} \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{D}$$
(3.41)

donde

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.42}$$

Se concluye que el efecto neto del dieléctrico sobe el campo eléctrico **E** es el de incrementar la *densidad de flujo eléctrico* (o *vector de desplazamiento eléctrico*) **D** en su interior por una cantidad **P**. En otras palabras, la aplicación de **E** al material dieléctrico hace que la densidad de flujo sea mayor que lo que sería en el espacio libre. Se debe señalar que la definición de **D** en la Ec. (2.31) para el espacio libre es un caso especial de la dada en la Ec. (3.42), ya que **P** = **0** en el espacio libre; también que **D** es realmente la densidad debida a las cargas libres. Con esta definición de **D** en la Ec. (3.42), la ley de Gauss generalizada toma la forma final

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libre en } S} \tag{3.43}$$

En algunos dieléctricos, **P** es proporcional al campo eléctrico aplicado **E** (el dieléctrico es lineal), y se tiene que

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{3.44}$$

donde χ_e , conocida como la *susceptibilidad eléctrica* del material, es, en cierta forma, una medida de lo susceptible que es un dieléctrico dado a campos eléctricos. La Ec. (3.44) es muy conveniente en problemas que tratan con dieléctricos.

3.5 Constante y Resistencia Dieléctricas

Sustituyendo la Ec. (3.44) en la Ec. (3.42), se obtiene

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \left(1 + \boldsymbol{\chi}_e \right) \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r \mathbf{E} \tag{3.45}$$

0

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.46}$$

donde

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r} \tag{3.47}$$

у

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$
(3.48)

En las Ecs, (3.45) a (3.48), ε se denomina la *permitividad* del dieléctrico, ε_0 es la permitividad del espacio libre y ε_r se conoce como la *constante dieléctrica* o *permitividad relativa*.

La **constante dieléctrica** (o **permitividad relativa**) ε_r es el cociente entre la permitividad del dieléctrico y la del espacio libre.

La polarización del dieléctrico se expresa en términos de la permitividad relativa y, por tanto, las cargas de polarización no tienen que considerarse en una forma explícita. También se debe señalar que los parámetros ε_r y

 χ_e son adimensionales en tanto que ε y ε_0 están en faradios por metro. Como la susceptibilidad eléctrica, χ_e , siempre es mayor que cero, la permitividad relativa, ε_r , siempre es mayor que uno.

Ejemplo 4. Una carga puntual positiva Q está situada en el centro de un cascarón dieléctrico de radio interno r_i y radio externo r_e (Fig. 3.9*a*). La constante dieléctrica es ε_r . Determine **E**, *V*, **D** y **P** en función de la distancia radial *r*.

Solución: Debido a la simetría esférica, se aplica la ley de Gauss para hallar los campos **E** y **D** en tres regiones; (a) $r > r_e$; (b) $r_i < r < r_e$; y (c) $r < r_i$.

(a) Para $r > r_e$:

 $\oint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_{r1} 4\pi r^{2} = \frac{Q}{\varepsilon_{0}}$ $E_{r1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}}$

у

$$V_1 = -\int_{-\infty}^r E_{r1} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

De las Ecs. (3.45) y (3.42), se obtiene que

$$D_{r1} = \varepsilon_0 E_{r1} = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad P_{r1} = 0$$



(b) En la región $r_i < r < r_e$:

La aplicación de la ley de Gauss en esta región produce los resultados

$$E_{r2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$
$$D_{r2} = \varepsilon E_{r2} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$
$$P_{r2} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

Observe que la expresión para D_{r2} es la misma que para D_{r1} y que tanto E_r como P_r tienen una discontinuidad en $r = r_e$. En esta región

$$V_{2} = -\int_{\infty}^{r_{e}} E_{r1} dr - \int_{r_{e}}^{r} E_{r2} dr = V_{1} \Big|_{r=r_{0}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{r_{e}}^{r} \frac{1}{r^{2}} dr$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r}} \right) \frac{1}{r_{e}} + \frac{1}{\varepsilon_{r}r} \right]$$

(c) Región $r < r_i$:

Puesto que aquí el medio es el mismo que en la región $r > r_e$, la aplicación de la ley de Gauss produce los mismos resultados para los campos **E**, **D** y **P**:

$$E_{r3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$D_{r3} = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad P_{r3} = 0$$

Ahora se calculará V_3 :

$$V_{3} = V_{2}|_{r=r_{i}} - \int_{r_{i}}^{r} E_{r3} dr$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r}}\right) \frac{1}{r_{e}} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r}}\right) \frac{1}{r_{i}} + \frac{1}{r} \right]$$

Las variaciones de D_r y V con la distancia radial r se grafican en las Figs. 3.9b y c. Observe que V es una curva continua.

La teoría sobre dieléctricos presentada hasta ahora supone dieléctricos ideales; éstos no existen en la práctica. Si el campo eléctrico es muy fuerte, sacará electrones completamente de las moléculas. Los electrones se acelerarán bajo la influencia del campo eléctrico, chocarán violentamente con la estructura de las moléculas y producirán daños permanentes en el material; se produce lo que se denomina un *efecto de avalancha*. El dieléctrico se vuelve conductor y pueden resultar corrientes muy grandes. Este fenómeno se conoce como *ruptura dieléctrica*. La ruptura dieléctrica ocurre en todo tipo de materiales dieléctricos y depende de la naturaleza del material, de la temperatura, humedad y del tiempo de aplicación del campo eléctrico. La máxima intensidad de campo eléctrico que un dieléctrico puede soportar sin ruptura se denomina la *resistencia dieléctrica* del material. La resistencia dieléctrica del aire, por ejemplo, es de 3 kV/mm. Cuando la intensidad del campo sobrepasa este valor, el aire se rompe. Ocurre ionización masiva seguida por chisporroteo (descarga corona). La carga tiende a concentrarse en puntos agudos, por lo que el campo en estos puntos es mucho más alto que en puntos con una menor curvatura. Los pararrayos se basan en este principio.

3.6 Dieléctricos Lineales, Isótropos y Homogéneos

Como ya se mencionó, un dieléctrico es *lineal* si **D** varía linealmente con **E**; de lo contrario es *no lineal*. Los materiales para los cuales ε o σ no varían en la región bajo consideración y por tanto son los mismos en todo punto (es decir, independientes de la posición) se dicen *homogéneos*. Se llaman *no homogéneos* cuando ε depende de las coordenadas espaciales. La atmósfera es un ejemplo típico de un medio no homogéneo; su permitividad varía con la altitud. Los materiales para los cuales **E** y **D** están en la misma dirección se denominan *isótropos*. Es decir, los dieléctricos isótropos son aquellos que tienen las mismas propiedades en todas las direcciones. Para materiales *anisótropos*, **D**, **E** y **P** no son paralelos; ε o χ tiene nueve componentes a los que colectivamente se les refiere como un *tensor*. Por ejemplo, en vez de la Ec. (3.46), se tiene

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{zy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$
(3.49)

para materiales anisótropos. Los materiales cristalinos y el plasma magnetizado son ejemplos de medios anisótropos. En cristales, los ejes de referencia pueden escogerse en las direcciones de los ejes principales del cristal, de manera que los términos fuera de la diagonal de la matriz de permitividad en la Ec. (3.49) sean cero. Se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$
(3.50)

Los medios que tienen la propiedad representada por la Ec. (3.50) se llaman *biaxiales*. Si también $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, se dice que el medio es *uniaxial*. Por supuesto, si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, entonces se tiene un medio isótropo.

Un **material dieléctrico** para el cual **D** = ϵ **E** aplica es *lineal* si la permitividad ϵ no cambia con el campo **E** aplicado, *homogéneo* si ϵ no cambia de punto a punto e *isótropo* si ϵ no cambia con la dirección. Aunque las Ecs. (3.33) a (3.42) son para materiales dieléctricos en general, las Ecs. (3.44) a (3.46) son sólo para materiales lineales e isótropos.

La misma idea es válida para un material no conductor en el cual $J = \sigma E$ aplica. El material es lineal si σ no varía con E, homogéneo si σ es la misma en todo punto e isótropo si σ no varía con la dirección.

La mayor parte del tiempo sólo estaremos interesados en medios lineales, homogéneos e isótropos. Para estos medios, todas las fórmulas derivadas en el Capítulo 2 para el espacio libre pueden aplicarse simplemente reemplazando ε_0 por $\varepsilon_0\varepsilon_r$.

Ejemplo 5. Una esfera dieléctrica de radio *a* y permitividad ε_r tiene una carga puntual Q_1 colocada en su centro. Calcule: (a) la densidad superficial de carga de polarización en la superficie de la esfera; (b) la fuerza ejercida por la carga sobre una carga puntual Q_2 colocada en la superficie de la esfera.

Solución: (a) Tomando el origen como la ubicación de la carga Q_1 , la intensidad de campo eléctrico a una distancia *a* es dada por

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2} \,\hat{\mathbf{a}}_r$$

También

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\chi_e Q_1}{4\pi \varepsilon_r a^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

y entonces

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_1}{4\pi\varepsilon_r a^2}$$

(b) De la ley de Coulomb, se obtiene que

$$\mathbf{F} = Q_2 \mathbf{E} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r a^2} \,\hat{\mathbf{a}}_r$$

Ejemplo 6. Una esfera dieléctrica de permitividad ε y radio *R* tiene su centro en el origen de un sistema de coordenadas esféricas y está polarizada radialmente con $\mathbf{P} = kr\hat{\mathbf{a}}_r$, donde *k* es una constante. Evalúe el potencial eléctrico en el centro de la esfera.

Solución: Puesto que no hay cargas libres (dieléctrico),

$$\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k r) = -3k$$

De la ley de Gauss, en el interior de la esfera, se tiene que

$$D_r(4\pi r^2) = (-3k)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
 o $E_r = \frac{D_r}{\varepsilon} = -\frac{kr}{\varepsilon}$

Por tanto, V en el centro de la esfera es dado por

$$V = -\int_{\infty}^{0} E_r dr = -\int_{\infty}^{R} 0 dr - \int_{R}^{0} \left(-\frac{kr}{\varepsilon}\right) dr = -\frac{kR^2}{2\varepsilon}$$

3.7 La Ecuación de Continuidad y el Tiempo de Relajación

La Ec. (3.4) establece que la corriente total a través de una superficie *S* es dada por

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Supóngase ahora que la superficie *S* en esta ecuación es cerrada. En virtud de la definición de corriente como el flujo de carga que atraviesa una superficie, se deduce que la integral de superficie en la Ec. (3.4) debe medir la pérdida de carga en la región encerrada por la superficie. No hay evidencia experimental que indique que bajo circunstancias ordinarias la carga puede ser creada o destruida (principio de conservación de la carga, Capítulo 2). Por tanto, se puede escribir que

$$\oint_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_{v} \boldsymbol{\rho}_{v} dv$$
(3.51)

donde v es el volumen encerrado por S. Esta ecuación puede considerase como una relación que expresa la *conservación de la carga*. El flujo de carga que cruza la superficie puede originarse de dos formas. La superficie S puede estar fija en el espacio y la densidad ρ_v puede ser una función tanto de las coordenadas como del tiempo; o la densidad de carga puede ser invariable en el tiempo, y la superficie se mueve en alguna forma prescrita. En este último caso, la integral en el lado derecho de la Ec. (3.51) es una función del tiempo debido a límites variables. Sin embargo, si la superficie es fija y la integral convergente, se puede reemplazar el operador d/dt por una derivada parcial dentro del signo de integración. Así pues,

$$\oint_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{v} \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} dv$$
(3.52)

Aplicando ahora el teorema de la divergencia a la Ec. (3.52), la integral de superficie cambia a una integral de volumen; es decir,

$$\int_{v} \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\int_{v} \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} dv$$
$$\int_{v} \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} \right) dv = 0$$
(3.53)

0

El integrando de la Ec. (3.53) es una función continua de las coordenadas y por tanto deben existir pequeñas regiones dentro de las cuales el integrando no cambia de signo. Si la integral debe anularse para volúmenes arbitrarios v, es necesario que el integrando sea idénticamente igual a cero en todas partes. En consecuencia, se obtiene la ecuación diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \tag{3.54}$$

que expresa la conservación de la carga en el entorno de un punto. En analogía con una relación equivalente en hidrodinámica, a la Ec. (3.54) se le refiere como la *ecuación de continuidad* (ya mencionada en el Cap. 1).

Si la densidad de carga es constante en todo punto de una región especificada, la corriente que entra a la región a través de la superficie de la frontera debe ser igual, en todo momento, a la corriente que sale. Entonces, para la superficie circundante,

$$\int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{3.55}$$

y en todo punto interior,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{3.56}$$

Cualquier movimiento caracterizado por cantidades escalares o vectoriales que son independientes del tiempo se conoce como *estacionario*. Así, un flujo de electricidad estacionario se define mediante un vector J que en todo punto en el interior de una región es constante en dirección y magnitud. Debido al carácter no divergente de esta distribución de corriente, se deduce que en el estado estacionario, todos los filamentos de corriente se cierran sobre sí mismos. El campo del vector J es *solenoidal*. También, la ley de corrientes de Kirchhoff se deduce de la Ec. (3.56).

Un teorema fundamental es el siguiente: *En el interior de una región donde la conductividad no es cero, no puede existir una distribución permanente de carga libre*. Esto se pude demostrar fácilmente cuando el medio es homogéneo y las relaciones entre **D** y **E** y **J** y **E** son lineales. Por la ecuación de continuidad se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$
(3.57)

Por otra parte, en un medio homogéneo,

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}_v}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

que al combinarse con la Ec. (3.57) conduce a

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0 \tag{3.58}$$

De manera que la densidad de carga en cualquier instante es

$$\rho_v = \rho_{v0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$
(3.59)

donde la constante de integración ρ_{v0} es la densidad de carga en el instante t = 0. La distribución inicial de la carga en el conductor decae exponencialmente con el tiempo en una forma completamente independiente del campo aplicado. Si la densidad de carga es inicialmente cero, permanecerá igual a cero para todo tiempo posterior.

El tiempo

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$
(3.60)

requerido para que la carga en cualquier punto decaiga a 1/e (= 36.8%) de su valor original se conoce como el *tiempo de relajación de la carga*. Supóngase que inicialmente la carga está concentrada en alguna región de un cuerpo conductor. Esta carga inicial comienza a desvanecerse en forma exponencial, pero según la Ec. (3.59), ninguna carga puede reaparecer *dentro* del conductor. ¿Qué le sucede? Puesto que la carga se conserva, el decaimiento de la carga en la región inicial debe estar acompañado por un flujo (o corriente) que sale de ella. La carga no se puede acumular en ningún otro punto interior; así que el flujo no tiene divergencia. Sin embargo, será detenido en la superficie externa del conductor y es allí donde reaparece la carga que se perdió en la región inicial.

Excepto en los peores conductores, el valor de τ es extremadamente pequeño. Es corto para buenos conductores y largo para buenos dieléctricos. Por ejemplo, para el cobre es de aproximadamente 1.53×10^{-19} segundos, y para el cuarzo fundido es de 51.2 días. Así que se puede considerar que para buenos conductores la carga se anulará en cualquier punto interior y reaparecerá en la superficie casi instantáneamente, en tanto que para buenos dieléctricos la carga introducida permanecerá allí por mucho tiempo.

3.8 Condiciones de Frontera

Hasta ahora sólo se ha considerado la existencia del campo eléctrico en un medio homogéneo. Si el campo existe en una región consistente de dos o más medios diferentes, aun cuando el campo sea continuo en cada uno de los medios, puede ser discontinuo en las fronteras entre ellos; las condiciones que debe cumplir el campo en la interfaz que separa los medios se denominan *condiciones de frontera*. Obviamente, estas condiciones serán dictadas por los tipos de materiales que conforman los medios. En lo que sigue, se supone que los campos son finitos en la superficie de frontera entre los medios.

Considérese ahora dos medios diferentes en contacto, como muestra la Fig. 3.10. Evaluando la relación integral dada por la primera ley de Maxwell para campos estáticos

$$\oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) dS = 0$$

en el volumen indicado en la figura, cuando Δh_1 y Δh_2 tienden a cero, se encuentra que

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}$$
(3.61)



Figura 3.10. Determinación de las condiciones de frontera.

Esta ecuación expresa que las componentes tangenciales de los vectores de la intensidad de campo son continuas al pasar del medio 1 al medio 2; es decir,

$$E_{1t} = E_{2t}$$
 (3.62)

Puesto que $D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t}$ y $D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t}$, la condición de frontera para la componente tangencial de la densidad de flujo eléctrico es

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$
(3.63)

Para deducir la condición que deben cumplir las componentes normales de los vectores del campo, se usará la ecuación

$$\oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}) dS = \int_{V} \rho_{v} dv$$
(3.64)

y se supondrá que la superficie de separación entre los medios puede soportar una densidad de carga superficial dada por la relación

$$\rho_s = \lim_{\Delta h \to 0} \left(\rho_1 \,\Delta h_1 + \rho_2 \,\Delta h_2 \right) \tag{3.65}$$

Entonces, por la Ec. (3.64),

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$
(3.66)

la cual indica que la presencia de una capa de carga en la interfaz resulta en un cambio abrupto de la componente normal del vector de la densidad de campo **D**; es decir, la componente normal de **D** es discontinua al pasar de un medio a otro y la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad de carga superficial presente, esto es,

$$D_{1n} - D_{2n} = \boldsymbol{\rho}_s \tag{3.67}$$

y la condición de frontera correspondiente para el campo E es entonces

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s} \tag{3.68}$$

De las condiciones de frontera se deduce que los vectores **E** y **D** cambian de dirección en la frontera entre dos dieléctricos. En la Fig. 3.11, si no existe una distribución de carga en la frontera, se tiene entonces que

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$
o

 $\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2$

у

 $E_1 \operatorname{sen} \theta_1 = E_2 \operatorname{sen} \theta_2$

A partir de estas dos últimas ecuaciones, se obtiene que

$$\varepsilon_1 \cot \theta_1 = \varepsilon_2 \cot \theta_2$$

0



Figura 3.11. Condiciones de frontera entre dos dieléctricos.

Ejemplo 7. En la Fig. 3.11, si el medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 un conductor, entonces, bajo condiciones estáticas, $D_2 = E_2 = 0$. Por tanto, según las condiciones de frontera,

$$D_{n1} = \rho_s \implies E_{n1} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_1}$$

 $E_{t1} = 0$

y

Por tanto,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = 0$$

Se concluye que una línea de un campo eléctrico estático en la frontera entre un dieléctrico y un conductor es siempre perpendicular a la superficie del conductor (cuando no hay corrientes presentes).

Ejemplo 8. Una esfera conductora de radio *a* con una carga *Q* está sumergida hasta la mitad en un líquido no conductor de constante dieléctrica ε_r (Fig. 3.12). Hállese el campo eléctrico fuera de la esfera y la densidad de carga en la superficie de la esfera.



Figura 3.12

Solución: Aplicando la ley de Gauss a la superficie S de radio r que encierra a la esfera, da

$$\int_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} \mathbf{D}_{\text{líquido}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D}_{\text{aire}} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

donde S_1 y S_2 son las partes de la superficie gaussiana que pasan por el líquido y por el aire, respectivamente. La geometría del problema sugiere que el campo es radial en todas partes, de manera que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DdS$. También sugiere que $D_{\text{líquido}}$ es constante en todos los puntos de S_1 y que D_{aire} lo es también en todos los puntos de S_2 , de manera que puede ser factorizada y sacada de las integraciones. Por tanto, se puede escribir

$$D_{\text{líquido}} \int_{S_1} dS + D_{\text{aire}} \int_{S_2} dS = Q$$

$$\left(D_{\text{líquido}} + D_{\text{aire}} \right) 2\pi r^2 = Q$$
(3.69)

0

Donde $2\pi r^2$ es el área de S_1 y S_2 . Ahora bien, se sabe que $D_{\text{líquido}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\text{líquido}}$ y $D_{\text{aire}} = \varepsilon_0 E_{\text{aire}}$. Como el campo es radial, es tangente a la frontera entre el líquido y el aire y, por tanto, la condición de frontera establece que $E_{\text{líquido}} = E_{\text{aire}}$. Entonces no se necesitan los subíndices en E y se puede escribir $D_{\text{líquido}} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$ y $D_{\text{aire}} = \varepsilon_0 E$. Sustituyendo estas relaciones en la Ec. (3.69), se obtiene

$$(\varepsilon_r \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 E) 2\pi r^2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1) E 2\pi r^2 = Q$$

0

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \left(\varepsilon_r + 1\right)r^2}$$

la cual da el campo eléctrico en ambos medios. La densidad del campo es entonces

$$D_{\text{líquido}} = \frac{\varepsilon_r Q}{2\pi(\varepsilon_r + 1)r^2}$$
, $D_{\text{aire}} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_r + 1)r^2}$

La densidad de carga superficial en la esfera es igual a la densidad de campo en la superficie de la esfera, de manera que

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_r Q}{2\pi(\varepsilon_r + 1)a^2}$$

en la mitad sumergida, y

$$\sigma_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_r + 1)a^2}$$

en la otra mitad.

3.9 Condiciones de Frontera para la Densidad de Corriente

Cuando una corriente atraviesa oblicuamente una interfaz entre dos medios de conductividades diferentes, el vector de la densidad de corriente cambia tanto de dirección como de magnitud. Se puede derivar un conjunto de condiciones de frontera para J en una forma similar a la usada en la Sec. 3.8 para obtener las condiciones de frontera para D y E.

Del análisis anterior, se sabe que la componente normal de un campo vectorial no divergente es continua al pasar una interfaz (Fig. 3.13). Por tanto, de la relación $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ se tiene que

$$J_{1n} = J_{2n} (3.70)$$

En la misma forma, la componente tangencial de un campo vectorial no rotacional es continua al atravesar una interfaz. De la ecuación $\nabla \times (J/\sigma) = 0$, se concluye entonces que

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{3.71}$$

La Ec. (3.71) establece que *el cociente entre las componentes tangenciales de* J *en los dos lados de una interfaz es igual al cociente entre las conductividades.* Compare las condiciones de frontera para la densidad de corriente en medios óhmicos con las condiciones de frontera para la densidad de flujo electrostático en una interfaz de medios dieléctricos donde no hay cargas libres, observe una analogía exacta de J y σ con D y ϵ .

Combinando las Ecs. (3.70) y (3.71) y observando la definición de θ_1 y θ_2 en la Fig. 3.11, se puede escribir que

$$\tan \theta_1 = \frac{J_{t1}}{J_{n1}} \qquad \tan \theta_2 = \frac{J_{t2}}{J_{n2}}$$
$$\tan \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tan \theta_1 \qquad (3.72)$$

y por tanto

Si la región 1 es un buen conductor y la región 2 un aislante, entonces $\sigma_1 >> \sigma_2$ y la corriente sale de la superficie en el medio 2 formando ángulos rectos. Esto corresponde al requerimiento de que el campo eléctrico sea normal a la superficie de un buen conductor.



Figura 3.13. Refracción de las líneas de corriente.

3.10 Capacitancia y Capacitores

Considérese un sistema de dos conductores de forma arbitraria, uno con una carga +Q y el otro con una carga -Q, y que todos los demás cuerpos en el sistema están suficientemente alejados y no tienen ninguna influencia sobre los dos conductores (Fig. 3.14). No hay flujo de corriente (condiciones estáticas), de modo que $E_{tangencial} = 0$ en las superficie de los cuerpos metálicos y la superficie en cada uno de los conductores es una superficie equipotencial. La carga neta en cada cuerpo reside completamente en su superficie; de manera que todas las líneas de E que se originan en el cuerpo positivo terminan en el cuerpo negativo. Por la ley de Gauss, el flujo de E que sale del cuerpo positivo es Q/ϵ_0 , y es la misma magnitud del flujo de E que termina en el cuerpo negativo.

154



Figura 3.14

Si se añade carga adicional a un cuerpo, entonces se producirán algunas líneas de E que deben terminar en otros cuerpos o en infinito. Pero cuando se le da una carga adicional ΔQ al cuerpo positivo, también se le dará una carga $-\Delta Q$ al cuerpo negativo, y no se crearán líneas adicionales de E en otras regiones; el único efecto será el aumento de flujo de E entre los dos cuerpos. Ahora es razonable suponer que la carga añadida ΔQ se distribuirá en la superficie en la misma forma que se distribuyó la carga original Q: la densidad ρ_s en cualquier punto en la superficie será multiplicada por algún factor constante α , independiente de la posición. Esto significa que la distribución de las líneas de E permanecerá inalterada, ya que la intensidad y la diferencia de potencial entre los dos cuerpos serán multiplicadas por el mismo factor α . Pero si Q pasa a α Q y la diferencia de potencial entre los cuerpos pasa de V a αV , de la linealidad se deduce entonces que V debe ser proporcional a Q:

$$Q = CV \tag{3.73}$$

0

$$C = \frac{Q}{V} \tag{3.74}$$

donde C es una constante.

La constante de proporcionalidad *C* se denomina la *capacitancia* del sistema constituido por los dos cuerpos y su unidad es el faradio, que es simplemente la relación 1 culombio/voltio (C/V).

La capacitancia definida por la Ec. (3.73) es una propiedad física del sistema de dos conductores y depende exclusivamente de la geometría y de la permitividad del medio entre los conductores. No depende ni de la carga Q ni de la diferencia de potencial V. Es importante notar cómo se deben tomar $Q \neq V$, ya que C podría adquirir un signo negativo que no tiene ningún sentido. Esta posibilidad se puede evitar si se toma como convención suponer que el cuerpo 2 está cargado negativamente, de manera que Q > 0. Si movemos una carga de prueba de 1 a 2, se debe realizar trabajo, ya que la carga de prueba es repelida por el cuerpo 2. De modo que V > 0 y la Ec. (3.74) dará entonces C > 0.

Ejemplo 9. Un capacitor de placas paralelas presenta una geometría sencilla para ilustrar el cálculo de la capacitancia; consiste de dos placas paralelas de área S separadas por una distancia uniforme d (Fig. 3.15), la cual es pequeña en comparación con la menor dimensión lineal de las placas. El espacio entre las placas está ocupado por un dieléctrico de permitividad constante ε. Determinar su capacitancia.

Solución: Para obtener la capacitancia de la geometría dada, se colocan cargas +Q y -Q en las placas conductoras superior e inferior, respectivamente, y se supone que las cargas se distribuyen uniformemente produciendo las distribuciones superficiales $+\rho_s y - \rho_s$, donde

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$



Figura 3.15. Capacitor de placas paralelas.

Por la condición de frontera en y = d, la intensidad de campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{\mathbf{\rho}_s}{\mathbf{\varepsilon}} = \frac{Q}{\mathbf{\varepsilon}S}$$

el cual es constante en el dieléctrico si se desprecian los efectos de los bordes sobre el campo eléctrico (se supone que las dimensiones lineales de las placas son mucho mayores que la distancia de separación entre ellas). Entonces

$$V = -\int_{y=0}^{d} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{0}^{d} \left(-\hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{Q}{\varepsilon S}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{y} dy\right) = \frac{Q}{\varepsilon S} d$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d}}$$
(3.75)

y la capacitancia es

la cual es independiente de *Q* y de *V*.

Ejemplo 10. *Capacitancia de un capacitor esférico.* Se coloca una carga +*Q* en la superficie de una esfera metálica de radio R_1 ; una carga –*Q* reside en la superficie interna de una esfera concéntrica de radio $R_2 > R_1$ (Fig. 3.16). Se determinará la capacitancia de este capacitor esférico.



Figura 3.16. Capacitor esférico.

Solución: Ya sea que la esfera interna sea sólida, o un cascarón de espesor finito o una superficie matemática de espesor cero, el valor de E en cualquier punto con $r < R_1$ es cero bajo condiciones electrostáticas. Esto puede demostrarse mediante la aplicación de la ley de Gauss a una esfera ficticia de radio $r < R_1$: puesto que la carga en el interior de esta esfera es cero, también lo es el flujo de E en la superficie, y E mismo debe ser cero debido a la simetría.

Para la región $r > R_2$, la aplicación de la ley de Gauss de nuevo produce el mismo resultado, ya sea que el punto esté dentro del metal de la esfera externa o completamente fuera del cascarón. Por tanto, el campo electrostático existe solamente entre la superficie exterior de la esfera interna y la superficie interior de la esfera externa:

$$V_{12} = -\int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Entonces la capacitancia es dada por

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = 4\pi\varepsilon \left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$
(3.76)

Si $R_2 \rightarrow \infty$, se obtiene la capacitancia de una esfera aislada. La capacitancia de la esfera aislada es $4\pi\epsilon R_1$.

El resultado para la capacitancia de un capacitor de placas paralelas dado por la Ec. (3.75) puede obtenerse a partir de la Ec. (3.76) en la forma siguiente: Supóngase que

$$R_2 = R + \frac{d}{2}$$
, $R_1 = R - \frac{d}{2}$

R es el radio promedio y *d* es la separación entre las placas. Suponga que $R \to \infty$ con *d* constante. Entonces $R_2 - R_1 = d$, $R_1R_2 \to d^2$ y $C \to 4\pi\epsilon R^2/d = \epsilon S_{esfera}/d$. Si las áreas a considerar son las de las placas, es decir, *S* en vez de S_{esfera} , donde *S* es sólo una parte de S_{esfera} , entonces la capacitancia se reducirá proporcionalmente:



que es el mismo resultado obtenido anteriormente. Este resultado es aproximado debido a que las condiciones cambian cuando el capacitor de área *S*, originalmente considerado como parte de un capacitor esférico, es desconectado y removido para existir por sí mismo. Como parte un capacitor esférico, todas las líneas de E son radiales. Sin embargo, cuando el capacitor de área *S* es removido, las líneas de E no permanecen inalteradas. La Fig. 3.17 muestra el efecto de los bordes sobre las líneas de E.



Figura 3.17. Distorsión del campo en los bordes de un capacitor de placas paralelas.

Ejemplo 11. *Capacitancia de una línea coaxial.* Un capacitor cilíndrico (línea coaxial) consiste de un conductor interno de radio *a* y un conductor externo cuyo radio interno es *b* (Fig. 3-18). El espacio entre los conductores está ocupado por un dieléctrico de permitividad ε y la longitud del capacitor es *l*. Se calculará la capacitancia de esta geometría.

Solución: Para un voltaje aplicado *V*, se acumularán cargas +*Q* y –*Q* en las superficies externa e interna de los cilindros. Se supone que estas cargas se distribuyen uniformemente en toda la longitud *l* de los conductores y producirán densidades lineales: $\rho_l = Q/l$ en el conductor externo y – ρ_l en el conductor interno. Ignorando los efectos de distorsión del campo en los extremos del capacitor, podemos construir una superficie gaussiana en el dieléctrico, en torno al conductor interno, con radio ρ , *a* < ρ < *b*. La expresión para **E** es similar a la del campo para la línea infinita de carga, es decir,

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho}\hat{\mathbf{a}}_{\rho} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon\rho_l}\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$$

La diferencia de potencial *V* entre los conductores es

157

$$V = -\int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{a}^{b} \left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon l}\frac{d\rho}{\rho}\hat{\mathbf{a}}_{\rho}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{\rho}d\rho\right)$$
$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

y la capacitancia es entonces

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(b/a\right)}$$
(3.77)

La capacitancia por unidad de longitud del capacitor cilíndrico (línea coaxial) es

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \qquad (F/m) \tag{3.78}$$



Figura 3.18. Un capacitor cilíndrico

Ejemplo 12. Considere un capacitor de placas paralelas con separación 2*d* y área de placas *S*, como en la Fig. 3.19. La región entre las placas está llena de dos láminas dieléctricas de espesor *d* y con parámetros ε_1 , σ_1 y ε_2 , σ_2 . Se aplica un potencial *V* entre las placas. Calcular la densidad de carga superficial en la frontera que separa los dos dieléctricos.



Figura 3.19. Capacitor lleno de dieléctricos con pérdidas.

Solución: Cuando se alcanzan las condiciones de régimen estacionario (campos estáticos), el campo eléctrico debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$E_1 d + E_2 d = V$$
$$J_1 = \sigma_1 E_1 = J_2 = \sigma_2 E_2$$
$$\rho_s = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1$$

En consecuencia,

$$E_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{V}{d}, \qquad E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{V}{d}$$

y la densidad de carga superficial en la frontera entre las placas es

$$\rho_s = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{V}{d}$$

Los capacitores que se han descrito hasta ahora tienen geometrías sencillas que conducen a campos que se determinan fácilmente. Las geometrías de planos paralelos y cilíndricas circulares se utilizan ampliamente en la práctica a menudo con un relleno dieléctrico. En principio, para un área superficial dada, la capacitancia puede aumentarse indefinidamente reduciendo la separación entre los conductores; sin embargo, para una diferencia de potencial dada, la reducción está limitada por la necesidad de evitar que el campo se haga demasiado grande y se produzca una ruptura eléctrica. La forma estándar de obtener una gran área superficial es mediante la construcción de un apilamiento de placas paralelas: las placas se conectan como dos conjuntos entrelazados y la capacitancia es evidentemente el número de espacios multiplicado por la capacitancia de un par de placas adyacentes.

3.11 Relación Resistencia – Capacitancia

En la Sec. 3.10 se estudió el procedimiento para hallar la capacitancia entre dos conductores separados por un medio dieléctrico. Estos conductores pueden tener formas arbitrarias. Allí se determinó que, en términos de las cantidades del campo eléctrico, la fórmula básica para la capacitancia puede escribirse como

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\oint_{S} \mathbf{\epsilon} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$
(3.79)

donde la integral de superficie se evalúa en una superficie que encierra el conductor positivo y los límites de la integral de línea van del conductor negativo (potencial menor) al conductor positivo (potencial mayor).

Cuando el medio dieléctrico tiene una conductividad pequeña pero diferente de cero, se establecerá una corriente en el medio entre los conductores. Si el medio es isótropo, entonces la ley de Ohm da que $J = \sigma E$. La resistencia entre los conductores es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_{L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint_{S} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$
(3.80)

donde las integrales en la Ec. (3.80) se evalúan en la misma forma que las integrales en la Ec. (3.79). Comparando estas dos últimas ecuaciones, se observa que se produce la siguiente relación:

$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$
(3.81)

Esta ecuación es válida siempre que la permitividad ε y la conductividad σ tengan la misma dependencia espacial o si el medio es homogéneo. En estos casos, si se conoce la capacitancia entre dos conductores, se puede obtener la resistencia directamente a partir del cociente ε/σ sin cálculos adicionales.

Ejemplo 13. En el Ejemplo 11 se obtuvo la capacitancia por unidad de longitud de un cable coaxial [Ec. (3.78)] como

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$
 (F/m)

Por tanto, la resistencia entre los dos conductores concéntricos (también llamada *resistencia de fuga*) es, por la Ec. (3.81),

$$R' = \frac{\varepsilon}{\sigma} \left(\frac{1}{C'} \right) = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\Omega \cdot \mathbf{m})$$

Ejemplo 14. Un capacitor con dieléctrico de aire está formado por dos cilindros metálicos concéntricos. El cilindro externo tiene un radio de 1 cm.

- (a) ¿Cuál debe ser el radio del conductor interno que permitirá una diferencia de potencial máxima entre los conductores antes de que ocurra la ruptura del dieléctrico de aire?
- (b) Calcule el potencial máximo para la ruptura en el aire de 3×10^6 V/m.

Solución:

(a) Sea E_r la intensidad del campo de ruptura en el aire y sean R_1 y R_2 los radios e los conductores interno y externo, respectivamente. Si λ es la carga por unidad de longitud en cada conductor, se usa la ley de Gauss para obtener la intensidad del campo eléctrico en el capacitor y la diferencia de potencial entre los dos conductores como

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho}, \qquad V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Como el campo eléctrico cerca de la superficie del conductor interno es el más fuerte, se tiene entonces

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$

En consecuencia, se obtiene

$$V_r = E_r R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$
$$\frac{dV_r}{dR_1} = E_r \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + R_1 \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1^2} \right) \right] = E_r \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)$$

Para obtener la máxima diferencia de potencial, R_1 debe ser tal que $dV_r/dR_1 = 0$, es decir, $\ln(R_2/R_1) = 1$ o $R_1 = R_2/e$. La diferencia de potencial máxima es entonces

$$V_{\text{máx}} = \frac{R_2}{e} E_r$$

(b) El potencial máximo para ruptura en el aire es

$$V_{máx} = \frac{R_2}{e} E_r = \frac{0.01}{e} \times 3 \times 10^6 = 1.1 \times 10^4 \text{ V}$$

3.12 Energía en el Campo Electrostático

Esta parte es muy semejante a la desarrollada en la Sec. 2-13, excepto que ahora se analiza en una forma más general al incluir medios materiales. El trabajo ejercido sobre una carga puntual Q situada en el campo de una distribución de carga estacionaria es QE, y el trabajo realizado para desplazar Q desde un punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ hasta un segundo punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ es

$$W_e = Q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(3.82)

Puesto que en un campo electrostático, el rotacional de E se anula, entonces E se puede escribir como el negativo del gradiente del potencial escalar *V* y se tiene entonces que

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla V \cdot d\mathbf{l} = -dV \tag{3.83}$$

donde dV es el cambio del potencial a lo largo de un elemento dl de la trayectoria de integración. De aquí se ve claramente que el trabajo realizado al desplazar Q desde \mathbf{r}_1 hasta \mathbf{r}_2 es independiente de la trayectoria y sólo es función de los valores inicial y final del potencial (esto se refiere a valores espaciales, no temporales):

$$W_{e} = -Q \int_{\mathbf{r}_{1}}^{\mathbf{r}_{2}} dV = Q [V(\mathbf{r}_{1}) - V(\mathbf{r}_{2})]$$
(3.84)

Como ya se ha visto, si todas las fuentes de un campo electrostático están situadas a distancias finitas de un origen arbitrario, el potencial y las intensidades del campo se hacen muy pequeños en puntos que estén lo suficientemente distantes. Por tanto, el trabajo realizado por una carga Q cuando pasa desde un punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ hasta un punto $\mathbf{r}_2 = \infty$ es

$$W = QV(\mathbf{r}) \tag{3.85}$$

Obviamente, el potencial escalar por sí solo puede interpretarse como el trabajo realizado *contra las fuerzas del campo* para llevar la carga desde el infinito hasta el punto **r**; es decir,

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(3.86)

El término *energía* de un sistema electrostático se utilizará para indicar el trabajo realizado sobre el sistema al transportar sus elementos de carga desde el infinito hasta la distribución espacial especificada a través de pasos irreversibles. Aquí se supondrá que la temperatura de todo el material dieléctrico o magnético en el campo se mantiene constante. La demostración que se da a continuación es semejante a la dada en la Sección 2.13.

La energía para colocar una carga puntual Q_2 en el campo de una sola carga puntual Q_1 es

$$W_e = Q_2 V_{21} \tag{3.87}$$

donde V_{21} es el potencial en Q_2 producido por Q_1 . Ahora bien, el trabajo realizado para traer a Q_2 desde el infinito hasta un punto en el campo de Q_1 sería devuelto si se permitiese que Q_1 se desplazara hasta el infinito, es decir,

$$W_e = Q_1 V_{12} \tag{3.88}$$

donde V_{12} es el potencial en Q_1 producido por Q_2 . La energía mutua entre las dos cargas puede expresarse entonces por la relación simétrica

$$W_e = \frac{1}{2} \left(Q_1 V_{12} + Q_2 V_{21} \right) \tag{3.89}$$

Si después de haber introducido Q_2 en el campo de Q_1 se introduce otra carga Q_3 , la energía será

$$W_e = Q_2 V_{21} + Q_3 \left(V_{31} + V_{32} \right) \tag{3.90}$$

la cual, en virtud de las relaciones recíprocas entre pares, es equivalente a

$$W_e = \frac{1}{2}Q_1 \left(V_{12} + V_{13} \right) + \frac{1}{2}V_2 \left(V_{21} + V_{23} \right) + \frac{1}{2}Q_3 \left(V_{31} + V_{32} \right)$$
(3.91)

Por inducción se deduce entonces que la energía de un sistema cerrado de *n* cargas puntuales es

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n} V_{ij} Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i Q_i$$
(3.92)

donde V_i es el potencial en Q_i debido a las n - 1 cargas restantes del sistema. La Ec. (3.92) es, por supuesto, la misma ecuación obtenida en el Cap. 2, Sec. 2.13, para el vacío, con el cambio introducido por la permitividad del medio.

Observe que la Ec. (3.92) es válida sólo si el sistema es completo o cerrado. Si por el contrario las *n* cargas están situadas en un campo externo de potencial V_0 , aparece un término que no involucra el factor ¹/₂. En este caso,

$$W_e = \sum_{i=1}^{n} V_0 Q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i Q_i$$
(3.93)

Si el conjunto de cargas no es discreto sino que está constituido por una densidad continua ρ_v distribuida en un *volumen v*, entonces se reemplaza Q_i por $dq = \rho_v dv$, la sumatoria en la Ec. (3.92) se convierte en una integral y se obtiene

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv \tag{3.94}$$

en donde *V* es el potencial absoluto en la posición del diferencial de carga $\rho_v dv$. Para cargas distribuidas en *superficies* o *linealmente*, se usan las siguientes expresiones:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V dS \tag{3.95}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\ell} \rho_{\ell} V d\ell$$
(3.96)

Las integrales anteriores para la energía expresadas en función de la distribución de potencial V que acompaña las distribuciones de carga estática en el espacio, se pueden escribir también en función de los campos **E** y **D**. El resultado para la energía en la Ec. (3.94) es

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv \tag{3.97}$$

Para demostrar esto, suponga que en una superficie cerrada *S* existe una carga superficial de densidad ρ_s , en donde *S* puede estar formada por conductores individuales tales que $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$; también se incluye la posibilidad adicional de la existencia de una densidad de volumen ρ_v en la región *v* encerrada por la superficie *S*. La energía electrostática del sistema es entonces la suma de las Ecs. (3.95) y (3.96),

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_S \rho_s V dS + \frac{1}{2} \int_V \rho_v V dv$$
(3.98)

en donde *S* denota la superficie cerrada delimitada por los conductores y *V* es la región entre los conductores. Usando la condición de frontera $\rho_s = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario saliendo del volumen *V*), la Ec. (3.98) se convierte en

$$W_{e} = -\frac{1}{2} \oint_{S} (V\mathbf{D}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \frac{1}{2} \int_{v} \rho_{v} V \, dv$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{v} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) \, dv + \frac{1}{2} \int_{v} \rho_{v} V \, dv \qquad (3.99)$$

donde se usó el teorema de la divergencia para cambiar la integral de superficie a una de volumen. Usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (f \mathbf{G}) = f \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla f$, se obtiene que

$$W_e = -\frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv - \frac{1}{2} \int_v V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_v \rho_v V \, dv$$

Puesto que $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$, las dos últimas integrales se cancelan y como también $\nabla V = -\mathbf{E}$ en la primera integral, se obtiene el resultado deseado, es decir, la Ec. (3.97).

Usando la relación $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ para un medio lineal, la Ec. (3.97) puede escribirse como

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_v \frac{1}{\varepsilon} D^2 dv$$
(3.100)

162

y matemáticamente se puede definir una densidad de energía electrostática we como

$$W_e = \int_v w_e dv \tag{3.101}$$

donde

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$
(3.102)

Sin embargo, esta definición es artificial ya que no se ha encontrado una justificación física que verifique la localización de la energía en el interior de un campo eléctrico.

Ejemplo 15. Comenzando con la fórmula fundamental de la energía

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv$$

demuestre que la potencia disipada en un conductor bajo condiciones de estado estacionario es dada por

$$P = \frac{1}{2} \int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv \tag{3.103}$$

Solución: Como se sabe, la potencia disipada es la tasa o ritmo de decrecimiento de la energía almacenada: $P = -dW_e/dt$. Entonces, como el campo de voltaje no varía con el tiempo (estado estacionario), se puede escribir que

$$P = -\frac{1}{2} \int_{c} \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} V \, dv = \frac{1}{2} \int_{v} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, dv$$

Usando ahora la identidad vectorial $\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f \nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$ y el teorema de la divergencia, es posible escribir esta última ecuación como

$$P = \frac{1}{2} \oint_{S} V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$
(3.104)

Ahora, como un elemento de carga dq descarga una energía Vdq al cruzar la frontera el conductor, la integral de superficie en la Ec. (3.104) representa el ritmo total de la pérdida de energía, que es precisamente P. De modo que

 $P = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv$

0

$$P = \frac{1}{2} \int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv$$

Ejemplo 16. Cuando se conecta una fuente a un capacitor, se consume energía para cargarlo. Si el material de las placas es un buen conductor con una resistencia efectiva igual a cero y si el dieléctrico entre los conductores es un buen aislante, entonces no puede fluir corriente en el dieléctrico y no ocurren pérdidas óhmicas en el capacitor. La pregunta es ¿a dónde se va la energía usada para cargarlo? Según la Ec. (3.102), la energía termina siendo almacenada en el medio dieléctrico en la forma de *energía potencial electrostática*, y ésta está relacionada con Q, C y V.

Si se aplica un voltaje *V* a un capacitor de placas paralelas, con separación entre placas *d* y área de cada placa *S*, y si se desprecian los efectos de distorsión del campo en los bordes de las placas, el campo eléctrico es uniforme en el dieléctrico y tiene una magnitud

$$E = \frac{V}{d}$$

entonces

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{v} \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_{v} \varepsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2 V^2$$

La expresión entre paréntesis en esta ecuación es la capacitancia de un capacitor de placas paralelas. De manera que

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2$$
 (3.105)

Puesto que Q = CV, la Ec. (3.105) también puede escribirse como

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}$$
(3.106)

Es importante señalar aquí que las Ecs. (3.105) y (3.106) son válidas para cualquier capacitor de dos conductores.

Si se permite que las dos placas del capacitor se acerquen, bajo la influencia de la fuerza eléctrica **F**, una distancia diferencial *d***I**, y al mismo tiempo las cargas en las placas se mantienen constantes, entonces el trabajo mecánico realizado por el sistema es

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{I}$$

Este trabajo mecánico, si el sistema está aislado, es realizado *consumiendo* energía electrostática. Por tanto, dW_m es igual a la *pérdida* de energía almacenada en el material dieléctrico del capacitor, o

$$dW_m = -dW_e$$

La diferencia de energía electrostática dW_e puede escribirse en términos del gradiente de W_e como $dW_e = \nabla W_e \cdot d\mathbf{l}$ y por tanto se obtiene que

$$\mathbf{F} = -\nabla W_{e} \tag{3.107}$$

Tome nota que la Ec. (3.107) se obtuvo bajo la suposición de que las cargas en el sistema son constantes.

Para aplicar la Ec. (3.107) al capacitor de placas paralelas, se escribe la Ec. (3.106) como

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 y}{2\varepsilon S}$$

donde se reemplazó *d* con la variable *y* para representar la separación vertical entre las placas. Aplicando ahora la Ec. (3.107) a esta última relación da la fuerza como

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2 y}{2\varepsilon S} \right) = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{Q^2}{2\varepsilon S} = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{\varepsilon S E^2}{2}$$
(3.108)

puesto que $Q = \varepsilon SE$.

Ejemplo 17. Un capacitor de placas paralelas se carga a un potencial *V* y luego es desconectado del circuito que lo carga. Determine el trabajo realizado al cambiar lentamente la separación entre las placas desde *d* hasta $d' \neq d$ (las placas son circulares con radio r >> d).

Solución: Despreciando los efectos en los bordes, la capacitancia del capacitor de placas paralelas es $C = \varepsilon_0 \pi r^2/d$ y la energía almacenada es $W = \frac{1}{2}CV^2$. Como las cargas en las placas, $Q = \pm CV$, no varían con la separación, tenemos entonces que

$$V' = \frac{C}{C'}V$$

La energía almacenada cuando la separación es d' es

$$W' = \frac{1}{2}C' \left(\frac{C}{C'}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{C^2}{C'}V^2$$

Por tanto, el cambio de la energía almacenada en el capacitor es

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2}CV^{2}\left(\frac{C}{C'} - 1\right) = \frac{1}{2}CV^{2}\left(\frac{d'}{d} - 1\right)$$

y el trabajo realizado al cambiar la separación de d a d' es

$$\frac{\varepsilon_0 \pi r^2 \left(d' - d\right) V^2}{2d^2}$$

Ejemplo 18. Un capacitor esférico consiste de dos esferas conductoras de radios $a \ge b$. La esfera externa está a tierra y se coloca una carga Q en la esfera interna. Después el conductor externo se contrae del radio a hasta un radio a'. Determine el trabajo realizado por la fuerza eléctrica.

Solución: Los campos eléctricos para r < b y r > a son ambos iguales a cero. En b < r < a, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Por tanto, la energía del campo es

$$W = \int_{b}^{a} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Cuando la superficie esférica externa se contrae de r = a hasta r = a', el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es igual a la disminución en la energía contenida en el campo eléctrico:

$$W_{a} - W_{a'} = \frac{Q^{2}}{8\pi\varepsilon_{0}} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right) = \frac{Q^{2} (a - a')}{8\pi\varepsilon_{0} aa'}$$

PROBLEMAS

- **3.1** La densidad de corriente en una región es dada por $\mathbf{J} = r^3 \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{a}}_r + 3r^3 \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \text{ A/m}^2$. Calcule la corriente que atraviesa la superficie dada por $0 < r < 1 \text{ m}, \theta = 60^\circ, 0 < \phi < 2\pi$.
- **3.2** Una densidad de corriente es dada en coordenadas cilíndricas por $\mathbf{J} = 10e^{-4z} \left(\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} \hat{\mathbf{a}}_z\right) \text{ A/m}^2$. Halle la corriente total que atraviesa cada una de las superficies siguientes: (a) $z = 5 \text{ m}, 0 \le \rho \le 1.5 \text{ m}$ en la dirección de $\hat{\mathbf{a}}_z$; (b) un cilindro cerrado definido por $0 \le z \le 1.5 \text{ m}, 0 \le \rho \le 1.5 \text{ m}$ en todas direcciones; (c) una esfera de radio igual a 2 m.
- **3.3** Determine la corriente total en un conductor circular de radio *a* si la densidad de corriente varía con el radio como J = A/r.
- 3.4 Dada una densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \left(\frac{10^3}{r^2} \cos\theta\right) \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \quad (A/m^2)$$

en coordenadas esféricas, determine la corriente que cruza la franja cónica $\theta = \pi/4$, $0.001 \le r \le 0.080$ m.

- **3.5** Calcule la movilidad de los electrones de conducción en aluminio, dada una conductividad de 38.2 MS/m y densidad de electrones de conducción de 1.79×10²⁹ m⁻³.
- **3.6** Determínese la resistencia de un conductor de cobre de 2 m de largo con una sección transversal circular que tiene un radio de 1 mm en un extremo y se incrementa linealmente hasta un radio de 5 mm en el otro extremo.
- 3.7 Si entre los extremos de una barra cilíndrica de carbón ($\sigma = 3 \times 10^4$ S/m) de radio 4 mm y longitud 20 cm se aplica una diferencia de potencial de 20 V, determínese (a) la resistencia de la barra, (b) la corriente en la barra y (c) la potencia disipada.
- 3.8 Hállese la resistencia de una lámina de papel de aluminio de 25 μm de espesor con lados de 30 cm (a) entre lados opuestos de la cara cuadrada, (b) entre las dos caras cuadradas (la conductividad del aluminio es 3.82×10⁷ S/m).
- **3.9** Un cilindro hueco de radio interno *a* y radio externo *b* y longitud *l* tiene una sección transversal como muestra la Fig. 3.20. Determine la resistencia entre los extremos del cilindro.



3.10 (a) Si un dieléctrico de forma arbitraria y volumen v se coloca en un campo eléctrico, resulta una polarización dieléctrica \mathbf{P} que también es equivalente a una densidad de carga $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ y una densidad de carga superficial $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$. Como el dieléctrico es eléctricamente neutro, la carga inducida total debe ser igual a cero. Demuestre esto mediante el uso del teorema de la divergencia. (b) Considere un ejemplo específico donde el cuerpo es un paralelepípedo rectangular cuyo eje se extiende desde z = -l/2 hasta z = l/2 y con sección transversal de área *S*. Dado que $\mathbf{P} = (Az^2 + B)\hat{\mathbf{a}}_z$, determine las densidades de carga de volumen y de superficie y muestre explícitamente que la carga total es cero.

3.11 La polarización en un cubo dieléctrico de lado *l* centrado en el origen viene dada por $\mathbf{P} = P_0 \left(\hat{\mathbf{a}}_x x + \hat{\mathbf{a}}_y y + \hat{\mathbf{a}}_z z \right)$. (a) Determine las densidades de volumen y de superficie de las cargas ligadas. (b) Demuestre que la carga ligada total es cargo (es decir, demostrar que no hay cargas libros)

Demuestre que la carga ligada total es cero (es decir, demostrar que no hay cargas libres).

- **3.12** Considere un capacitor de placas paralelas con lados *a*, *b* y separación *d*. El capacitor está lleno en el espacio (0 a a/2, 0 a b/2) con un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r . Entre las placas existe un potencial *V*. Calcule la densidad de carga en las placas y también la carga de polarización superficial equivalente en las superficies del dieléctrico. Desprecie los efectos en los bordes.
- **3.13** Un cilindro dieléctrico sólido de longitud *L* y radio *a* está polarizado uniformemente con polarización **P** dirigida axialmente. Determine el campo eléctrico en el eje del cilindro tanto afuera como adentro del cilindro.
- **3.14** Una lámina dieléctrica infinita de espesor *e* se coloca en un campo externo uniforme \mathbf{E}_0 . La lámina está inclinada y forma un ángulo θ_1 con el campo \mathbf{E}_0 (Fig. 3.21). Determine el ángulo θ_1 tal que las líneas de flujo en la lámina formen un ángulo $\theta_2 = \pi/4$ con los lados de la lámina. La constante dieléctrica es $\varepsilon_r = 4$. Halle la densidad de la carga de polarización de superficie en las dos caras de la lámina.



- **3.15** El radio del núcleo y el radio interno del conductor externo de un cable coaxial muy largo son r_i y r_{er} respectivamente. El espacio entre los conductores está lleno de dos capas coaxiales dieléctricas. Las constantes dieléctricas de los medios son ε_{r1} para $r_i < \rho < a$ y ε_{r2} para $a < \rho < r_e$. Determine la capacitancia por unidad de longitud.
- **3.16** Un capacitor de placas paralelas usa dos placas circulares de radio *a*, con la placa inferior situada en el plano *xy* y centrada en el origen. La placa superior está ubicada en z = d, y su centro está en el eje *z*. La diferencia de potencial entre las placas es V_0 con la placa inferior puesta a tierra. El dieléctrico en la región entre las placas tiene una permitividad que varía radialmente y es dada por $\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0 (1 + \rho/a)$. Determine **E**, **D**, *Q* (carga y cada placa) y la capacitancia *C*.
- **3.17** Considere dos cilindros coaxiales con el espacio dado por $0 < \theta < \theta_1$ lleno de un dieléctrico con constante ε_r (Fig. 3.22). Halle la capacitancia por unidad de longitud. (*Sugerencia*: Observe que el campo E_r es independiente de θ y sólo depende de la diferencia de potencial entre los cilindros.)



Figura 3.22

3.18 Halle la capacitancia entre las superficies conductoras curvas circulares mostradas en la Fig. 3.23. Los radios son $a ext{ y } b > a ext{ y }$ la separación entre los topes superior e inferior es igual a d.



Figura 3.23

- **3.19** Un capacitor de placas paralelas tiene una separación *d* entre sus placas. Una lámina de papel metálico, de espesor e < d, se introduce entre las placas. ¿Cuál es el efecto sobre la capacitancia? Explique.
- **3.20** El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas cada una de área *S* está lleno de un medio dieléctrico no homogéneo cuya conductividad varía linealmente de σ_1 en una placa (y = 0) a σ_2 en la otra placa. Se aplica un voltaje de CD igual a V_0 entre las placas (Fig. 3.24). Determine
 - (a) La resistencia total entre las placas,
 - (b) Las densidades de carga superficiales en las placas.
 - (c) la densidad de carga de volumen y la cantidad de carga total entre las placas.





- **3.21** Dos esferas conductoras de radios b_1 y b_2 con una conductividad muy alta están inmersas en un medio de conductividad pobre de conductividad σ y permitividad ε . La distancia *d* entre las esferas es muy grande comparada con los radios. Determine la resistencia entre las esferas conductoras. [*Sugerencia*: Halle la capacitancia entre las esferas y luego use la Ec. (3.81).]
- 3.22 Supóngase que la tierra es una gran esfera conductora de radio igual a 6.37×10³ km rodeada por aire. Halle
 (a) la capacitancia de la tierra; (b) la carga máxima que puede existir en la tierra antes de que el aire sufra ruptura dieléctrica.
- **3.23** Determine el trabajo necesario para transferir las cargas $Q_1 = 3 \text{ mC y } Q_2 = -5 \text{ mC}$ desde infinito hasta los puntos (0, 1, 4) y (2, -3, 1), respectivamente.
- **3.24** Halle el trabajo realizado al mover una carga puntual $Q = -20 \,\mu\text{C}$ desde el origen hasta el punto (4, 2, 0) en el campo $\mathbf{E} = 2(x+4y)\hat{\mathbf{a}}_x + 8x\hat{\mathbf{a}}_y$ (V/m) a lo largo de (a) la trayectoria $x^2 = 8y$; (b) la trayectoria radial directa.
- **3.25** Determine la diferencia en las cantidades de trabajo realizadas para llevar una carga de Q culombios desde infinito hasta r = a, y desde infinito hasta r = 2a.
- **3.26** Una carga puntual Q está situada en el origen. Calcule la energía almacenada en la región r > a.
- **3.27** Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = -4e^{-\rho/a}\hat{\mathbf{a}}_{\rho}$ en coordenadas cilíndricas, calcule la energía almacenada en el volumen descrito por $\rho \le 2a$ y $0 \le z \le 1$ m.

- **3.28** Si la densidad de energía para una distribución de carga como $w_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$ y como $w_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$ para una segunda distribución, la densidad de energía cuando ambas distribuciones están presentes sería $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2)$. ¿Es aplicable el principio de superposición a la energía? Explique.
- **3.29** Una batería carga un capacitor de placas paralelas a una diferencia de potencial *V* y luego es desconectada. Después se aumenta la separación entre las placas de *d* a *3d*. ¿Por cuál factor es incrementada la energía potencial?
- **3.30** Un capacitor C_1 cargado con una diferencia de potencial *V* se conecta (en paralelo) a un capacitor descargado C_2 . Compare la energía potencial inicial con la final. Explique su respuesta en vista de la conservación de energía.
- **3.31** Un capacitor de placas paralelas tiene un área *A*; la distancia *d* entre las placas es lo suficientemente pequeña de modo que la densidad de carga superficial en las placas puede tomarse como uniforme. La permitividad $\varepsilon(x)$ es una función lineal de la distancia *x* a una de las placas y $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$, $\varepsilon(d) = \varepsilon_2$. (a) Determine la capacitancia. (b) Determine la densidad de carga de polarización ρ_{pv} y la densidad de carga superficial de polarización ρ_{ps} .
- **3.32** Un cascarón esférico metálico de radio *b* tiene una carga *Q*.
 - (a) ¿Cuál es la capacitancia?
 - (b) ¿Cuál es la densidad de energía del campo eléctrico a una distancia *r* del centro de la esfera?
 - (c) ¿Cuál es la energía total del campo?
 - (d) Calcule el trabajo realizado al cargar la esfera transportando cargas infinitesimales desde infinito.
 - (e) Se establece un potencial *V* entre dos cascarones esféricos metálicos concéntricos; el interno de radio *a* y el externo de radio *b*. ¿Cuál debe ser el radio de la esfera interna para que el campo eléctrico cerca de su superficie sea un mínimo?
- **3.33** El capacitor mostrado en la Fig. 3.25 consiste de dos capas dieléctricas paralelas. Use consideraciones de energía para demostrar que la capacitancia equivalente de todo el capacitor, *C*, es igual a la combinación en serie de las capacitancias de las capas individuales, C_1 y C_2 , a saber $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, donde

 $C_1 = \varepsilon_1 A/d_1 \ \text{y} \ C_2 = \varepsilon_2 A/d_2 \ .$

- (a) Sean V_1 y V_2 los potenciales eléctricos en los dieléctricos superior e inferior, respectivamente. ¿Cuáles son los campos eléctricos correspondiente E_1 y E_2 ? Mediante la aplicación de la condición de frontera apropiada en la interfaz entre los dos dieléctricos, obtenga expresiones explícitas para E_1 y E_2 en términos de ε_1 , ε_2 , V y las dimensiones indicadas del capacitor.
- (b) Calcule la energía almacenada en cada una de las capas dieléctricas y luego use la suma para obtener una expresión para *C*.



Figura 3.25

3.34 Se coloca un electrón en cada esquina de un cubo de lados iguales a 1 μm. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?

CAPÍTULO 4

Solución de Problemas Electrostáticos

De las ecuaciones fundamentales se pasará ahora al estudio de campos en situaciones donde no se conocen las distribuciones de carga o de potencial y no es posible usar la ley de Coulomb o la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico E. En este capítulo se estudiará un enfoque más general para obtener el potencial y el campo. Matemáticamente, el problema del campo electromagnético se ocupa de la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales (las ecuaciones de Maxwell) que cumplen con ciertas condiciones especificadas en la frontera de la región bajo consideración. En otras palabras, el problema es un *problema con valores de frontera*. Si la distribución de las fuentes está especificada por completo, el campo queda determinado en forma única; esto se demostró en el Capítulo 1. Inversamente, si el campo es especificado en todos los puntos de una región, la distribución de la fuente queda especificada, pero no necesariamente en forma única.

En lo que sigue, se estudiará un método general que involucra la solución de la ecuación de Poisson $(\nabla^2 V = -\rho_v / \epsilon)$. Para comenzar, nuestra atención se restringirá a trabajar con la ecuación de Laplace $(\nabla^2 V = 0)$, cuyas soluciones se conocen como *funciones armónicas*. Antes de entrar al estudio de estas ecuaciones, se considerarán con mayor rigor algunos de los tópicos básicos discutidos en los capítulos anteriores.

4.1 Ecuaciones del Campo y del Potencial

Como se ha visto hasta ahora, las relaciones que describen la conducta de los campos eléctricos estáticos se obtienen directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell cuando todas las derivadas con respecto al tiempo se hacen cero (campos estáticos), al igual que la densidad de corriente J. Se tiene entonces que, en todos los puntos regulares de un campo electrostático,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}_{v} \tag{4.2}$$

donde ρ_v es la densidad de volumen de carga. Las discontinuidades en los vectores del campo **E** y **D** vienen expresadas por las condiciones generales de frontera para las componentes tangenciales y normales de los campos en la interfaz, respectivamente,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{4.3}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \boldsymbol{\rho}_s \tag{4.4}$$

donde ρ_s es la densidad de carga superficial y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria a la interfaz.

De acuerdo con la Ec. (4.1), la integral de línea de la intensidad del campo E alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero y el campo es *conservativo*. Esta propiedad es una condición necesaria y suficiente para la existencia de un potencial escalar *V* cuyo gradiente negativo es E,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{4.5}$$

El signo algebraico es arbitrario, pero se ha tomado negativo para estar de acuerdo con la convención que orienta al vector del campo eléctrico E originándose en una carga positiva.

Aquellas superficies en las cuales *V* es constante se denominan *superficies equipotenciales* o, sencillamente, *equipotenciales*. Se sabe que en todo punto de una superficie equipotencial la intensidad del campo **E** es normal a la superficie; esto se demuestra fácilmente. Sea entonces

$$V(x, y, z) = \text{constante}$$
(4.6)

una superficie equipotencial. Tomando la primera diferencial se obtiene

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$
(4.7)

Los diferenciales dx, dy y dz son las componentes de un vector de desplazamiento dr a lo largo del cual se quiere determinar el cambio en V, y como dV = 0, este vector debe estar en la superficie V = constante. Las derivadas parciales $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$, por otra parte, son las razones o ritmos de cambio a lo largo de los ejes x, y y z respectivamente y, como tales, son las componentes de otro vector (ya estudiado en el Cap. 1), el *gradiente*,

$$\nabla V = \hat{\mathbf{a}}_{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_{z} \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathbf{E}$$
(4.8)

Obviamente, dV es el producto escalar de los vectores $d\mathbf{r} \ge \nabla V$; es decir, $-\mathbf{E}$, y como este producto se anula, los vectores deben ser ortogonales. Una excepción sucede cuando las tres derivadas parciales se anulan simultáneamente; en este caso la intensidad del campo es cero y estos puntos se denominan *puntos de equilibrio*.

Las trayectorias ortogonales de las superficies equipotenciales constituyen una familia de líneas, las cuales en todos sus puntos son tangentes al vector E (véase Capítulo 2, Sec. 2.5); ellas son las *líneas de fuerza*. Con frecuencia es conveniente representar gráficamente el campo de un sistema de cargas dado trazando la proyección de estas líneas sobre algún plano del campo. En coordenadas cartesianas, sea *d*l la representación de un pequeño desplazamiento a lo largo de una línea de fuerza,

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_x dx' + \hat{\mathbf{a}}_y dy' + \hat{\mathbf{a}}_z dz'$$
(4.9)

donde las tildes se introducen para evitar confusión con un punto de variable (x, y, z) en un equipotencial (se sigue la misma convención que en capítulos anteriores). Entonces, como las líneas de fuerza, por definición, son tangentes en todas partes al vector intensidad del campo, los componentes rectangulares de dl y $\mathbf{E}(x', y, z')$ tienen que ser proporcionales, es decir,

$$E_x = \lambda dx', \quad E_y = \lambda dy', \quad E_z = \lambda dz'$$
(4.10)

Por la forma en que se definen las líneas de fuerza se deducen dos propiedades. La primera es que bajo condiciones estáticas, cualquiera de las líneas debe comenzar en una carga positiva y terminar en una carga negativa, Fig. 4.1 (bajo condiciones de variación en el tiempo esta afirmación no es necesariamente cierta); la segunda es que las líneas de fuerza no pueden cortarse. Las líneas proporcionan una imagen mental útil del campo electrostático, una utilidad que es reforzada mediante la introducción de una restricción cuantitativa adicional. Nos imaginamos tubos de secciones transversales variables dibujados en el campo de manera que los lados de los tubos son paralelos en todos lados a las líneas de fuerza. Ninguna línea de fuerza cruza la pared de un tubo. Nos imaginamos también que todo el espacio está lleno de esos tubos con sus secciones transversales escogidas de modo que el número de tubos por unidad de área normal al campo en un punto en el espacio es igual a la magnitud del campo. Se puede demostrar que el número tubos por unidad de área normal al campo en cualquier punto es igual a la intensidad del campo en ese punto. Los tubos tendrán una sección transversal pequeña y densidad grande en regiones donde la intensidad del campo es alta, y una sección transversal grande donde la intensidad del campo es baja.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de fuerza son entonces

$$\frac{dx'}{E_x(x',y',z')} = \frac{dy'}{E_y(x',y',z')} = \frac{dz'}{E_z(x',y',z')}$$
(4.11)





En un medio lineal, homogéneo e isótropo se tiene que

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla V \tag{4.12}$$

y por la Ec. (4.2), el potencial V debe satisfacer la relación

$$\nabla \bullet (\varepsilon \nabla V) = \varepsilon \nabla^2 V + \nabla \varepsilon \bullet \nabla V = -\rho_v$$

y puesto que el medio es homogéneo, V debe ser una solución de la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_v \tag{4.13}$$

y E una solución de la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_v \tag{4.14}$$

En una región libre de fuentes ($\rho_v = 0$), la ecuación de Poisson se reduce a la *ecuación de Laplace*,

$$\nabla^2 V = 0 \tag{4.15}$$

El problema fundamental en electrostática es el de determinar una función escalar V(x, y, z) que satisfaga la ecuación de Poisson en todos los puntos del espacio y que, en ciertas superficies prescritas, cumpla con condiciones de frontera especificadas. En el sentido más general, el término *armónico* se aplica a cualquier solución de la ecuación de Laplace. En un sentido más restringido, el término aplica a una solución de la ecuación de coordenadas especificado.

Ejemplo 1. Como un ejemplo sencillo de la aplicación de la ecuación de Laplace, tómese la configuración del capacitor de placas paralelas mostradas en la Fig. 4.2. Entre las placas existe una diferencia de potencial V_0 tal y como se indica, y en el espacio entre ellas la permitividad es ε_0 y la densidad de carga es nula.

Solución Despreciando los efectos de distorsión en los bordes y suponiendo sólo variaciones con respecto a la coordenada *x*, la ecuación de Poisson, Ec. (4.15), se reduce a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \tag{4.16}$$

y las condiciones de frontera que se deben cumplir son: V(x = 0) = 0 y $V(x = d) = V_0$. La solución es entonces

$$V(x) = \frac{V_0}{d}x\tag{4.17}$$

у

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\hat{\mathbf{a}}_x \tag{4.18}$$

En función de las densidades de carga ρ_s y $-\rho_s$ en las placas superior e inferior, se tiene lo siguiente: como para x = d, $\rho_s = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}$ (la normal apuntando en la dirección negativa del eje *x*) y $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, de la Ec. (4.18) se obtiene que


Figura 4.2

$$V = \frac{\rho_s d}{\varepsilon_0} \tag{4.19}$$

y en función de ρ_s , las Ecs. (4.17) y (4.18) pueden expresarse en la forma

$$V = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} x \tag{4.20}$$

у

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x \tag{4.21}$$

Ahora se evaluará la integral de línea de la intensidad del campo electrostático alrededor de un entorno completamente cerrado. De acuerdo con la Ec. (4.1), esta integral debe ser cero. Como entorno cerrado, tómese la trayectoria *C* mostrada en la Fig. 4.2, consistente de los cuatro segmentos rectilíneos C_1 , C_2 , C_3 y C_4 uniendo los puntos (0, 0, 0), (*a*, *b*, 0), (*d*, *b*, 0) y (*d*, 0, 0). A lo largo de C_1 , la integral de línea de **E** viene dada por

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a E_x dx + \int_0^b E_y dy = \int_0^a \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right) dx = a \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right)$$

A lo largo de C_2 ,

$$\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^d E_x dx = \int_a^d \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right) dx = (d-a) \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right)$$

A lo largo de C_3 , **E** = **0** y, por tanto,

 $\int_{C_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

Finalmente, a lo largo de C_4 ,

$$\int_{C_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_d^0 E_x dx = \int_d^0 \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right) dx = -d \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_s \right)$$

Combinando las cuatro integrales se determina que su suma es igual a cero, lo cual *coincide* completamente con la Ec. (4.1). *Para cualquier otro contorno cerrado, se obtendría exactamente el mismo resultado.* Expresado en otra forma, cuando una carga eléctrica positiva se mueve alrededor de una trayectoria cerrada contra las fuerzas de un campo electrostático, la energía utilizada es cero, indiferentemente de cuál sea la trayectoria. La misma explicación se puede expresar diciendo que cuando la carga se transporta de un punto del campo a otro, la cantidad de trabajo realizado es independiente de la trayectoria. En particular, cuando la carga de prueba sigue la trayectoria formada por los segmentos rectilíneos C_1 , C_2 y C_3 desde (0, 0, 0) hasta (*d*, 0, 0), el trabajo realizado es exactamente igual al realizado cuando se recorre la trayectoria C_4 desde (0, 0, 0) hasta (*d*, 0, 0), sencillamente porque

José R. Morón

$$\int_{C_1+C_2+C_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{C_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_4^-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(4.22)

Aquí C_4^- denota la trayectoria C_4 cuando ésta se recorre en la dirección opuesta. Esta propiedad de los campos electrostáticos es la que se denomina *conservativa* y también puede expresarse en términos del potencial escalar *V*. Por ejemplo, al sustituir

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

en la Ec. (4.22), se obtiene

$$\int_{C_1+C_2+C_3} (-\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_4^-} (-\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$
(4.23)

El punto de partida P_1 y el punto de llegada P_2 son los mismos para ambas trayectorias en la Ec. (4.23). Ahora bien, para cualquier trayectoria *C* que conecta dos puntos arbitrarios *a* y *b*, la definición de ∇V requiere que

$$-\int_{C} \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_{a}^{b} dV = V(a) - V(b)$$
(4.24)

lo cual confirma que *la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente de la trayectoria.* Por tanto, *el valor del potencial electrostático en un punto es único.** En contraste, la diferencia de potencial variable en el tiempo definida como la integral de línea de **E** no es única.

Ya se ha señalado anteriormente que el campo electrostático en cualquier punto interior de un conductor es cero puesto que las cargas se moverían si hubiese un campo presente. Esto significa que el potencial en todo punto de una región conductora, o en una superficie, debe ser el mismo y que *la superficie debe ser un equipotencial*. Como resultado, el vector del campo electrostático es siempre normal a una superficie conductora y su componente tangencial es siempre igual a cero. En la superficie divisoria entre un conductor (medio 1) y un dieléctrico (medio 2), las ecuaciones para las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (4.3) y (4.4) se transforman en

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \tag{4.25}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2 = \boldsymbol{\rho}_s \tag{4.26}$$

puesto que E₁ y D₁ se anulan en la región conductora.

Ahora se derivarán las condiciones de frontera para el potencial. En términos del potencial, la Ec. (4.25) se puede escribir como

$$\hat{\mathbf{n}} \times (-\nabla V_2) = \mathbf{0} \tag{4.27}$$

y si el dieléctrico es lineal e isótropo, la Ec. (4.26) se convierte en

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\varepsilon_2 \nabla V_2\right) = \rho_s$$

0

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla V_2 = -\frac{1}{\varepsilon_2} \rho_s \tag{4.28}$$

Físicamente, $\hat{\mathbf{n}} \times (-\nabla V_2)$ representa el ritmo de decrecimiento de V_2 en la dirección del vector tangencial unitario

 $\hat{\mathbf{t}}$, tal y como se muestra en la Fig. 4.3. Por tanto, la Ec. (4.27) puede escribirse como

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \tag{4.29}$$

Esta propiedad ya se estudió en el Capítulo 2.

José R. Morón

De la misma forma, $\hat{\mathbf{n}} \cdot (-\nabla V_2)$ representa la razón o tasa de decrecimiento de V_2 en la dirección del vector normal. Por tanto,

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_2} \rho_s \tag{4.30}$$

Si ningún medio es conductor, la condición general de frontera, Ec. (4.3), puede escribirse como

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \tag{4.31}$$

en tanto que si ambos medios son lineales e isótropos, la condición dada por la Ec. (4.4) puede expresarse como

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\rho_s \tag{4.32}$$

De la naturaleza conservativa del campo se deduce que *el potencial mismo también debe ser continuo al atravesar la superficie de separación S* entre los dos medios, es decir,

$$V_1 = V_2$$
 (4.33)

En otras palabras, como el potencial en un punto es único, el valor de V en dos puntos adyacentes en ambos lados de la frontera tiene que ser el mismo. Se debe señalar también que las dos condiciones expresadas por las Ecs. (4.31) y (4.32) son independientes.



4.2 Distribuciones Axiales de Carga

En el Capítulo 2 se estudió el potencial producido por un dipolo. Ahora se estudiará con mayor rigor el campo producido por distribuciones axiales de carga y se obtendrá el potencial establecido por distribuciones simétricas de cargas puntuales denominadas *multipolos*. Primero se supondrá un elemento de carga Q situado en el punto $z = \zeta$ del eje z de un sistema de coordenadas esféricas cuyo origen está en O. Se desea expresar el potencial de Q en cualquier otro punto P con respecto al origen O en términos de las coordenadas de P. Las coordenadas rectangulares de P son (x, y, z), pero como el campo es simétrico con respecto al eje z, será suficiente situar a P en términos de las dos coordenadas polares r y θ , Fig. 4.4. La distancia de Q a P es r_2 y, por tanto, el potencial en P es

$$V(r_2, \theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_2}$$
(4.34)

siendo el medio homogéneo e isótropo y

$$r_{2} = \left(r^{2} + \zeta^{2} - 2r\zeta\cos\theta\right)^{1/2}$$
(4.35)

Hay dos casos a considerar. El primero, y probablemente el menos común, es aquél en el cual *P* está en el interior de una esfera trazada con *O* como centro y a través de ζ . Entonces *r* < ζ y

$$\frac{1}{r_2} = \left[1 + (r/\zeta)^2 - 2\frac{r}{\zeta}\cos\theta\right]^{-1/2}$$
(4.36)



La cantidad entre corchetes puede expandirse mediante el teorema del binomio si

$$\left| \left(r/\zeta \right)^2 - 2\frac{r}{\zeta}\cos\theta \right| < 1$$

Si además $|r/\zeta|^2 + |2\frac{r}{\zeta}\cos\theta| < 1$, la serie resultante converge en forma absoluta y, como consecuencia, las varias potencias pueden multiplicarse y los términos reacomodarse en la forma que se desee. Si los términos de la serie se ordenan en potencias ascendentes de r/ζ , se encuentra que

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\zeta} \left[1 + \frac{r}{\zeta} \cos \theta + \left(\frac{r}{\zeta}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right) + \cdots \right]$$

y ésta se puede escribir en forma abreviada como

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\cos \theta\right) \left(\frac{1}{r}\right)^n \tag{4.37}$$

Los coeficientes de r/ζ son polinomios en $\cos \theta$ y se conocen como *los polinomios de Legendre*:

$$P_{0}(\cos\theta) = 1$$

$$P_{1}(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_{2}(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^{2}\theta - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$$

$$P_{3}(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^{3}\theta - 3\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$
(4.38)

El valor absoluto de los coeficientes P_n nunca es mayor que la unidad, y de aquí que la expansión converja en forma absoluta siempre que $r < |\zeta|$.

En el segundo caso, *P* está fuera de la esfera de radio ζ , así que *r* > ζ . La expansión correspondiente se obtiene intercambiando *r* y ζ en la Ec. (4.36) y en la Ec. (4.37):

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\zeta}{r}\right)^2 - 2\frac{\zeta}{r}\cos\theta \right]^{-1/2}$$
(4.39)

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\cos \theta \right) \left(\frac{\zeta}{r} \right)^n, \quad r > \zeta$$
(4.40)

Este último resultado puede obtenerse en una forma un poco diferente. Considérese el recíproco de la distancia desde el punto $z = \zeta$ como una función de ζ ; haciendo ahora una expansión en serie de Taylor con respecto al origen $\zeta = 0$ se obtiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{r_2} = \left(r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta\cos\theta\right)^{-1/2}$$
(4.41)

$$f(\zeta) = f(0) + \zeta \left[\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}\right]_{\zeta=0} + \frac{\zeta^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2}\right]_{\zeta=0} + \cdots$$
(4.42)

En coordenadas rectangulares, r_2 es

$$r_2 = \left[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{1/2}$$
(4.43)

y

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r_2} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2} \right) \tag{4.44}$$

De aquí que

$$\left[\frac{\partial^n f(\zeta)}{\partial \zeta^n}\right]_{\zeta=0} = (-1)^n \left[\frac{\partial^n f(\zeta)}{\partial z^n}\right]_{\zeta=0} = (-1)^n \frac{\partial^n f(0)}{\partial z^n}$$
(4.45)

y, como f(0) = 1/r, se obtiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} - \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) + \dots + \zeta^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r}\right) + \dots$$
(4.46)

El potencial en un punto P externo a la esfera que pasa por Q puede escribirse en cualquiera de las formas

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \, \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \, \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.47}$$

de donde está claro que

$$\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r}\right)$$
(4.48)

Finalmente, supóngase que la carga está distribuida continuamente a lo largo de una longitud ℓ del eje z con una densidad $\rho_v = \rho_v(\zeta)$. El potencial en un punto a una distancia lo suficientemente alejada del origen es

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\ell} \rho_v(\zeta) \zeta^n d\zeta \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \quad r > \ell$$
(4.49)

El primer término de esta expansión es

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_0^\ell \rho_v \left(\zeta\right) d\zeta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
(4.50)

donde Q es ahora *la carga total* en la línea, y V_0 es evidentemente *el potencial de Coulomb de una carga puntual* Q *situada en el origen*. Sin embargo, la densidad puede asumir valores tanto negativos como positivos, de tal forma que la carga neta

$$Q = \int_{0}^{\ell} \rho_{v}\left(\zeta\right) d\zeta \tag{4.51}$$

sea cero. El término dominante al cual tiende el potencial cuando $r \gg \ell$ es entonces

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \int_0^\ell \rho_v(\zeta) \zeta \, d\zeta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$
(4.52)

La cantidad

$$p = \int_{0}^{\ell} \rho_{v}(\zeta) \zeta d\zeta \tag{4.53}$$

177

se denomina el momento dipolar de la distribución. En general, se tiene que

$$V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p^{(n)} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$
(4.54)

y se define a la relación

$$p^{(n)} = \int_0^\ell \rho_v\left(\zeta\right) \zeta^n d\zeta \tag{4.55}$$

como un multipolo axial de orden n.

4.3 El Dipolo*

Para que el potencial de una distribución de carga lineal pueda representarse mediante un dipolo, es necesario que la carga neta sea cero – el sistema como un todo es neutro – y que la distancia al punto de observación sea muy grande en relación con la longitud de la línea de carga. Ya se ha visto que el potencial V_0 es aquél que sería generado por una carga puntual matemática situada en el origen. V_0 posee una singularidad cuando r = 0, ya que una verdadera carga puntual implica una densidad infinita. La pregunta ahora es si se puede construir una carga puntual que origine al potencia V de un dipolo.

Supóngase ahora una carga puntual +*Q* en un punto $z = \ell$ en el eje *z* y una carga puntual -*Q* en el origen. De acuerdo con la Ec. (4.49), el potencial en un punto muy distante es

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Q\ell}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} + \text{términos de mayor orden}$$
(4.56)

donde r_2 es la distancia de la carga +Q al punto del campo. El producto $p = Q\ell$ es evidentemente el momento dipolar de la configuración. Supóngase ahora que $\ell \rightarrow 0$ y que al mismo tiempo Q aumenta en una forma tal que el producto $p = q\ell$ permanece constante. Entonces, en el límite, se genera una singularidad cuyo potencial es

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Q\ell}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$
(4.57)

en todas partes menos en el origen. Observe que se ha asociado una dirección con un punto. El momento dipolar es realmente un vector **p** dirigido de -Q a +Q, en este caso, a lo largo del eje *z*. El vector unitario dirigido a lo largo de *r* desde el dipolo hacia el punto de observación es \hat{a}_r , y, por lo tanto, el potencial es

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$
(4.58)

El campo de un dipolo posee simetría cilíndrica con respecto a su eje, Fig. 4.5, y por esa razón en cualquier plano meridiano las componentes radiales y transversales de la intensidad del campo son



^{*} Este tema del dipolo se estudió en la Sec. 2.12. Se incluye aquí para hacer más completa la discusión sobre multipolos.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\sin\theta}{r^3}$$
(4.59)

La energía potencial de un dipolo en un campo externo se determina más fácilmente a partir de las energías potenciales de sus dos cargas puntuales. Supóngase que se tiene una carga +*Q* situada en un punto *a* y una carga -*Q* en un punto *b*, separada de la primera por una distancia ℓ , en una campo externo cuyo potencial es V(x, y, z). La energía potencial del sistema es entonces

$$W = QV(a) - QV(b)$$

o, conforme $b \rightarrow a$,

$$W = QdV = Q\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE\cos\theta$$
(4.60)

donde θ es el ángulo formado por el dipolo con el campo externo E.

La fuerza ejercida sobre el dipolo por el campo externo es igual al negativo del gradiente de *W* cuando la orientación es fija:

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \right) \Big|_{\theta = \text{constante}}$$
(4.61)

Por otra parte, un cambio de orientación en un punto fijo del campo también conduce a una variación en la energía potencial. El par de fuerzas ejercido sobre un dipolo por un campo externo es, por tanto,

$$T = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -pE \operatorname{sen} \theta \tag{4.62}$$

o, vectorialmente,

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{4.63}$$

Supóngase ahora que se tienen dos dipolos arreglados en la forma mostrada en la Fig. 4.6. Esta configuración se denomina un *cuadripolo lineal*.

Un examen de la simetría de la Fig. 4.6 muestra que el campo neto en *P*, sobre el bisector perpendicular, será un vector paralelo a la dirección *r*. La componente del campo debida a la carga central 2*q* es

$$E_{2q} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{4.64}$$

y está dirigida alejándose de 2q. Cada carga en los extremos, -q, produce un campo

$$E_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + \ell^2\right)}$$

$$(4.65)$$

$$E_{-q} = \frac{e_{-q}}{r} \frac{e_{-q}}{2q} = -q$$

$$E_{-q} = \frac{e_{-q}}{r} \frac{e_{-q}}{2q} = -q$$

Figura 4.6

dirigido hacia la carga. La contribución de la carga –*q* al campo total es $E_{-q} \cos \theta$, donde $\cos \theta = r/\sqrt{r^2 + \ell^2}$. De manera que el campo total es normal al dipolo y tiene una magnitud

$$E_{r} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\frac{1}{r^{2}} - \frac{r}{\left(r^{2} + \ell^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$
(4.66)

La Ec. (4.66) toma una forma más sencilla bajo ciertas circunstancias. Luego de factorizar el término $1/r^2$, se obtiene

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left[1 - \left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$
(4.67)

En este caso se usará la fórmula de la expansión binomial

$$(1+a)^{n} = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{3} + \cdots$$
(4.68)

Si $a \ll 1$, los dos primeros términos en la derecha constituyen una buena aproximación al valor del lado izquierdo. Tomando $(\ell/r) = a$ y n = -3/2, se obtiene

$$\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{\ell^2}{r^2}$$
(4.69)

y la Ec. (4.67) se convierte en aproximadamente

$$E \approx \frac{3qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \tag{4.70}$$

Así que el campo eléctrico lejano en el bisector perpendicular de un cuadripolo lineal decae como la cuarta potencia de la distancia.

4.4 Formulación de Problemas con Valores de Frontera en Electrostática

Matemáticamente, el problema primordial en el campo electromagnético consiste en obtener la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales (las ecuaciones de Maxwell) sujetas a ciertas condiciones especificadas en las fronteras de la región bajo consideración. Si la distribución de las fuentes se especifica completamente, el campo se determina en forma única e, inversamente, si el campo se especifica en todos los puntos dentro de una región, entonces la distribución de la fuente, como ya se mencionó, no necesariamente queda determinada en forma única. Generalmente, en los problemas que se encontrarán, se especifican sólo ciertas fuentes externas o un campo aplicado a partir de los cuales se debe determinar la polarización en los dieléctricos y la distribución de la carga en la superficie de los conductores, de tal forma que se satisfagan las condiciones de fronteras en las superficies de discontinuidad existentes.

Entre los problemas electrostáticos de este tipo se reconocen dos clases: el problema con valores de contorno *homogéneo* y el problema *no homogéneo*. Como ilustración del primero, considérese un conductor colocado dentro de un dieléctrico; en el conductor se coloca una carga y se desea conocer la distribución de ella en la superficie y el potencial del conductor respecto a un potencial de referencia o el infinito. En todos los puntos externos al conductor, el potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace. Se debe anular (en forma regular) en el infinito y debe tomar un valor constante en la superficie del conductor. Posteriormente se demostrará que estas condiciones son suficientes para determinar al potencial *V* en forma única. La densidad de la carga superficial puede entonces determinarse a partir de la derivada normal de *V*, sujeta a la condición de que $\int \rho_s da$ en la superficie del conductor tiene que ser igual a la carga total.

Un problema no homogéneo lo representa el caso de un dieléctrico o un cuerpo conductor introducido en un *campo fijo* producido por fuentes externas. En la superficie del conductor se induce una carga, la cual se distribuye de tal forma que el potencial *resultante* sea constante en la superficie. La integral $\int \rho_s da$ es ahora igual a cero. De la misma forma se inducirá en los dieléctricos una polarización cuyo campo se combina con el campo primario para dar lugar a un campo resultante que satisfaga entonces las condiciones de frontera.

En la mayoría de los casos, la solución de la ecuación de Laplace es bastante difícil y muchas veces casi imposible, al menos que las superficies de frontera en los problemas bajo consideración coincidan con las superficies de coordenadas utilizadas. Ésta es una limitación básica de las soluciones de problemas con valores de contorno; por ejemplo, para obtener *soluciones formales* de la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares, las fronteras deben ser planas; en coordenadas polares deben ser esféricas y así sucesivamente para los diferentes sistemas de coordenadas. Obsérvese que cuando se dice que los bordes son planos, cilíndricos, esféricos, etc., se quiere hacer referencia a que esos bordes deben coincidir con las superficies de coordenadas. Si no hay coincidencia, las soluciones respectivas se obtienen en la forma de series infinitas (series de funciones) para las cuales las evaluaciones de los coeficientes es a menudo una tarea bastante complicada y con frecuencia casi imposible.

Los problemas del campo electrostático, en su mayoría, pueden resolverse utilizando uno de los métodos que se enumeran a continuación:

- 1. El método de *separación de variables*. Este método, muy poderoso, tiene la limitación de que sólo hay once sistemas de coordenadas en los cuales se puede utilizar: rectangulares, cilíndricas circulares, cilíndricas elípticas, cilíndricas parabólicas, esféricas, esféroidales prolongas, esferoidales oblongas, parabólicas, cónicas, elipsoidales y paraboloidales.
- 2. El método numérico.
- 3. El método de adaptar una solución conocida a un nuevo problema.
- 4. El método de *imágenes*.
- 5. El método de *transformaciones conformes*.
- 6. El método gráfico.
- 7. El método del tanque electrolítico (método experimental).

También se puede elaborar un conjunto de las condiciones que se deben cumplir en todo problema con condiciones de frontera. Para simplificar las cosas, y a menos que se especifique de otra forma, de ahora en adelante se supondrá que los dieléctricos son isótropos y homogéneos, excepto a través de un número finito de superficies de continuidad. Las condiciones a satisfacer son:

- 1. $\nabla^2 V = 0$ en todos los puntos que no están en una superficie de contorno ni en el interior de fuentes externas.
- **2.** El potencial *V* es continuo en todas partes, incluyendo las superficies entre dieléctricos o entre conductores. La excepción es para superficies que posean una doble capa.
- 3. *V* es finito en todas partes excepto en cargas puntuales externas introducidas como fuentes primarias.

4. $\varepsilon_2 (\partial V/\partial n)_2 - \varepsilon_1 (\partial V/\partial n)_1 = 0$ a través de una superficie que una a dos dieléctricos.

- 5. $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = -\rho_s$ en la superficie de frontera entre un conductor y un dieléctrico.
- 6. En la superficie de un conductor se tiene que
 - (a) V es una constante conocida V_i , o
 - (b) *V* es una constante incógnita y

$$\oint_{S} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} dS = -q_i$$

7. *V* se comporta en forma regular en el infinito siempre que todas las fuentes estén dentro de una distancia finita del origen.

En la condición (4) se supone que la superficie de separación entre los dieléctricos no es portadora de carga, lo cual es cierto en la mayoría de los casos. Obsérvese también que la normal se toma dirigida desde el medio (1) al medio (2) y en la condición (5) desde el conductor hacia el dieléctrico.

4.5 Unicidad de la Solución^{*}

Sea V una función armónica (esto es, V satisface la ecuación de Laplace) la cual posee primera y segunda derivadas parciales continuas en una región v y en su superficie de frontera S. De acuerdo con la primera identidad de Green,

$$\int_{v} \left(\nabla V\right)^{2} dv = \oint_{S} V \frac{\partial V}{\partial n} dS$$
(4.71)

Supóngase ahora que V = 0 en la superficie S. En este caso,

$$\int_{v} (\nabla V)^2 \, dv = 0$$

y puesto que el integrando es esencialmente una cantidad positiva, entonces ∇V debe anularse en v y esto sólo es posible si V es constante. Como por hipótesis, el potencial V es continuo en v y es igual a cero en la frontera, se concluye que V = 0 en toda la región.

Sean ahora V_1 y V_2 dos funciones las cuales son armónicas en la región cerrada v y sea

$$V = V_1 - V_2$$

Entonces, si V_1 y V_2 son iguales en la frontera S su diferencia se anula en forma idéntica en v y así se puede escribir que: una función armónica que posea derivadas de primer y segundo orden continuas en una región v regular y cerrada es determinada en forma única por sus valores en la frontera S.

Considérese ahora un sistema de conductores inmersos en un dieléctrico homogéneo cuyo potencial se especifica. Se quiere demostrar que el potencial en todo punto del espacio está determinado en forma única. El razonamiento del párrafo anterior se aplica ahora a un volumen v el cual está delimitado interiormente por las superficies de los conductores y en el exterior por una esfera de radio R muy grande. Supóngase que existen dos soluciones V_1 y V_2 y que ambas satisfacen las condiciones de frontera prescritas. Entonces, en las superficies de los conductores, $V = V_1 - V_2 = 0$. Como se supone que V_1 y V_2 son soluciones del problema planteado, entonces ellas deben satisfacer las condiciones de la Sección 4.8 y por tanto, siendo ellas armónicas, su diferencia también es armónica, tiene el valor cero en los conductores y es regular en el infinito. La integral de superficie en el lado derecho de la Ec. (4.71) puede ahora extenderse por las superficies de las fronteras interna y externa; en la frontera interna, V = 0 y la integral se anula. En la esfera exterior, $\partial V/\partial n = \partial V/\partial R$; si R tiende a infinito, V se anula como 1/R y $\partial V/\partial R$ como $1/R^2$, o sea que el integrando $V \partial V/\partial n$ se anula como $1/R^3$, mientras que el área de la esfera tiende a infinito como R^2 . Por tanto, la integral de superficie en la frontera exterior es cero en límite cuando $R \rightarrow \infty$. También se concluye que la integral de volumen en la Ec. (4.71) debe anularse cuando se extiende por todo el espacio externo a los conductores y, como antes, la conclusión es que si las dos funciones V_1 y V_2 son idénticas en las fronteras, entonces tienen que ser idénticas en todas partes; existe sólo una función potencial que toma los valores constantes especificados en un conjunto de conductores dados.

El lado izquierdo de la Ec. (4.71) también puede anularse especificando que $\partial V/\partial n$ es cero en el contorno circundante *S*. Entonces, en el volumen *v* se tiene de nuevo que $\nabla V = \mathbf{0}$ y se deduce que *V* es constante en todas partes aunque no necesariamente cero, ya que la condición $\partial V/\partial n = 0$ no implica la anulación de V = 0 en *S*. Igual que antes, se concluye que si las derivadas normales $\partial V_1/\partial n$ y $\partial V_2/\partial n$ de dos soluciones son idénticas en los bordes, las soluciones mismas sólo pueden diferir por una constante. En otras palabras, *el potencial se*

^{*} Se repite esta sección para apoyar la continuidad y hacer más completo el capítulo.

determina en forma única, excepto por una constante aditiva, a partir de los valores que toma la derivada normal en los bordes. Como la derivada normal del potencial es a su vez proporcional a la densidad de carga superficial, entonces sólo existe una solución correspondiente a un conjunto dado de cargas en los conductores.

En el caso en que en el campo estén dieléctricos presentes, el requisito que exige que las primeras derivadas de V y el propio V, sean continuas, no se satisface ya que la Ec. (4.71) no puede aplicarse directamente. Sin embargo, la región externa a los conductores puede descomponerse en volúmenes parciales v_i limitados por las superficies S_i dentro de las cuales el dieléctrico es homogéneo. Entonces se aplica la Ec. (4.71) a cada una de estas regiones por separado, el potencial es continuo a través de cualquier superficie S_i y las derivadas en un lado de S_i vienen fijadas en términos de las derivadas en el otro lado. Es fácil ver que también en este caso más general *el problema electrostático está completamente determinado por los valores bien de los potenciales o de las cargas especificadas en los conductores del sistema.*

4.6 Solución de la Ecuación de Laplace

Es obvio que el trabajo fundamental para resolver un problema electrostático es la determinación de una solución a la ecuación de Laplace en una forma tal que permita satisfacer las condiciones de frontera mediante el ajuste de constantes arbitrarias. Como se mencionó en la sección 3.8, existen varios métodos especiales que se pueden aplicar con este propósito; de esos métodos, aparte de la teoría de ecuaciones integrales, el único procedimiento que es a la vez práctico y general en carácter, es el método conocido como "separación de variables". En los tres sistemas de coordenadas más comunes, las formas de la ecuación de Laplace son:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(coordenadas cartesianas)}$$
(4.72)

$$\nabla^{2}V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial^{2} V}{\partial \phi^{2}} + \frac{\partial^{2} V}{\partial z^{2}} = 0 \qquad \text{(coordenadas cilíndricas)}$$
(4.73)

$$\nabla^{2}V = \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}V}{\partial\phi^{2}} = 0 \quad \text{(coordenadas esféricas)}$$
(4.74)

El Ejemplo 1 dio una solución a la ecuación de Laplace cuando el potencial varía en sólo una dirección (la dirección *x* en el ejemplo). Ahora se considerará un ejemplo con variación del potencial en dos direcciones.

Ejemplo 2. La técnica de *separación de variables* posee una mayor aplicación en la solución de la ecuación de Laplace. Como un primer ejemplo de una solución a la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares se tomará el caso de un tubo metálico largo y hueco con una sección transversal rectangular. La geometría se ilustra en la Fig. 4.7. Tres lados del tubo se mantienen a un potencial cero y el cuarto lado, aislado de los otros tres, se mantiene a un potencial variable $V = V_0 \operatorname{sen}(\pi x/a)$, donde V_0 es una constante. Se desea determinar el potencial eléctrico en todos los puntos en el espacio libre interior al tubo.

El problema consiste en determinar una solución a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \tag{4.75}$$

que satisfaga las siguientes condiciones de frontera:



Como el tubo se considera muy largo, el campo en la zona interior se puede considerar independiente de la coordenada *z*. Por tanto, en coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace correspondiente es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{4.76}$$

Utilizando el método de separación de variables, se supone una solución de la forma

$$V(x,y) = X(x)Y(y)$$
 (4.77)

donde ahora X es una función de x solamente y Y sólo es función de y. Sustituyendo esta expresión en la Ec. (4.76) y reagrupando términos, se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$
(4.78)

El lado izquierdo de esta ecuación es sólo función de x y el lado derecho sólo función de y. O sea que en la Ec. (4.78), las variables independientes están *separadas* y, como resultado, los cambios en y en el lado derecho no afectan al lado izquierdo y, similarmente, cambios en x en el lado izquierdo no afectan al lado derecho. En consecuencia, la única forma bajo la cual se puede mantener la igualdad es que ambos miembros sean independientes de x y de y; en otras palabras, la igualdad se mantiene si ambos miembros son iguales a alguna constante real, dígase $-k^2$ (el signo negativo se escoge a propósito para adaptar mejor las condiciones de frontera):

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dX^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$
(4.79)

En términos de la *constante de separación*, $-k^2$, se tienen entonces las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 ag{4.80}$$

у

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0 ag{4.81}$$

en las cuales se puede observar que el método de separación de variables ha reducido una ecuación diferencial parcial a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones generales de las Ecs. (4.80) y (4.81) son, respectivamente,

$$X(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx \tag{4.82}$$

у

$$Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$$
(4.83)

donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son constantes arbitrarias cuyos valores se determinan a partir de las condiciones de frontera. Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la Ec. (4.77) resulta en

$$V(x,y) = (A_1 \cos kx + A_2 \sin kx) (B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky})$$
(4.84)

Esta solución puede ajustarse para que satisfaga todas las condiciones de frontera en forma simultánea. Aplicando la primera condición de frontera, se obtiene

$$0 = A_1 \left(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky} \right)$$

La única forma en que esta igualdad sea válida para toda y, sin caer en la condición trivial, es que A_1 sea igual a cero. Entonces,

$$V(x,y) = \sec kx \left(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky} \right)$$
(4.85)

donde A₂ ha sido absorbida por B₁ y B₂. Aplicando la segunda condición de frontera a la Ec. (4.85) resulta en

$$0 = \operatorname{sen} kx \left(B_1 + B_2 \right)$$

Esto requiere que $B_1 + B_2 = 0$ y, por tanto, la Ec. (4.85) se reduce a

$$V(x,y) = C_k \operatorname{sen} kx \operatorname{senh} ky \tag{4.86}$$

donde $C_k = 2B_1$. Aplicando la tercera condición de frontera da ahora

 $0 = C_k \operatorname{sen} ka \operatorname{senh} ky$

la cual a su vez demanda que sen ka = 0 y que, en consecuencia,

 $ka = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

(Obsérvese que el caso n = 0 se ha omitido a propósito ya que conduce a la solución trivial). Esto significa que la forma más general de la Ec. (4.77) es una superposición de soluciones sencillas de la forma $C_n \operatorname{sen}(n\pi x/a) \operatorname{senh}(n\pi y/a)$. Así se tiene entonces que

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$
(4.87)

En la expresión anterior, el índice *n* cubre solamente el conjunto de enteros positivos. Los valores negativos de *n* sólo cambian el signo algebraico de C_n sin afectar en ninguna manera la forma de la suma. Esto se debe a que la constante C_n asociada con pares de términos correspondientes a cada combinación de valores positivos y negativos de *n*, siempre pueden combinarse en una sola constante.

Del número infinito de términos en el lado derecho de la Ec. (4.87) se retendrán ahora sólo aquellos términos necesarios para satisfacer la cuarta y última condición de frontera. En este caso ella se puede satisfacer con la retención de un solo término, el correspondiente a n = 1. Así se tiene que

$$C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \operatorname{senh} \frac{\pi}{a} b = V_0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \tag{4.88}$$

de donde

$$V(x,y) = \frac{V_0}{\operatorname{senh}(\pi b/a)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)$$
(4.89)

y ésta es la solución buscada.

Como una segunda aplicación del método de separación de variables, considere dos placas conductoras semiinfinitas y paralelas al plano *xy*, una en *y* = 0 y otra en = 0 y otra en *y* = π , como se ilustra en la Fig. 4.8. Suponga que la frontera izquierda de la región entre las placas, localizada en *x* = 0, está sellada por una banda infinita que está aislada de las dos placas y se mantiene a un potencial especificado *V*₀(*y*). Se quiere determinar el potencial en la región entre las placas.



Figura 4.8. Dos placas conductoras semi-infinitas conectadas a tierra.

Igual que en el caso anterior, se supone que el potencial es independiente de *z*, ya que todo lo demás en el problema posee esta simetría. Esto, igual que antes, el problema se reduce a dos dimensiones y la ecuación de Laplace se escribe como

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{4.90}$$

con las condiciones de frontera

$$V(x,0) = 0 (4.91)$$

$$V(x,\pi) = 0 \tag{4.92}$$

para x > 0, ya que las dos placas están a tierra; también

$$V(0, y) = V_0(y)$$
(4.93)

para $0 \le y \le \pi y$

$$V(x y) \to 0$$
 conforme $x \to \infty$ (4.94)

y siguiendo ahora el mismo procedimiento que antes, utilizando el método de separación de variables, se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dX^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k^2$$
(4.95)

donde V(x, y) = X(x)Y(y). La razón para escoger la constante igual a k^2 se aclarará más adelante. La Ec. (4.95) se separa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X \tag{4.96}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2Y \tag{4.97}$$

186

Las soluciones generales de estas ecuaciones son:

$$X = A \exp(kx) + B \exp(-kx) \tag{4.98}$$

$$Y = C \operatorname{sen}(ky) + D \cos(ky) \tag{4.99}$$

y por tanto

$$V(x, y) = \left[A \exp(kx) + B \exp(-kx)\right] \left[C \sin(ky) + D \cos(ky)\right]$$
(4.100)

donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes arbitrarias. La condición de frontera (4.94) se satisface automáticamente si A = 0 y k > 0. Observe que la opción k^2 facilita esto haciendo que *V* crezca o decaiga monótonamente en la dirección de *x* en vez de oscilar. La condición de frontera (4.91) se satisface si D = 0. La condición de frontera (4.92) se satisface siempre que

$$\operatorname{sen}\left(k\pi\right) = 0\tag{4.101}$$

lo que implica que k es un entero positivo, dígase n. De modo que nuestra solución se reduce a

$$V(x, y) = C \exp(-nx) \operatorname{sen}(ny)$$
(4.102)

donde *B* ha sido absorbida por *C*. Observe que esta solución sólo puede satisfacer la condición de frontera final (4.93) siempre que $V_0(y)$ sea proporcional a sen(ny). Así que a primera vista, pareciese que el método de separación de variables sólo trabaja para un subconjunto muy especial de condiciones de frontera. Sin embargo, éste no es el caso. Puesto que la ecuación de Laplace es *lineal*, cualquier combinación lineal de soluciones también es una solución. Por tanto, es posible formar una solución más general que la Ec. (4.102) añadiendo muchas soluciones que incluyan diferentes valores de *n*. Así pues,

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-nx) \sin(ny)$$
(4.103)

donde las C_n son constantes. Esta solución satisface automáticamente las condiciones de frontera (4.91), (4.92) y (4.94). Al aplicar la última condición de frontera, Ec. (4.93), se obtiene

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(ny) = V_0(y)$$
(4.104)

Ahora se debe escoger C_n para que se ajuste a una función arbitraria $V_0(y)$. Aquí se utilizan dos propiedades muy útiles de las funciones sen(ny); vale decir, que ellas son mutuamente *ortogonales* y que forman un *conjunto completo*. La propiedad de ortogonalidad de estas funciones se manifiesta a través de la relación

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(ny) \operatorname{sen}(my) dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$
(4.105)

La propiedad de completitud de las funciones seno significa que cualquier función general $V_0(y)$ siempre puede representarse en forma adecuada como una suma ponderada de funciones seno de diferentes valores de *n*. Multiplicando ambos lados de la Ec. (4.104) por sen(my) e integrando sobre *y*, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(ny) \operatorname{sen}(my) dy = \int_0^{\pi} V_0(y) \operatorname{sen}(my) dy$$
(4.106)

y de la relación de ortogonalidad se obtiene

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_0(y) \sin(ny) \, dy \tag{4.107}$$

y ahora se tiene una solución general al problema para cualquier función de excitación $V_0(y)$.

Si el potencial $V_0(y)$ es una constante, entonces

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(ny) dy = \frac{2V_0}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$
(4.108)

lo que da la relación para los coeficientes como

$$C_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$
(4.109)

y la solución buscada es entonces

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\exp(-nx)\sin(ny)}{n}$$
(4.110)

4.7 Soluciones Formales de la Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas circulares, la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$
(4.111)

Igual que en el caso rectangular, la utilización de una solución en forma de producto reducirá la ecuación de Laplace a tres ecuaciones diferenciales interdependientes y en una sola variable cada una. Entonces, sustituyendo la solución producto

$$V(\rho,\phi,z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$
(4.112)

en la Ec. (4.111) resulta en

$$\Phi Z \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \Phi Z \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + R Z \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + R \Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$
(4.113)

Dividiendo este resultado por el producto $R\Phi Z$ y trasponiendo, resulta en

$$\frac{1}{R}\frac{d^{2}R}{d\rho^{2}} + \frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^{2}\Phi}\frac{d^{2}\Phi}{d\phi^{2}} = -\frac{1}{Z}\frac{d^{2}}{dz^{2}} = -\lambda^{2}, \quad \lambda^{2} \ge 0$$
(4.114)

donde λ^2 es la constante de separación [la única forma en que la Ec. (4.114) se cumpla para todos los valores de las variables *r*, ϕ y *z* es que la suma de cada uno de los términos sea igual a una constante]. De la Ec.(4.114) se obtienen dos ecuaciones diferenciales, a saber,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0 \tag{4.115}$$

у

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + \lambda^2 Z = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = n^2$$
(4.116)

Aquí n^2 es una segunda constante de separación cuyo valor todavía está por determinarse. La Ec. (4.116) puede separarse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0 \tag{4.117}$$

у

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0$$
(4.118)

Ahora bien, las Ecs. (4.115) y (4.117) pueden resolverse fácilmente, lo que da como resultado

$$Z(z) = A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z}$$
(4.119)

у

$$\Phi(\phi) = B_1 \cos \phi + B_2 \sin \phi \tag{4.120}$$

La Ec. (4.118)), conocida como la *ecuación de Bessel*, conduce a soluciones denominadas *funciones de Bessel*, las cuales tienen la forma de series infinitas en potencias de r. Por ejemplo, cuando n = 0, la solución es

$$R_0(\rho) = C_1 J_0(\lambda \rho) + C_2 Y_0(\lambda \rho)$$
(4.121)

donde

$$J_{0}(\lambda \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{(\lambda \rho/2)^{2k}}{(k!)^{2}}$$
(4.122)

es la función de Bessel de la primera clase y orden cero, y

$$Y_0(\lambda \rho) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{\lambda \rho}{2} + 0.5772 \right) J_0(\lambda \rho)$$
(4.123)

es la función de Bessel de la *segunda clase*, o *función de Neumann*, y de *orden cero*. En la Fig. 4.9 se grafican algunas funciones de Bessel para diferentes valores de *n*.

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es el producto de las Ecs. (4.119), (4.120) y de funciones de Bessel similares en su forma a las dadas en la Ec. (4.121). Sin embargo, muchos problemas en coordenadas cilíndricas poseen soluciones independientes de la coordenada z. En esos casos,

$$V(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \tag{4.124}$$

y la ecuación de Laplace se reduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0 \tag{4.125}$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - n^2 R = 0$$
(4.126)

Se puede demostrar que la solución general de la segunda ecuación es

$$R = \begin{cases} C_1 \ln \rho + C_2, & n = 0\\ C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}, & n \neq 0 \end{cases}$$
(4.127)

la cual, en combinación con la Ec. (4.120) da

$$\Phi(\rho,\phi) = \begin{cases} C_1 \ln \rho + C_2, & n = 0\\ (B_1 \cos n\phi + B_2 \sin n\phi) (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}), & n \neq 0 \end{cases}$$
(4.128)

Las constantes arbitrarias de integración, B_1 , B_2 , C_1 y C_2 , junto con todos los valores posibles de la constante n, deben obtenerse a partir de las condiciones de frontera.



Figura 4.9. Curvas para las funciones de Bessel de la primera y segunda clase. (a) Primera clase; (b) segunda clase (funciones de Neumann).

Ejemplo 3. La línea coaxial de la Fig. 4.10 es un buen ejemplo al cual se puede aplicar la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. La solución a este problema posee significado práctico, ya que también es válida para campos variables en el tiempo.

Solución Para los objetivos de obtener la solución se supondrá que:

- 1. El cable coaxial es muy largo, de tal forma que $\partial/\partial z = 0$.
- 2. El radio del conductor interno es *a*, y el radio interior del conductor externo es *b*.
- 3. El conductor interno (un equipotencial) está a tierra, esto es, V(a) = 0.
- 4. El conductor externo (el cual también es un equipotencial) se mantiene a un potencial fijo conectando una batería entre los dos conductores; entonces $V(b) = V_0$.
- 5. El espacio entre los electrodos, $a < \rho < b$, lo constituye un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo de permitividad ε .



Se quiere determinar la distribución de potencial en el interior de la región dieléctrica y también la intensidad del campo eléctrico. Dicho en forma matemática, se desea determinar una solución de la ecuación de Laplace, independiente de *z*, que satisfaga las condiciones de frontera V(a) = 0, $V(b) = V_0$. Como consecuencia de la unicidad, sólo existe una solución. Como también la solución es independiente de ϕ , la escogencia obvia dictada por la Ec. (4.128) es

$$V = C_1 \ln \rho + C_2 \tag{4.129}$$

Aplicando la primera condición de frontera, V(a) = 0, se obtiene $C_2 = -C_1 \ln a$, de manera que

$$V = C_1 \ln \left(\rho / a \right)$$

Aplicando ahora la segunda condición de frontera, $V(b) = V_0$, se obtiene

$$C_1 = \frac{V_0}{\ln(b/a)}$$

y la distribución de potencial es

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a), \qquad a \le \rho \le b$$
(4.130)

Para obtener una expresión de la intensidad del campo eléctrico se utiliza la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$ en coordenadas cilíndricas y se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)} \frac{\hat{\mathbf{a}}_{\rho}}{\rho} \tag{4.131}$$

Las superficies equipotenciales son concéntricas pero con una separación desigual a lo largo de un radio. Las líneas de la intensidad del campo eléctrico se originan en el cilindro exterior y terminan en el cilindro interior donde el potencial es menor. Las líneas de **E** se hacen más densas cerca de la superficie del conductor interno, lo cual es consistente con la Ec. (4.131), la cual muestra que la amplitud de **E** aumenta para ρ decreciente. Así que ρ = *a* determina el área más crítica desde un punto de vista de aislamiento, ya que cuando **E** excede la *rigidez dieléctrica* de un material, el aislamiento se rompe y se origina un arco entre los conductores. Típicamente, la rigidez dieléctrica del aire es de 3000 kV/m, mientras que la del papel es de 15000 kV/m. Por tanto, el dieléctrico se romperá si la cantidad $V_0/[a\ln(b/a)]$ excede la rigidez dieléctrica de la substancia dieléctrica entre los conductores.

Ejemplo 4. Un material conductor de espesor uniforme *h* y conductividad σ tiene la forma de un cuarto de arandela, con radio interno *a* y radio externo *b*, como muestra la Fig. 4.11. Determinar la resistencia entre las dos caras extremas.



Solución: Aquí se usará el sistema cilíndrico. Se supone una diferencia de potencial V_0 entre las dos caras, digamos V = 0 en la cara en y = 0 ($\phi = 0$) y $V = V_0$ en la otra cara en x = 0 ($\phi = \pi/2$). Se resolverá la ecuación de Laplace para el potencial V sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$V = 0 \quad \text{en} \quad \phi = 0$$

$$V = V_0 \quad \text{en} \quad \phi = \pi/2 \tag{4.132}$$

Puesto que el potencial V sólo depende de ϕ , la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se simplifica a

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

cuya solución general es

$$V = A\phi + B$$

y que al aplicar las condiciones de frontera dadas en la Ec. (4.132) se convierte en

$$V = \frac{2V_0}{\pi}\phi \tag{4.133}$$

La densidad de corriente es

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} = -\boldsymbol{\sigma} \nabla V$$
$$= -\hat{\mathbf{a}}_{\phi} \boldsymbol{\sigma} \frac{dV}{\rho d\phi} = -\hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{2\boldsymbol{\sigma} V_0}{\pi \rho}$$

La corriente total se calcula integrando J en la superficie $\phi = \pi/2$ en la cual $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{a}}_{\phi}hd\rho$, y se obtiene

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \int_{a}^{b} \frac{d\rho}{\rho}$$
$$= \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$
$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln (b/a)}$$
(4.134)

y por tanto

Ejemplo 5. Considérese un cilindro dieléctrico de radio r_0 y permitividad ε de longitud infinita y paralelo al eje z. El cilindro está colocado en un campo electrostático uniforme \mathbf{E}_0 dirigido a lo largo del eje x, como en la Fig. 4.12. Se quiere determinar el potencial inducido y el campo para todos los valores de ρ y ϕ .

En coordenadas cilíndricas, $x = \rho \cos \phi$ y por tanto **E**₀ puede considerarse como el campo producido por un potencial aplicado *V*₀ dado por

$$V_0 = -E_0 r \cos \phi \tag{4.135}$$

ya que $-\nabla V_0 = \mathbf{E}_0$. Sea *V* el potencial inducido. Como V_0 varía con ϕ de acuerdo con $\cos \phi$, el potencial inducido *V* también lo hará. Esto puede verse notando que las condiciones de frontera en $\rho = r_0$ deben cumplirse para todos los valores de ϕ y como $\cos \phi$ es ortogonal a $\cos n\phi$ y $\sin n\phi$, sólo el término para n = 1 en la solución general (4.128) está acoplado con el potencial aplicado. Por tanto, una forma adecuada para *V* es



$$V = \begin{cases} A\rho \cos\phi & \rho \le r_0 \\ B\rho^{-1} \cos\phi & \rho \ge r_0 \end{cases}$$

En $\rho = r_0$, el potencial debe ser continuo al atravesar la frontera, de manera que

$$Ar_{0}\cos\phi + V_{0}(r_{0}) = Br_{0}^{-1}\cos\phi + V_{0}(r_{0})$$

 $B = r_0^2 A$

0

También en
$$\rho = r_0$$
, la componente radial de la densidad de flujo, εE_{ρ} , debe ser continua y por tanto

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} (A\rho \cos \phi - E_0 \rho \cos \phi) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (B\rho^{-1} \cos \phi - E_0 \rho \cos \phi)$$
$$\varepsilon (A - E_0) = -\varepsilon_0 \left(\frac{B}{r_0^2} + E_0\right)$$

0

Las soluciones para A y B se obtienen rápidamente como

$$A = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0, \quad B = r_0^2 A \tag{4.136}$$

En el interior del cilindro el potencial total es

$$V + V_0 = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \rho \cos\phi \tag{4.137}$$

El campo todavía es uniforme pero menor en magnitud que el campo aplicado E_0 . Esta reducción en el campo interno es producida por campo de despolarización establecido por la carga de polarización dipolar equivalente en la superficie del cilindro. El campo interno total es

$$E_i = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \tag{4.138}$$

Fuera del cilindro, el campo inducido es E_{e} , donde

$$\mathbf{E}_{e} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{0}}{\varepsilon + \varepsilon_{0}} E_{0} \left(\frac{r_{0}}{\rho}\right)^{2} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\rho} \cos\phi + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \sin\phi\right)$$
(4.139)

Este campo es idéntico al producido por un dipolo lineal ubicado en el origen.

4.8 Soluciones Formales de la Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas, la expresión para la ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$
(4.140)

y puede resolverse suponiendo, igual que en el caso de coordenadas cartesianas rectangulares, una solución producto de la forma

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{4.141}$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en las secciones precedentes para los otros dos tipos de coordenadas estudiados, se obtienen soluciones a la Ec. (4.140). De estas soluciones, las más sencillas y de utilización más frecuente son:

1. *V* independiente de θ y ϕ :

$$V(r) = A_1 + \frac{A_2}{r}$$
(4.142)

donde A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones de frontera.

2. *V* independiente de *r* y ϕ :

$$V(\theta) = C_1 + C_2 \ln\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$$
(4.143)

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar.

3. *V* independiente de ϕ :

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{1n} r^n + A_{2n} r^{-(n+1)} \right) \left[C_{1n} P_n(\theta) + C_{2n} Q_n(\theta) \right]$$
(4.144)

donde las funciones P_n son los *polinomios de Legendre de la primera clase* ya mencionados en la sección 4.6 [de aquí en adelante se utilizará la notación más compacta $P_n(\theta)$ en lugar de $P_n(\cos\theta)$, esto es $P_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$]. Las funciones $Q_n(\theta)$ se conocen como las *funciones de Legendre de la segunda clase*:

$$Q_0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$
$$Q_1(\cos\theta) = \cos\theta\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} - 1$$

Observe que todas las funciones Q_n no están definidas para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por tanto, estos valores siempre se excluyen cuando la región bajo consideración los contiene y entonces la Ec. (4.144) se reemplaza por

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{1n} r^n + A_{2n} r^{-(n+1)} \right] P_n(\theta)$$
(4.145)

Ejemplo 6. Considere el caso de dos conchas esféricas concéntricas de radios R_1 y R_2 (donde $R_2 > R_1$). Las conchas interna y externa se mantienen respectivamente con potenciales V_1 y V_2 . Debido a la geometría esféricas se usan coordenadas esféricas con el origen en el centro de las conchas. Además, como las conchas son concéntricas, es lógico que se tome el potencial entre ellas como independiente de los ángulos θ y ϕ . Por tanto, el potencial es dado por la Ec. (4.142); es decir, $V(r) = A_1 + A_2/r$. La condición de frontera en $r = R_1$ da

José R. Morón

y en $r = R_2$ se obtiene

 $V_2 = A_1 + \frac{A_2}{R_2}$

 $V_1 = A_1 + \frac{A_2}{R_1}$

Estas dos ecuaciones pueden ahora resolverse simultáneamente para obtener A1 y A2 y, por tanto, para obtener el potencial y el campo:

$$V(r) = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right) \frac{R_1 R_2}{r} + \frac{R_2 V_2 - R_1 V_1}{R_2 - R_1}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial t_1} \hat{\mathbf{a}}_1 = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_1 - V_1}\right) \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_1} \hat{\mathbf{a}}_1$$

у

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{\mathbf{a}}_r = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right)\frac{R_1 R_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{a}}_r$$

Ejemplo 7. Considérese los conos coaxiales en la Fig. 4.13. Las condiciones de frontera son $V = V_1$ en $\theta = \theta_1$ y V = 0 en $\theta = \theta_2$, y los vértices de los conos están aislados en r = 0. Resolver la ecuación de Laplace en la región entre los conos.



Figura 4.13

Solución: El potencial es independiente de las coordenadas r y ϕ , de manera que, en este caso, la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

Integrando una vez, se obtiene

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{C_1}{\sin\theta}$$

e integrando una vez más, se obtiene el potencial como

$$V = C_1 \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + C_2$$

Aplicando las condiciones de frontera, se tiene que

$$V_1 = C_1 \ln \left| \tan \frac{\theta_1}{2} \right| + C_2$$
$$0 = C_1 \ln \left| \tan \frac{\theta_2}{2} \right| + C_2$$

de donde

No se necesitan las barras de valor absoluto para el argumento del logaritmo si se toman θ_1 y θ_2 menores que $\pi/2$.

Ejemplo 8. Supóngase que una cantidad Q de carga positiva está distribuida uniformemente en la superficie de una esfera conductora de radio r_1 . Se quiere determinar el potencial y la densidad del flujo eléctrico en todos los puntos del espacio libre que rodea a la esfera.

Solución. Debido a la simetría esférica, el laplaciano en coordenadas esféricas se simplifica a

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

y la ecuación diferencial a resolver se reduce a

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0\tag{4.146}$$

Las condiciones de frontera que se deben cumplir son:

- 1. La superficie conductora para $r = r_1$ es una superficie equipotencial.
- 2. El potencial *V* se anula cuando $r \rightarrow \infty$.

Una solución general de la Ec. (4.146) es

$$V = \frac{C_1}{r} + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración arbitrarias. La condición de frontera en el infinito requiere que C_2 sea igual a cero. Tomando $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ y $\rho_s = Q/(4\pi r_1^2)$ en la Ec. (4.30) y observando que $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección creciente de la coordenada radial, se encuentra que

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C_1}{r} \right) \right|_{r=r_1} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

de donde se obtiene que $C_1 = Q/(4\pi\varepsilon_0)$ y así

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r > r_1 \tag{4.147}$$

у

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$
(4.148)

Las superficies equipotenciales son superficies esféricas que comparten un centro común con la esfera conductora, mientras que las líneas de E y D son radiales.

Ejemplo 9. Esfera Metálica en un Campo Uniforme. Considérese una esfera metálica de radio *a* en un medio dieléctrico de permitividad ε . Inicialmente existe un campo uniforme E_0 en toda la región dieléctrica y se desea determinar la distorsión en el campo producida por la esfera.

Solución: La geometría del problema se muestra en la Fig. 4.14*a*. El centro de la esfera coincide con el origen de coordenadas y el campo primario, E_0 , generará un campo secundario el cual, al combinarse con E_0 , transformará

a la esfera metálica en una región de potencial constante. Sin perder ninguna generalidad, el potencial de la esfera siempre puede escogerse como cero y de esta forma las condiciones de frontera para este problema son:

$$V = 0 \text{ para } r = a$$

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}_0 \text{ , esto es, } V \to E_0 r \cos \theta \text{ para } r >> a$$
(4.149)



Figura 4.14. Esfera metálica suspendida en un campo uniforme. (*a*) Geometría; (*b*) Configuración del campo.

Debido a la simetría axial, $\partial/\partial \phi = 0$ y se aplica la Ec. (4.145):

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{1n} r^n + A_{2n} r^{-(n+1)} \right] P_n(\theta), \quad a \le r$$
(4.150)

Reteniendo tantos términos de la suma como sean necesarios para satisfacer las condiciones de frontera, se tiene que

$$V(r,\theta) = \left(A_{10} + \frac{A_{20}}{r}\right) + \left(A_{11}r + \frac{A_{21}}{r^2}\right)\cos\theta$$
(4.151)

De la segunda condición de frontera se obtiene $A_{10} = 0$ y $A_{11} = 0$, de modo que

$$V(r,\theta) = \frac{A_{20}}{r} + \left(E_0 r + \frac{A_{21}}{r^2}\right) \cos\theta$$

Ahora, de la primera condición de frontera se obtiene que $A_{20} = 0$ y $A_{21} = -E_0 a^3$ y, por tanto, el potencial es

$$V(r,\theta) = E_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] r \cos\theta$$
(4.152)

y la intensidad del campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -E_0 \left[1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] \cos \theta \ \hat{\mathbf{a}}_r + E_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] \sin \theta \ \hat{\mathbf{a}}_{\theta}$$
(4.153)

Para r muy grande,

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{E} = -E_0 \cos \theta \ \hat{\mathbf{a}}_r + E_0 \sin \theta \ \hat{\mathbf{a}}_{\theta} = -\mathbf{E}_0 \tag{4.154}$$

tal y como se requiere. Por otra parte, cuando r = a,

$$\mathbf{E} = -3E_0 \cos\theta \,\hat{\mathbf{a}}_r \tag{4.155}$$

la cual muestra que el vector intensidad del campo eléctrico es normal a la superficie de la esfera. El máximo esfuerzo ocurre en las partes superior e inferior de la esfera donde $|\mathbf{E}| = 3E_0$. Una gráfica del campo se muestra en la Fig. 4.14*b*. Observe que, aun cuando la esfera es neutra (eléctricamente), en todos los puntos de la superficie exterior existe una distribución de carga superficial

$$\rho_s = -3\varepsilon E_0 \cos\theta \tag{4.156}$$

Ejemplo 10. Frontera de Potencial Dependiente del Ángulo

Se tienen dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El potencial en la superficie de la esfera más pequeña es cero. En la superficie de la esfera mayor el potencial es dado por

$$V(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta \tag{4.157}$$

donde V_0 es una constante.

Esta dependencia angular del potencial en la frontera introduce dependencia angular en el potencial entre las esferas, cuya forma explícita puede hallarse resolviendo la ecuación de Laplace en esta región. Entonces, entre las esfera, *V* es dado por la expansión siguiente [véase la Ec. (4.145):

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + A_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos\theta)$$

Observe que la región de interés no incluye r = 0 o $r = \infty$. La condición de frontera $V(R_1, \theta) = 0$ da

$$A_n + B_n R_1^{-(2n+1)} = 0$$
 para toda *n* (4.158)

y la condición de frontera $V(R_{12}, \theta) = V_0 \cos \theta$ da

$$A_1 + \frac{B_1}{R_2^3} = \frac{V_0}{R_2}, \qquad A_n + B_n R_2^{-(2n+1)} = 0 \text{ para } n \neq 1$$
 (4.159)

Las Ecs. (4.158) y (4.159) se resuelven simultáneamente y se obtiene

$$A_n = B_n = 0$$
 para $n \neq 1$

У

$$A_1 = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \qquad B_1 = -\frac{V_0 R_2^3 R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}$$
(4.160)

Por tanto,

$$V(r, \theta) = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right) \cos\theta$$
(4.161)

Este método es útil cuando se desea determinar el campo producido por cargas puntuales o líneas de carga en la cercanía de conductores con ciertas formas simples. Como una explicación sencilla del método, tómese el caso de dos cargas puntuales iguales, una positiva y otra negativa, situadas en un dieléctrico homogéneo de permitividad ε . Las superficies equipotenciales forman una familia de esferas cuyos centros están en la línea que une las cargas. Sea *S* la superficie situada en cualquiera de los equipotenciales con respecto a -q. Fig. 4.15. Si se remueve la carga -q, el campo en la región ocupada por la carga +q no sufre ninguna modificación si se distribuye en *S* una carga superficial ρ_s , siempre que esta carga produzca un potencial en la superficie *S* igual al equipotencial que existía al no estar la superficie. En forma inversa si la carga +q se coloca en la forma mostrada con respecto a una esfera conductora en ésta se induce una carga superficial ρ_s convirtiéndola en un equipotencial. La contribución de esta carga inducida al campo en el exterior del conductor *S* se determina ahora más sencillamente reemplazando la distribución superficial por la carga puntual equivalente -q. A la carga -q se le conoce como la imagen de +q con respecto a la esfera dada.



Figura 4.15

Ejemplo 11. Carga Puntual Sobre un Plano Conductor. El ejemplo más sencillo del uso de este método consiste en determinar el campo producido por una carga puntual situada cerca de un plano conductor que está a tierra (Fig. 4.16).



Figura 4.16

Las condiciones de frontera requieren que el potencial en el plano conductor sea cero. Esto se cumple si en lugar del plano conductor se coloca en x = -d una carga igual y de signo contrario, como se indica en la figura. El potencial en cualquier punto *P* a la derecha del plano conductor está dado entonces por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right)$$

= $\frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[(x'-d)^2 + {y'}^2 + {z'}^2 \right]^{-1/2} - \left[(x'+d)^2 + {y'}^2 + {z'}^2 \right]^{-1/2} \right\}$ (4.162)

Esta expresión se reduce a cero a lo largo del plano x = 0, o sea que la Ec. (4.162) da el potencial para cualquier punto a la derecha del plano. Debe quedar claro que la Ec. (4.162) *no es aplicable* para x < 0, puesto que dentro del conductor el potencial debe ser cero en todas partes.

Ejemplo 12. Se coloca una carga $q = 2 \mu C$ a una distancia a = 10 cm de una lámina infinita conductora conectada a tierra. Determinar

- (a) la carga total inducida en la lámina,
- (b) la fuerza sobre la carga *q*,
- (c) el trabajo total requerido para llevar la carga lentamente hasta una distancia infinita del plano.

Solución:

- (a) El método de imágenes requiere que se coloque una carga imagen -q simétricamente con respecto a la lámina. Esto significa que la carga total inducida en la superficie del conductor es -q.
- (b) La fuerza que actúa sobre +q es

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{0.2^2} = 0.9 \text{ N}$$

(c) El trabajo total requerido para llevar la carga hasta infinito es

$$W = \int_{a}^{\infty} F dr = \int_{a}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{q^{2}}{(2r)^{2}} dr = \frac{q^{2}}{16\pi\epsilon_{0}a} = 0.09 \text{ J}$$

Ejemplo 13. Esfera Conductora y Carga Puntual. Considérese una carga puntual *q* situada en un punto P_1 a una distancia R_1 del centro de una esfera conductora de radio *a* (Fig. 4.17). Se desea calcular el campo externo a la esfera.



Figura 4.17

Considere una carga $-q_2$ situada en P_2 a una distancia R_2 del centro de la esfera y a lo largo de la línea OP_1 , como se muestra en la Fig. 4.17. Puesto que la esfera es conductora, es necesario que la combinación de las cargas q_1 y $-q_2$ conviertan a la superficie esférica en una superficie equipotencial (en este caso, cero potencial ya que la esfera está a tierra). Si se toma cualquier punto P en la superficie esférica, entonces se tiene que

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_2} = 0$$
(4.163)

Esto siempre se cumplirá si se toma

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \tag{4.164}$$

siempre que se pueda encontrar un valor R_2 tal que r_1/r_2 sea una constante, independiente de la posición P. Puesto que cualquier punto arbitrario P y la línea OP_1 determinan un plano, se puede considerar que los puntos en la Fig. 4.17 están situados en ese plano. Si se escoge $OP_2 = R_2$ de modo que

$$\frac{OP_2}{a} = \frac{a}{OP_1} \tag{4.165}$$

entonces el triángulo OP2P y el triángulo OP1P son semejantes y en consecuencia

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{OP_2}$$
(4.166)

será una constante, tal como se requiere. Para resumir, el campo debido a una carga *q* situada a una distancia R_1 del centro de una esfera conductora a tierra, se determina a partir de la carga q_1 y de una carga imagen $-q_2$ cuya magnitud es

$$q_2 = \frac{R_2}{a} q_1 = \frac{a}{R_1} q_1 \tag{4.167}$$

y ubicada en la línea que une el centro de la esfera y q_1 y a una distancia del centro dada por

$$R_2 = \frac{a^2}{R_1} \tag{4.168}$$

Si la esfera no estuviese a tierra, entonces para mantener la neutralidad eléctrica se debe colocar una carga adicional $+q_2$ dentro de la esfera (para la esfera a tierra, $+q_2$ estaría colocada efectivamente en el infinito). La posición de $+q_2$ debe ser tal que no afecte la superficie de la esfera como un equipotencial. Esto se obtiene colocándola en el centro. Entonces, el potencial de la combinación en cualquier punto externo es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_2}{r_0} \right)$$
(4.169)

y la geometría es como se muestra en la Fig. 4.18. En realidad, la carga $+q_2$ en el centro es sólo una carga imagen que produce el mismo efecto externo que la distribución de carga uniforme $\rho_S = q_2/4\pi a^2$ en la superficie externa de la esfera. La carga superficial total en la esfera es cero ya que es igual a la suma de la distribución uniforme $q_2/4\pi a^2$ y una distribución no uniforme de cantidad total $-q_2$ que establece el mismo campo externo que la carga imagen $-q_2$.



Figura 4.18

Ejemplo 14. Líneas de Carga Paralelas y de Longitud Infinita. El sistema de *líneas de carga paralelas* de la Fig. 4.19(*a*) es un sistema importante que permite determinar los campos electrostáticos de conductores paralelos de sección transversal circular. Supóngase dos líneas de carga paralelas de longitud infinita separadas una distancia 2*d* y con densidades lineales ρ_{ℓ} y $-\rho_{\ell}$. Debido a la extensión infinita del sistema, el análisis se confina al plano z = 0, lo que lo restringe a dos dimensiones (*x*, *y*), como en la vista transversal de la Fig. 4.19*b*.



Figura 4.19

Las superficies equipotenciales de este sistema de líneas de carga paralelas son cilindros circulares rectos. Para demostrar este hecho, observe que el potencial V(x, y) en el punto P(x, y) de la Fig. 4.18*b* se encuentra a partir de la superposición de los potenciales V^+ y V^- producidos por cada línea; cada una de ellas produce un potencial dado por

$$V(r) = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

donde r_0 corresponde al potencial de referencia y r es el punto del campo. Entonces, escogiendo al origen O como la referencia para el potencial, los potenciales en P debidos a ρ_ℓ y $-\rho_\ell$ quedan como

$$V^{+} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{R_{1}}, \qquad V^{-} = -\frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{R_{2}}$$
(4.170)

Su suma proporciona el potencial en *P*,

$$V(x,y) = V^{+} + V^{-} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$
(4.171)

En la Ec. (4.171), obsérvese que *V* asume como valores todos los números reales ya que conforme *P* se aproxima a $-\rho_{\ell}$ ($R_2 \rightarrow 0$), $V \rightarrow -\infty$ allí; en tanto que $V \rightarrow \infty$ en la línea de carga positiva.

Las superficies equipotenciales se obtienen igualando la Ec. (4.171) a cualquier potencial constante deseado $V = V_0$:

$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \frac{R_2}{R_1} = V_0 \tag{4.172}$$

Esto quiere decir que cualquier relación real fija

$$\frac{R_2}{R_1} = K$$
 (4.173)

define una superficie equipotencial en la que prevalece $V = V_0$. Por tanto, $K = R_2/R_1 = 1$ define el plano x = 0que biseca el sistema. En general, otras superficies equipotenciales dadas por otros valores de *K* son *círculos* en la vista transversal de la Fig. 4.19*b*; si se incluye el eje *z*, se transforman en *superficies cilíndricas circulares*, lo que se demuestra sustituyendo la Ec. (4.171) en la Ec. (4.173) como sigue:

$$\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = K^2$$

que se convierte en

$$x^{2} - 2d\frac{K^{2} + 1}{K^{2} - 1}x + d^{2} + y^{2} = 0$$
(4.174)

Esto se reduce a la ecuación de un círculo, $(x-h)^2 + y^2 = R^2$, si a cada lado de (4.174) se agrega $d^2 \left[\left(K^2 + 1 \right) / \left(K^2 - 1 \right) \right]^2$ para completar el cuadrado y así obtener

$$\left(x - d\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2Kd}{K^2 - 1}\right)^2$$
(4.175)

Este resultado demuestra que las superficies equipotenciales típicas son una familia de cilindros circulares con centros desplazados desde el origen en

$$h = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \tag{4.176}$$

y cuyos radios son dados por

$$R = \frac{2Kd}{K^2 - 1} \tag{4.177}$$

En la Fig. 4.20 se ilustran algunos cilindros equipotenciales típicos definidos por (4.175). Los valores de K menores que 1 corresponden a cilindros equipotenciales a la izquierda del origen, en tanto que K > 1 da los cilindros de la derecha.



Figura 4.20

Tomando la diferencia de los cuadrados de (4.176) y (4.177) se elimina a *K* para obtener $h^2 - R^2 = d^2$, de donde

$$d = \sqrt{h^2 - R^2}$$
(4.178)

lo que da las ubicaciones $\pm d$ de las cargas en la Fig. 4.19 en función de *R* y *h*.

Reemplazando ahora la parte interna (o externa) de cualquier par de cilindros equipotenciales de la Fig. 4.20 con *conductores* (que lleven las cargas -q y q por longitud ℓ), se puede considerar que se han resuelto los problemas correspondientes a (1) un conductor paralelo a un plano conductor, (2) un par de conductores paralelos de radios iguales o no, y (3) un par de conductores coaxiales. Tómese por ejemplo el caso de un par de dos conductores paralelos de radio a, cuya separación entre sus ejes es b y de separación d entre las posiciones de una línea y su imagen (véase la Fig. 4.21).



Figura 4.21

Se puede concebir un ajuste de la distancia *d* de manera que la separación entre un par correspondiente de superficies equipotenciales sea igual a *b*. Esta condición requiere que

$$b = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \tag{4.179}$$

Al mismo tiempo, mediante un ajuste apropiado de ρ_{ℓ} también se puede precisar *K* de modo que las superficies conductoras y el mismo par de superficies cilíndricas equipotenciales coincidan exactamente. Esta segunda condición requiere que

$$a = \frac{Kd}{K^2 - 1}$$
(4.180)

De las Ecs. (4.179) y (4.180) se obtiene el valor de *K*:

$$K = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}$$

Regresando al problema que nos ocupa, es decir, la búsqueda de la línea de carga imagen adecuada, esta línea, pero con signo opuesto, se debe colocar a una distancia *d* que satisfaga las Ecs. (4.179) y (4.180) simultáneamente, vale decir,

$$d = b \left\{ 1 - \frac{4a^2}{b \left[b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2} \right]} \right\}$$

Sin embargo, sólo interesa el signo positivo ya que el signo negativo podría hacer a d negativa; por tanto,

$$d = b \left[1 - \frac{4a^2}{b \left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2} \right)} \right]$$
(4.181)

Comparando con la Fig. 4.18 es evidente que

$$\frac{b+d}{2} = s \tag{4.182}$$

donde *s* es la distancia desde la línea de carga hasta el eje del cilindro conductor. Por consiguiente, con *s* conocida, *b* y *d* pueden determinarse a partir de las Ecs. (4.181) y (4.182). Esto da suficiente información para colocar la carga imagen en el lugar apropiado.

El potencial en el espacio externo al conductor viene dado entonces por

$$V = -\frac{\rho_{\ell}}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}$$
(4.183)

El potencial constante del conductor puede evaluarse permitiéndole al punto *P* acercarse a la superficie del conductor, Fig. 4.20. En ese punto

$$R_{1} = \frac{b+d}{2} - a$$

$$R_{2} = -\frac{b-d}{2} + a$$
(4.184)

Puesto que b y d se conocen en términos de s, el potencial constante en la superficie del conductor puede determinarse sustituyendo las Ecs. (3-179) en la Ec. (3-178).

Ejemplo 15. Imágenes Múltiples. Para una carga en las cercanías de la intersección de dos planos conductores, como q en la región AOB de la Fig. 4.22, podría considerarse el utilizar sólo una imagen en cada plano, tal y como 1 y 2 en la figura. Aunque +q entre los dos planos y –q en 1 darían por sí solas un potencial constante en *OA* como se requiere, y +q entre los planos y –q en 2 también darían un potencial constante en *OB*, las tres cargas juntas no darían un potencial constante ni en *OA* ni en *OB*. Es necesario colocar imágenes de estas imágenes, repitiéndolas hasta que las imágenes adicionales coincidan o hasta que todas las imágenes adicionales estén demasiado lejos de la región como para afectar el potencial. Es posible satisfacer las condiciones requeridas con un número finito de imágenes si el ángulo *AOB* es un submúltiplo exacto de 180°, como en el caso para un ángulo de 45° ilustrado en la Fig. 4-22.



Figura 4.22

PROBLEMAS

4.1 Sea $F(x, y, z) = \lambda$ la representación de una familia de superficies tales que *F* posee derivadas parciales continuas del primer y segundo órdenes. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que estas superficies sean equipotenciales es

$$\frac{\nabla^2 F}{(\nabla F)^2} = f(\lambda)$$

donde $f(\lambda)$ es una función de λ solamente. Demuestre que si se cumple esta condición el potencial es dado por

$$V = c_1 \int e^{-\int f(\lambda) d\lambda} d\lambda + c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

4.2 Una carga está distribuida en una línea recta infinita con una densidad constante de ρ_{ℓ} culombios/metro. Demuestre que la intensidad del campo en cualquier cuya distancia a la línea es *r* es

$$E_r = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon r}$$

y que este campo es el negativo del gradiente de una función potencial

$$V(x,y) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es una constante arbitraria que representa el radio de un cilindro en el cual V = 0.

A partir de estos resultados demuestre que si la carga se distribuye en un espacio bidimensional con una densidad $\rho_s(x, y)$, el potencial en cualquier punto del plano *xy* es

$$V(x',y') = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{S} \rho_s \ln \frac{r_0}{r} ds$$

donde $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$ y demuestre también que V(x,y) satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_s(x, y)$$

- **4.3** Dos planos infinitos son paralelos. Uno está cargado uniformemente con una densidad de carga superficial $+\rho_s$ y el otro con una densidad de carga $-\rho_s$. Demuestre que la intensidad del campo entre los dos planos tiene un valor ρ_s/ϵ_0 y que es igual a cero fuera de los dos planos.
- **4.4** Refiérase a la Fig. 4.7 y suponga que el potencial a lo largo de la pared conductora en x = a es $V_0 \sin \pi y/b$ en vez de cero, y es cero en las otras paredes. Determine la nueva distribución del potencial en el interior de la cavidad rectangular.
- **4.5** Igual que el Problema 4.4, pero el potencial en la pared x = a es una constante igual a V_0 .
- **4.6** La frontera de un paralelepípedo como el ilustrado en la Fig. 4.23 se mantiene a cero potencial. El interior está ocupado por una densidad de carga dada por

$$\rho_v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{c}\right) y\left(y-b\right)$$

Halle una solución para la distribución de potencial *V* en el interior.

Sugerencia: Como no se requiere que *V* satisfaga la ecuación de Laplace (satisface la ecuación de Poisson puesto que $\rho_v \neq 0$), suponga que *V* puede representarse mediante una serie de Fourier en tres dimensiones:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{nms} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x\pi z}{c}\right)$$

Expanda ρ_v en una serie de Fourier tridimensional semejante Sustituya estas expansiones en la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\rho_v / \varepsilon_0$ y use las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno para relacionar los coeficientes *A*_{nms} con los coeficientes correspondientes en la expansión de ρ_v .





4.7 Considere dos placas metálicas grandes que forman un capacitor en forma de cuña, como muestra la Fig. 4.24. La placa en $\phi = 0$ se mantiene a cero voltios en tanto que la placa en $\phi = \beta$ se mantiene a *V* voltios. Desprecie los efectos de distorsión en los bordes. (a) Escriba la ecuación diferencial que satisface el potencial en el interior del capacitor y determine el potencial. (b) Determine la densidad de carga y la carga total que reside en las placas.



Figura 4.24

4.8 Un cascarón esférico cargado uniformemente tiene un radio *a*. Otro cascarón, concéntrico con el anterior, tiene una carga igual y de signo opuesto y un radio b > a. Determine el campo eléctrico a una distancia *r* del centro común, donde *r* está entre *a* y *b*. ¿Cómo se compara este campo con el que existiría si la esfera externa no estuviese presente?





- **4.10** Considere un cable coaxial de longitud infinita. El radio del conductor central es *a* metros, y el radio interno del conductor externo es *b* metros. Si el aislamiento entre los conductores tiene una resistencia a la ruptura de KV/m, determine la mínima diferencia de potencial entre los conductores que causa la ruptura. La respuesta debe estar dada en términos de *a*, *b* y *K*.
- **4.11** Un cilindro conductor largo de radio *a* se sitúa en un campo eléctrico, el cual, lejos del cilindro, está dado por $V = -E_0 r \cos \phi$, donde *r* y ϕ son las coordenadas cilíndricas usuales y E_0 es una constante. El eje *z* se orienta para que coincida con el eje del cilindro.
 - (a) Determine la distribución del campo en la región exterior al cilindro, suponiendo que el potencial del cilindro es cero.
 - (b) Determine la magnitud y la dirección del campo electrostático en puntos alejados del cilindro (*r* >>*a*).
- **4.12** ¿Para qué valores de *A* y *B* es la siguiente función una función potencial válida en una región libre de cargas?

$$V = \frac{A\cos^2 \theta - B}{r^3}$$

- **4.13** Un cascarón esférico aislante de radio *R* tiene una distribución de carga superficial dada por $\rho_s = \rho_{s0} (\cos \theta 1)^2$. Determine el potencial producido por la esfera en todas partes.
- **4.14** El potencial electrostático en una cierta región viene dado por

$$V = \frac{ke^{-ar}}{r}$$

donde *k* y *a* son constantes. ¿Cómo está distribuida la carga en esta región? Verifique su respuesta con la ley de Gauss. ¿Qué interpretación física se le puede dar a la constante *k*?

4.15 En una región dieléctrica de permitividad ε existe una distribución de potencial $V = E_0 r \sec \phi$. En el material dieléctrico se perfora una cavidad cilíndrica en toda su extensión y en la dirección del eje *z* (véase la Fig. 4.26). Determine el potencial resultante en la cavidad.


4.16 Considérese un cilindro de semi-longitud infinita y radio *a*. La pared lateral del cilindro se mantiene a potencial cero, en tanto que la cara en el extremo z = 0 se mantiene a un potencial constante V_0 , como indica la Fig. 4.27. Halle una solución para el potencial *V* en el interior del cilindro.



Figura 4.27

4.17 Se tiene una esfera de permitividad ε_2 que está colocada en un medio de permitividad ε_1 (Fig. 4.14a). Demuestre que en este caso el potencial fuera y dentro de la esfera viene dado respectivamente por

$$V_1 = E_0 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] r \cos \theta$$

у

$$V_2 = E_0 \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} r \cos \theta$$

- **4.18** Un capacitor esférico está formado por dos cascarones esféricos conductores y de muy poco espesor y de radios *a* y *b* (*b* > *a*), separados por un dieléctrico de permitividad ε . La esfera exterior está a tierra y el potencial de la esfera interior se mantiene a un potencial fijo *V*. Aplicando la ecuación de Laplace, deduzca las expresiones para el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones definidas por (i) $0 \le r < a$, (ii) a < r < b, y (iii) $b \le r$.
- **4.19** Una esfera conductora hueca de radio *a* tiene una pequeña brecha alrededor del plano ecuatorial que separa los dos hemisferios. El hemisferio superior se mantiene a un potencial constante V_0 , en tanto que el inferior se mantiene a un potencial cero. Obtenga la solución para la distribución del potencial en el interior de la esfera.
- **4.20** Un alambre muy delgado posee una carga de ρ_{ℓ} culombios/metro y está situado paralelo a un plano conductor. La distancia del alambre al conductor es *h*. Obtenga una expresión para el potencial en cualquier punto *P*.
- **4.21** Dada una esfera dieléctrica hueca de permitividad relativa ε_r y radios interno y externo *a* y *b* respectivamente, situada en un campo eléctrico externo uniforme E₀, demuestre que la intensidad del campo eléctrico en la cavidad esférica viene dada por

$$\mathbf{E} = 9\mathbf{E}_0 \frac{\mathbf{\varepsilon}_r}{(2\mathbf{\varepsilon}_r + 1)(\mathbf{\varepsilon}_r + 2) - 2(\mathbf{\varepsilon}_r - 1)^2 (a/b)^3}$$



Figura 4.27

4.23 Dos planos conductores semi-infinitos y conectados a tierra forman un ángulo de 60°. Se coloca una carga única +*Q* como muestra la Fig. 4.28. En un dibujo indique claramente la posición y el tamaño de todas las cargas imágenes. Explique su razonamiento, Determine también el campo eléctrico entre los planos.



Figura 4.28

4.24 Determine la energía almacenada en un sistema conformado por una carga puntual situada a una distancia *d* de un plano conductor infinito.

José R. Morón

Capítulo 5

Magnetostática

5.1 Introducción

Un campo magnético, variable en el tiempo o no, tiene una magnitud única y una dirección única, y ambas pueden variar en el espacio. Las cargas estacionarias producen campos eléctricos estáticos. Se conocen dos fuentes aparentemente distintas capaces de originar un campo magnético estático: una corriente estacionaria (constante) o un imán permanente. Un tratamiento directo del campo producido por imanes permanentes involucra la introducción del concepto de un polo magnético puntual y la identificación de dos tipos de polos; las interacciones entre estos dos polos pueden expresarse mediante una ley semejante a la ley de Coulomb. Cuando se estudia de esta manera, el campo de inducción magnético tiene una descripción muy semejante a la del campo eléctrico producido por cargas fijas. El enfoque utilizado para campos electrostáticos tiene por lo menos tres desventajas al aplicarlo en magnetostática. En primer lugar está la dificultad experimental para aislar polos magnéticos individuales. Experimentalmente, un imán dividido en dos produce dos imanes, cada uno con su polo positivo en un extremo y su polo negativo en el otro. En segundo lugar, el formalismo de los polos es sencillo sólo para determinar el campo en la región fuera del imán permanente. Finalmente, ese formalismo de polos no puede extenderse fácilmente para incluir los campos de inducción magnética producidos por corrientes eléctricas.

La experimentación y la evidencia teórica indican que no existe una diferencia fundamental entre los campos producidos por los dos tipos de fuentes y que, de hecho, el mecanismo definitivo para la producción de los campos magnéticos es el mismo para esas fuentes. Este capítulo tratará de corrientes constantes.

Dos leyes importantes rigen los campos magnetostáticos: (1) la ley de Biot-Savart, y (2) la ley circuital de Ampere. Como la ley de Coulomb, la ley de Biot-Savart es la ley general de la magnetostática, y la ley de Ampere es un caso especial de la ley de Biot-Savart y se aplica fácilmente a problemas en los que la corriente tiene una distribución simétrica.

5.2 Ley de Biot-Savart

En el caso del campo eléctrico, la distribución fundamental de carga es la carga puntual, definida como una carga que es diferente de cero en un punto del espacio. Este concepto se extiende al valor de la corriente en un punto cuando el punto en cuestión es parte de un circuito eléctrico y de alambres filiformes (alambre de sección transversal infinitesimal). La corriente eléctrica posee dirección, y esta dirección la determina la dirección del alambre. El elemento de corriente en cada uno de los puntos de la trayectoria se define como una cantidad vectorial en la forma Idl. La magnitud de dl representa el diferencial de longitud medida a lo largo de la trayectoria filiforme de la corriente.

La ley de Biot–Savart, basada en los resultados de Oersted es un *postulado fundamental*. Ella establece que la intensidad del campo magnético diferencial *dH* producido en un punto *P* por un elemento diferencial de corriente *Idl*, es proporcional al producto de *Idl* por el seno del ángulo α , formado entre el elemento y la línea que une a *P* con el elemento y, como la ley de Coulomb, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia *R* en *P* y el elemento, como muestra la Fig. 5.1; es decir, tiene la forma

$$dH = \frac{kI\,dl\,\mathrm{sen}\,\alpha}{R^2} \tag{5.1}$$

donde *k* es la constante de proporcionalidad. En unidades SI, $k = 4\pi$, y la Ec. (5.1) se escribe como

$$dH = \frac{I\,dl\,\mathrm{sen}\,\alpha}{4\pi R^2} \tag{5.2}$$

De la definición del producto vectorial y la Ec. (5.2), se tiene que el vector de la *intensidad de campo magnético* diferencial, *d***H**, es producido por un elemento de corriente diferencial *Id***I**, y tiene una dirección dada por el producto cruz de *Id***I** y $\hat{\mathbf{a}}_{R}$. Esta es la relación conocida como la *ley de Biot–Savart*:

$$d\mathbf{H} = \frac{I \, d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_R}{4\pi R^2} \quad (A/m) \tag{5.3}$$

La fórmula muestra que la intensidad del campo magnético **H** producida por un corto segmento de alambre *d*I está relacionado directamente con la corriente estacionaria *I*. En términos técnicos, *d*I puede considerarse como vector de longitud diferencial del elemento de corriente. Su dirección es la misma que la dirección de la corriente. La dirección de **R** debe ser desde el elemento de corriente hasta el punto de observación en el espacio alrededor del conductor en el cual se va a determinar *d***H**, $R = |\mathbf{R}|$ es la distancia entre el elemento de corriente y el punto del campo y $\hat{\mathbf{a}}_R = \mathbf{R}/R$, como se ilustra en la Fig. 5.1. La dirección de la corriente y los dedos alrededor de *d***H**. Según esta ecuación, *d***H** varía como $1/R^2$, lo que la asemeja a la dependencia con la distancia del campo eléctrico producido por una carga eléctrica. Sin embargo, a diferencia del campo eléctrico **E**, cuya dirección es a lo largo del vector **R** que une la carga con el punto de observación, el campo magnético **H** es *ortogonal* al plano que contiene la dirección del elemento de corriente *d*I y el vector distancia **R**.

Los elementos de corriente no tienen una existencia separada independiente. Todos los elementos que conforman el filamento de corriente contribuyen a **H** y por tanto deben ser incluidos. De este modo, la sumatoria de todas las contribuciones conduce a la forma integral de la ley de Biot–Savart:



Se requiere una integral de línea *cerrada* para asegurar que *todos* los elementos de corriente sean incluidos (el contorno puede cerrarse en ∞). *L* es la trayectoria lineal a lo largo de la cual existe *I* (el contorno puede cerrarse en ∞).

En la misma forma en que se tenían diferentes configuraciones de cargas eléctricas, se pueden tener diferentes distribuciones de corrientes: corrientes lineales, de superficie y de volumen. Si se define K como la densidad de corriente de superficie (A/m) y J como la densidad de corriente de volumen (A/m²), los elementos de fuentes están relacionados como

$$I d\mathbf{l} \triangleq \mathbf{K} dS \triangleq \mathbf{J} dv \tag{5.5}$$

De manera que en términos de estas fuentes, la ley de Biot-Savart se puede expresar como

$$\mathbf{H} = \int_{L} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_{R}}{4\pi R^{2}} \qquad \text{(corriente lineal)} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{H} = \int_{S} \frac{\mathbf{K} dS \times \hat{\mathbf{a}}_{R}}{4\pi R^{2}} \quad \text{(corriente superficial)}$$
(5.7)

$$\mathbf{H} = \int_{v} \frac{\mathbf{J} dv \times \hat{\mathbf{a}}_{R}}{4\pi R^{2}} \qquad \text{(corriente de volumen)}$$
(5.8)

Ejemplo 1. En la Fig. 5.2 se muestra un filamento de corriente *I*, recto y de longitud infinita a lo largo del eje *z*. Se quiere determinar la intensidad del campo magnético H en un punto localizado a una distancia ρ en el plano xy en el espacio libre.



Figura 5.2

Solución: Se selecciona un punto en el plano z = 0 sin pérdida de generalidad. En forma diferencial, la Ec. (5.6) es

$$d\mathbf{H} = \frac{I dz \,\hat{\mathbf{a}}_z \times \left(\rho \hat{\mathbf{a}}_{\rho} - z \mathbf{a}_z\right)}{4\pi \left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$
$$= \frac{I dz \rho \hat{\mathbf{a}}_{\phi}}{4\pi \left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

La variable de integración es *z*. Puesto que \hat{a}_{ϕ} no cambia con *z*, se puede sacar de la integral antes de integrar y entonces

$$\mathbf{H} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\rho \, dz}{4\pi \left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$
$$= \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$
(5.9)

Este importante resultado muestra que **H** es inversamente proporcional a la distancia radial. Se ve que la dirección coincide con la "regla de mano derecha" en la cual los dedos de la mano derecha apuntan en la dirección del campo cuando el conductor se sostiene de forma que el pulgar derecho apunte en la dirección de la corriente.

Ejemplo 2. Un anillo (espira) circular de radio *a* colocado en el plano *xy* conduce una corriente *I* en la dirección \hat{a}_{ϕ} . Determinar **H** en el punto (0, 0, *h*) (véase la Fig. 5.3).



Figura 5.3

Solución: La intensidad del campo magnético **H** en el punto (0, 0, *h*) producida por el elemento de corriente *Id***l** lo da la ley de Biot-Savart, Ec. (5.3),

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_R}{4\pi R^2}$$

donde $d\mathbf{I} = a d\phi \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \mathbf{y}$

Entonces

$$d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{a}}_{R} = \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R} = \frac{1}{R} \left(ah \, d\phi \, \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + a^{2} \, d\phi \, \hat{\mathbf{a}}_{z} \right)$$

 $\hat{\mathbf{a}}_{R} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\langle 0, 0, h \rangle - \langle x, y, 0 \rangle}{\sqrt{x^{2} + y^{2} + h^{2}}} = \frac{-a\hat{\mathbf{a}}_{p} + h\hat{\mathbf{a}}_{z}}{\sqrt{a^{2} + h^{2}}}$

y, por tanto,

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi (a^2 + h^2)^{3/2}} \left(ah \, d\phi \, \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + a^2 \, d\phi \, \hat{\mathbf{a}}_z \right)$$
$$= dH_{\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + dH_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

Por consideraciones de simetría, se observa que las contribuciones en la dirección de \hat{a}_{ρ} se cancelan entre sí (las componentes radiales de los elementos diametralmente opuestos se cancelan). En consecuencia,

$$\mathbf{H} = \int dH_z \hat{\mathbf{a}}_z = \int_0^{2\pi} \frac{Ia^2 d\phi}{4\pi (a^2 + h^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z$$
$$= \frac{Ia^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z$$
(5.10)

5.3 Ley de Ampere

Se necesita obtener una ecuación para **B** que relacione **H** con la corriente que exista en el punto en el espacio donde se está evaluando **H**. La **ley circuital de Ampere** es la segunda ley básica en la magnetostática; ella establece que *la integral de línea de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético* **H** *en torno a una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada I*_{enc} *por la trayectoria*:

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$$
(5.11)

215

A primera vista se podría pensar que la ley se usa para determinar la corriente *I* mediante una integración. Más bien, lo que se conoce usualmente es la corriente y la ley proporciona un método para hallar H. La ley de Ampere es similar a la ley de Gauss y se aplica fácilmente para determinar H cuando la distribución de corriente es simétrica. El término I_{enc} en el lado derecho de la Ec. (5.11) toma en cuenta los sentidos de todas las corrientes encerradas por la trayectoria *C*, de manera que si una misma corriente atraviesa la superficie dos veces y en sentidos opuestos, esa corriente no contribuye a la circulación de H. Aplicando el teorema de Stokes al lado izquierdo de la ecuación anterior, se obtiene

$$I_{\rm enc} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

La trayectoria *C* en la Ec. (5.11) es *arbitraria* y la regla de la mano derecha relaciona la dirección en la cual se recorre con la dirección asignada a *S*. En la ecuación anterior se tiene también que

$$I_{\rm enc} = \int_{S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

y una comparación de las integrales de superficie revela claramente que

$$7 \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{5.12}$$

Ésta es la tercera ecuación de Maxwell; es esencialmente la ley de Ampere en forma diferencial. Se debe observar en esta ecuación que $\nabla \times \mathbf{H} \neq \mathbf{0}$; es decir, un campo *magnetostático es no conservativo*. Si se toma la divergencia de ambos lados de la Ec. (5.12), el lado izquierdo es cero ya que la divergencia del rotacional de un vector es siempre cero. Esto requiere que los sistemas de campos magnéticos tengan corrientes libres de divergencia de manera que la carga no se pueda acumular. *Las corrientes siempre deben fluir en lazos cerrados*.

La ley de Biot-Savart se puede derivar a partir de la ley circuital de Ampere, así que, en cierta forma, la primera no es realmente un principio separado. Sin embargo, aunque la ley de Ampere es un enunciado general de la conducta de corrientes estacionarias, su aplicación presenta algunas desventajas.

Para utilizar la ley de Ampere en forma efectiva, el campo debe ser suficientemente simple y se debe tener un grado considerable de simetría en el problema. Se deben cumplir dos condiciones

- 1. En todo punto de la trayectoria cerrada, H debe ser ya sea tangencial o normal a la trayectoria.
- 2. *H* debe tener el mismo valor en todos los puntos de la trayectoria donde H es tangencial.

La ley de Biot–Savart puede usarse como ayuda en la selección de una trayectoria que cumpla con las condiciones anteriores. En la mayoría de los casos en que sea aplicable, será evidente una trayectoria apropiada.

Ejemplo 3. Se determinará el campo magnético debido a una corriente *I* en un conductor cilíndrico recto de longitud infinita de sección transversal circular con un radio *b* (Fig. 5.4). La densidad de corriente $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{a}}_z (I/\pi b^2)$ es uniforme.

Debido a la simetría, **H** es constante a lo largo de la trayectoria circular mostrada en la figura y **H** es tangente a esa trayectoria. Entonces, si la trayectoria está fuera del conductor, la ley de Ampere da



Figura 5.4

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2\pi \rho = I, \quad \rho \ge b$$

Si la trayectoria está en el interior del conductor, sólo parte de la corriente *I* es encerrada por la trayectoria. En consecuencia,

$$H 2\pi\rho = I \frac{\pi\rho^2}{\pi b^2}, \quad \rho \le b$$

La intensidad del campo magnético es dada por

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \frac{b^2}{2\rho} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{a}}_{\rho}, & \rho \ge b \\ \frac{J\rho}{2} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \frac{\rho}{2} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{a}}_{\rho}, & \rho \le b \end{cases}$$
(5.13)

Ejemplo 4. Una lámina infinita de corriente está en el plano z = 0 con $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{a}}_y$, como muestra la Fig. 5.5. Hallar H.



Figura 5.5

Solución: La ley de Biot–Savart y consideraciones de simetría muestran que **H** tiene sólo una componente en *x*, y no es una función de *x* o *y*. Aplicando la ley de Ampere al contorno cuadrado 12341, y usando el hecho de que **H** debe ser antisimétrico en *z*, se obtiene

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H)(2a) + 0 + (h)(2a) = (K)(2a) \implies H = \frac{K}{2}$$

De modo que para toda z > 0, $\mathbf{H} = (K/2)\hat{\mathbf{a}}_x$. Más generalmente, para una orientación arbitraria de la lámina de corriente,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{a}}_n \tag{5.14}$$

Ejemplo 5. Úsese la ley de Ampere para obtener el campo **H** debido a un filamento de corriente *I* recto y de longitud infinita.

La ley de Biot–Savart muestra que en cada punto del círculo concéntrico en la Fig. 5.2, **H** es tangencial y de la misma magnitud, siempre que *r* sea constante. Entonces, como la trayectoria encierra toda la corriente *I*, según la ley de Ampere,

José R. Morón

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H(2\pi\rho) = I$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$
(5.15)

de modo que

El mismo resultado obtenido anteriormente.

Como una extensión de la Ec. (5.15), considere la bobina toroidal de *N* vueltas bien apretadas y de sección transversal uniforme de área *a* en la Fig. 5.6.



Figura 5.6. Una bobina toroidal.

Si se escoge una trayectoria circular de radio r y aplicando la ley circuital de Ampere se obtiene

$$H_{\star}2\pi r = NI$$

donde H_t es la componente de **H** tangente a la trayectoria. Si las dimensiones de la sección transversal son pequeñas en comparación con r, la componente transversal de **H** es despreciable y se obtiene

$$H \cong H_t = \frac{NI}{2\pi r} \tag{5.16}$$

Para un punto fuera de la bobina toroidal, ésta aparecerá como aproximadamente equivalente a una sola vuelta en torno al eje. La componente en x de la intensidad del campo magnético [ver la Ec. (5.10)] es

$$H_x = \frac{Ib^2}{2(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

donde *b* es el radio para una sola vuelta equivalente. En x = 0, el cociente $H_x/H = \pi r/bN$ muestra que el orden de magnitud del campo externo es menor que el del campo interno por un factor de *N*.

Ejemplo 6. Hallar H en el centro de una espira cuadrada de lado L.

Solución: Se escoge un sistema de coordenadas cartesiano de manera que la espira está situada como muestra la Fig. 5.7. Por simetría, la mitad de cada lado contribuye la misma cantidad a **H** en el centro. Para el medio lado $0 \le x \le L/2$, y = -L/2, la ley de Biot–Savart da para el campo en el origen la relación diferencial

$$d\mathbf{H} = \frac{(Idx\hat{\mathbf{a}}_{x}) \times \left[-x\hat{\mathbf{a}}_{x} + (L/2)\hat{\mathbf{a}}_{y}\right]}{4\pi \left[x^{2} + (L/2)^{2}\right]^{3/2}}$$
$$= \frac{Idx(L/2)\hat{\mathbf{a}}_{z}}{4\pi \left[x^{2} + (L/2)^{2}\right]^{3/2}}$$

Por tanto, el campo total en el origen es



Figura 5.7

$$\mathbf{H} = 8 \int_{0}^{L/2} \frac{Idx(L/2)\hat{\mathbf{a}}_{z}}{4\pi \left[x^{2} + (L/2)^{2}\right]^{3/2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L}\hat{\mathbf{a}}_{z}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L}\hat{\mathbf{a}}_{n}$$

donde $\hat{\mathbf{a}}_n$ es la normal al plano de la espira y dada por la regla usual de la mano derecha.

Ejemplo 7. *Campo en una Línea Coaxial.* Considere una línea coaxial de longitud infinita consistente de un conductor interno de radio *a*, un conductor externo de radio interno *b* y espesor *t*. Por el conductor interno fluye una corriente *I* y por el externo fluye una corriente de retorno –*I*, como en la Fig. 5.8.



Figura 5.8 Línea coaxial de longitud infinita.

En la región $a \le \rho \le b$ la solución para H_{ϕ} es la misma que la del Ejemplo 5, es decir,

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho}, \qquad a \le \rho \le b$$

En la región $\rho \le a$, la corriente encerrada, si se considera una corriente uniformemente distribuida, es $I_{enc} = \rho I/a^2$, y el campo H_{ϕ} es

$$H_{\phi} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}, \qquad \rho \le a$$

En la región $b \le \rho \le b + t$ se tiene que

$$\int_{0}^{2\pi} H_{\phi} \rho d\phi = I - \frac{I}{\pi \left[(b+t)^2 - b^2 \right]} \int_{b}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} \rho d\phi d\phi$$

0

$$2\pi\rho H_{\phi} = I - \frac{I(\rho^2 - b^2)}{(b+t)^2 - b^2}$$

ya que la densidad de corriente en el conductor externo es $I/\pi \lfloor (b+t)^2 - b^2 \rfloor$. Por tanto,

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} - \frac{I(\rho^2 - b^2)}{2\pi\rho[(b+t)^2 - b^2]}, \quad b \le \rho \le b + t$$

Para $\rho \ge b + t$ el campo H_{ϕ} es cero, ya que la trayectoria de integración no encierra una corriente neta. Nótese que la expresión anterior para H_{ϕ} se hace cero cuando ρ es igual a b + t.

5.4 Relación entre J y H

En vista de la ley de Ampere, la ecuación de definición para $(rot H)_x$ puede escribirse como

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_{x} = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{I_{x}}{\Delta y \Delta z} = J_{x}$$

donde $J_x = dI_x/dS$ es la densidad de superficie de la corriente en la dirección positiva de *x*. Así que las componentes en *x* de rot **H** y la *densidad de corriente* son iguales en cualquier punto. En forma similar para las componentes en *y* y *z*, de manera que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{5.17}$$

Ésta es una de las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos. Si se conoce **H** en toda la región, entonces $\nabla \times \mathbf{H}$ producirá **J** para esa región. Desde otro punto de vista, puesto que el rotacional de un campo vectorial es una medida apropiada de la intensidad de la fuente, esta ecuación establece a **J** como una fuente de vórtice del campo **H**.

Ejemplo 8. Un conductor largo y recto con sección transversal de radio *a* tiene una intensidad de campo magnético $\mathbf{H} = (I\rho/2\pi a^2)\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$ dentro del conductor ($\rho < a$) y $\mathbf{H} = (I/2\pi a\rho)\hat{\mathbf{a}}_{\phi}$ para $\rho > a$. Determínese **J** en ambas regiones.

En el interior del conductor,

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I\rho}{2\pi a^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{I\rho^2}{2\pi a^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{a}}_z$$

la cual corresponde a una corriente de magnitud *I* en la dirección +*z* que está distribuida uniformemente en el área de la sección transversal πa^2 .

Fuera del conductor,

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I}{2\pi\rho} \right) \hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{I}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{a}}_{z} = \mathbf{0}$$

como debe ser.

Ejemplo 9. Un conductor circular de radio $r_0 = 1$ cm tiene un campo interno

$$\mathbf{H} = \frac{10^4}{\rho} \left(\frac{1}{a^2} \operatorname{sen} a\rho - \frac{\rho}{a} \cos a\rho \right) \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \quad (A/m)$$

donde $a = \pi/2r_0$. Halle la corriente total en el conductor.

Solución: Se tienen dos métodos para resolver este problema: (1) calcular $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ y luego integrar; (2) usar la ley de Ampere. Aquí el segundo método es más sencillo.

$$I_{enc} = \oint_{\rho=r_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{10^4}{r_0} \left(\frac{4r_0^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{2r_0^2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \right) r_0 d\phi$$
$$= \frac{8 \times 10^4 r_0^2}{\pi} = \frac{8}{\pi} \quad A$$

5.5 Densidad de Flujo Magnético

Igual que la densidad **D** en campos electrostáticos, la intensidad de campo magnético **H** depende solamente de cargas (en movimiento, en este caso) y es independiente del medio. El campo de fuerzas asociado con **H** es la *densidad de flujo magnético* **B**, la cual es dada por

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \tag{5.18}$$

donde $\mu = \mu_0 \mu_r$ es la *permeabilidad* del medio y μ_r es la permeabilidad relativa. La unidad de **B** es el *tesla* (T),

1 tesla (T) =
$$1\frac{N}{A \cdot m}$$

La permeabilidad del espacio libre μ_0 tiene un valor numérico de $4\pi \times 10^{-7}$ y tiene la unidad de *henry por metro* (H/m); μ_r la *permeabilidad relativa* del medio, es un número puro, adimensional, muy cercano a la unidad, excepto para un pequeño grupo de materiales *ferromagnéticos*.

El *flujo magnético*, Φ_m , a través de una superficie *S* se define como

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.19}$$

El flujo magnético, igual que el flujo eléctrico, es una cantidad escalar y su signo puede ser positivo o negativo dependiendo de cómo se escoja la normal a la superficie *d***S**. La unidad de flujo magnético es el *weber*, Wb. Las diferentes unidades magnéticas están relacionadas por

$$1 T = 1 Wb/m^2$$
 $1 H = 1 Wb/A$

Normalmente, la superficie en la Ec. (5.19) es abierta; si es cerrada, entonces $\Phi = 0$, o

$$\int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \qquad \text{Ley de Gauss para campos magnéticos}$$
(5.20)

El lado izquierdo de esta ecuación es una descripción matemática del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada. En este caso, la ley de Gauss se refiere al flujo magnético, el número de líneas del campo magnético que atraviesan una superficie cerrada *S*.

Igual que en el caso del flujo eléctrico, el flujo magnético que atraviesa una superficie puede considerarse como el número de líneas del campo magnético que penetran esa superficie. Cuando piense sobre el número de líneas que atraviesan la superficie, no se olvide que los campos magnéticos, al igual que los eléctricos, son realmente continuos en el espacio y que el "número de líneas del campo" sólo tiene significado una vez que se ha establecido una relación entre el número de líneas que se dibujan y la intensidad del campo.

Cuando se considera el flujo magnético a través de una superficie cerrada, es importante recordar la condición de que la penetración de la superficie es una calle de dos vías y que el flujo saliente y el entrante tienen signos opuestos. Así que cantidades iguales de flujo saliente (positivo) y de flujo entrante (negativo) se cancelarán, produciendo un flujo neto igual a cero.

La razón por la cual el signo del flujo saliente y el entrante es importante se puede entender considerando una pequeña superficie cerrada colocada en un campo. Indiferentemente de la forma de la superficie que se escoja, se encontrará que el número de líneas del campo que entran el volumen encerrado por la superficie es exactamente igual al número de líneas que salen del volumen. Si esto se cumple para todos los campos magnéticos, ello sólo puede significar que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre debe ser cero. Por supuesto, esto es cierto porque la única forma de tener líneas del campo que entran a un volumen sin salir es que

terminen en el interior del volumen, y la única forma en que salgan líneas del volumen sin que entren, es que ellas se originen en el interior del volumen. Sin embargo, a diferencia de las líneas del campo eléctrico, las líneas del campo magnético no se originan ni terminan en cargas, más bien circulan sobre sí mismas, formando lazos continuos. Si una parte de un lazo pasa a través de una superficie cerrada, otra parte del mismo lazo debe atravesar la superficie en la dirección opuesta. De manera que el flujo magnético saliente y el entrante deben ser iguales y opuestos al atravesar cualquier superficie.

En situaciones que comprenden superficies y campos complejos, determinar el flujo mediante la integración de la componente normal del campo magnético sobre una superficie especificada puede ser bastante difícil. En esos casos, saber que el flujo magnético total que atraviesa una superficie debe ser cero puede permitir una simplificación del problema, como demuestran los ejemplos siguientes.

Ejemplo 10. Un cilindro cerrado de altura *h* y radio *R* se coloca en un campo magnético dado por $\mathbf{B} = B_o(\hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_k)$. Si el eje del cilindro está alineado a lo largo del eje *z*, halle el flujo que atraviesa (a) las superficies superior e inferior del cilindro y (b) la superficie lateral curva del cilindro.

Solución: La ley de Gauss establece que el flujo magnético que atraviesa toda la superficie debe ser cero, así que si se puede calcular el flujo a través de algunas porciones de la superficie, es posible deducir el flujo a través de las otras porciones. En este caso, el flujo que atraviesa las partes superior e inferior del cilindro son relativamente fáciles de calcular; cualquier cantidad adicional que se necesite para que el flujo total sea igual a cero debe provenir del lado curvo del cilindro. Entonces,

$$\Phi_{m, \sup} + \Phi_{m, \inf} + \Phi_{m, \text{lado}} = 0$$

El flujo magnético a través de cualquier superficie es dado por

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Para la superficie superior, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$, de modo que

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(B_0 \hat{\mathbf{a}}_y - B_0 \hat{\mathbf{a}}_z \right) \cdot \mathbf{a}_z = -B_0$$

у

$$\Phi_{m, \sup} = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -B_0 \int_{S} dS = -B_0 \left(\pi R^2 \right)$$

Un análisis similar para la superficie inferior (para la cual $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{a}}_z$) da

$$\Phi_{m, \text{ inf}} = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = +B_0 \int_{S} dS = +B_0 \left(\pi R^2\right)$$

Como $\Phi_{m, sup} = -\Phi_{m, inf}$, se puede concluir que $\Phi_{m, lado} = 0$.

Ejemplo 11. Hallar el flujo que cruza la porción del plano $\phi = \pi/4$ definida por 0.01 < *r* 0.05 m y 0 < *z* < 2 m (ver Fig. 5.9). Un filamento de corriente de 2.50 A está colocado a lo largo del eje *z* en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_z$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$d\mathbf{S} = d\rho \, dz \, \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

$$\Phi_m = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \, \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \cdot d\rho \, dz \, \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.01}$$

$$= 1.61 \times 10^{-6} \text{ Wb o } 1.61 \text{ } \mu \text{Wb}$$





En la Fig. 5.10*a*, todo el flujo magnético Φ_m que entra a la superficie cerrada debe abandonar esa superficie. Como ya se mencionó, una línea de flujo magnético es una trayectoria para la cual **B** es tangente en todo punto de la línea. Observe que las líneas del flujo magnético Φ_m son curvas cerradas, sin punto inicial y sin punto terminal (Fig. 5.10*b*). Esto contrasta con el flujo eléctrico Φ_e , el cual se origina en una carga positiva y termina un una carga negativa. Así pues, los campos **B** no tienen ni fuentes ni sumideros y su naturaleza continua hacen que la forma diferencial de la ley de Gauss sea bastante sencilla. Ella es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.21}$$

Aunque la Fig. 5.10*b* es para un conductor rectilíneo con corriente *I*, generalmente se cumple que las líneas de flujo son cerradas y no se cortan entre sí, indiferentemente de la distribución de corriente.



La Ec. (5.21) contrasta con la ley de Gauss para el campo de desplazamiento donde el lado derecho es igual a la densidad de carga eléctrica. Como todavía no se ha descubierto ninguna carga magnética neta, en la Ec. (5.21) no hay un término de fuente. El lado izquierdo de la Ec. (5.21) es una descripción matemática de la divergencia del campo magnético, esto es, la tendencia del campo a "fluir" con más fuerza al alejarse de un punto que cuando se acerca, mientras que el lado derecho es simplemente igual a cero.

El teorema de la divergencia da la representación integral equivalente

$$\int_{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = \oint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{5.22}$$

la cual dice que el flujo magnético neto que atraviesa una superficie cerrada es siempre cero. En otras palabras, el flujo magnético total que atraviesa una superficie es igual al flujo que sale. Como no hay cargas magnéticas donde termine el campo magnético, las líneas del campo, como ya se dijo anteriormente, siempre son cerradas.

5.6 El Potencial Vectorial Magnético

La intensidad de campo eléctrico se obtuvo primero a partir de configuraciones de cargas conocidas. Posteriormente, se desarrolló el potencial eléctrico *V* y se encontró que **E** podía obtenerse como el gradiente negativo de *V*, es decir, $\mathbf{E} = -\nabla V$. La ecuación de Laplace proporcionó un método de obtener *V* a partir de potenciales conocidos en los conductores de las fronteras; algunos problemas del campo electrostático se simplifican al relacionar **E** y *V* en esta forma. De manera similar, puesto que la divergencia del campo magnético es cero, se puede escribir el campo magnético como el rotacional de un vector; es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.23}$$

donde **A** se denomina el *potencial magnético vectorial* y sirve como una cantidad intermedia a partir de la cual la densidad **B**, y por tanto **H**, puede ser calculada. Con frecuencia es más fácil calcular **A** y lego obtener el campo magnético a partir de la Ec. (5.23). Observe que la definición de **A** es consistente con el requerimiento de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La unidad de **A** es el Wb/m o T·m.

Se sabe que un campo vectorial queda definido cuando se conocen su divergencia y su rotacional (teorema de Helmholtz). Ya se definió el rotacional de **A** por la Ec. (5.23); queda la posibilidad de introducir una condición para la divergencia de **A**. Por tanto, si se impone la condición adicional (se escoge, por supuesto, la más sencilla) que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{5.24}$$

entonces el potencial vectorial magnético **A** puede ser determinado a partir de las corrientes conocidas en la región de interés. La fórmula estándar para **rot rot A** se convierte ahora en

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.17), se obtiene, para una región de permeabilidad uniforme,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{5.25}$$

Esta ecuación da la relación entre el potencial vectorial A y la densidad de corriente J. En forma de componentes, esta ecuación es, en coordenadas cartesianas,

$$\hat{\mathbf{a}}_{x}\nabla^{2}A_{x} + \hat{\mathbf{a}}_{y}\nabla^{2}A_{y} + \hat{\mathbf{a}}_{z}\nabla^{2}A_{z} = -\mu\left(\hat{\mathbf{a}}_{x}J_{x} + \hat{\mathbf{a}}_{y}J_{y} + \hat{\mathbf{a}}_{z}J_{z}\right)$$
(5.26)

Así que las componentes A_x , A_y y A_z satisfacen todas ellas la ecuación de Poisson. Una solución de esta ecuación es dada por

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{J_x dv}{R}, \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{J_y dv}{R}, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{J_z dv}{R}$$
(5.27)

y sumando las componentes, se obtiene

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v} \frac{\mathbf{J}dv}{R}$$
(5.28)

Para las tres configuraciones de corrientes típicas, las expresiones son las siguientes:

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu I \, d\mathbf{l}}{4\pi R} \qquad \text{filamento o línea de corriente}$$
(5.29)

$$\mathbf{A} = \int_{S} \frac{\mu \mathbf{K} dS}{4\pi R} \qquad \text{lámina de corriente}$$
(5.30)

$$\mathbf{A} = \int_{v} \frac{\mu \mathbf{J} \, dv}{4\pi R} \qquad \text{volumen de corriente} \tag{5.31}$$

Aquí, *R* es la distancia entre el elemento de corriente y el punto en el cual se calcula el potencial vectorial magnético. Igual que la integral análoga para el potencial eléctrico, las expresiones anteriores para **A** presuponen un nivel de referencia igual a cero en infinito; no pueden aplicarse si la distribución de corriente

misma se extiende hasta infinito. También se debe señalar que las fórmulas para **A** no son las más generales que dan la densidad de campo **B** requerida. Se podría añadir a cada una el gradiente de cualquier función escalar sin afectar el campo **B**.

Como ya se mencionó, con frecuencia es más fácil de usar el potencial vectorial ya que está en la misma dirección que la corriente y se puede evitar el trabajo más complicado que implica el producto cruz en la ley de Biot-Savart.

Ejemplo 12. Se determinará el potencial vectorial magnético para un filamento de corriente recto e infinito *I* en el espacio libre (Fig. 5.11).



En la Fig. 5.11 el filamento de corriente está a lo largo del eje z y el punto de observación es (x, y, z). El elemento de corriente particular

$$I d\mathbf{l} = I d\ell \,\hat{\mathbf{a}}$$

en $\ell = 0$, donde ℓ es la variable de integración a lo largo del eje z. Es claro que la integral

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I \, d\ell}{4\pi R} \hat{\mathbf{a}}_z$$

no existe, ya que, cuando ℓ es grande, $R \approx \ell$. Éste es el caso de una distribución de corriente que se extiende hasta infinito.

Sin embargo, es posible considerar el potencial vectorial diferencial

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R} \hat{\mathbf{a}}_z$$

y a partir de él obtener el *diferencial* de **B**. Así, para el elemento de corriente particular en $\ell = 0$,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \, d\ell}{4\pi \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}} \hat{\mathbf{a}}_z$$

у

$$d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \, d\ell}{4\pi} \left[\frac{-y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \, \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \, \hat{\mathbf{a}}_{\dot{y}} \right]$$

Este resultado coincide con el campo $d\mathbf{H} = (1/\mu_0) d\mathbf{B}$ dado por la ley de Biot-Savart.

Ejemplo 13. Obtenga el potencial magnético vectorial **A** para la lámina de corriente del Ejemplo 2. Para z > 0, José R. Morón

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \hat{\mathbf{a}}_x$$

Por tanto,

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 K}{2}$$

Como **A** debe ser independiente de x y de y, se debe tener que

$$-\frac{dA_y}{dz} = \frac{\mu_0 K}{2} \quad \text{o} \quad A_y = -\frac{\mu_0 K}{2} (z - z_0)$$

Entonces, para z > 0,

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 K}{2} (z - z_0) \hat{\mathbf{a}}_y = -\frac{\mu_0}{2} (z - z_0) \mathbf{K}$$

Para z < 0, simplemente se cambia el signo de la expresión anterior.

El Vector Potencial y el Flujo Magnético. Al sustituir la Ec. (5.23) en la Ec. (5.19) y aplicando el teorema de Stokes, el flujo magnético a través de una superficie se puede expresar como

$$\Phi_{m} = \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I}$$

$$\Phi_{m} = \oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I}$$
(5.32)

0

en la cual *C* es el contorno que limita la superficie *S*. De manera que el flujo que atraviesa una superficie se puede calcular ya sea mediante la Ec. (5.19) o la Ec. (5.32). El uso del potencial magnético vectorial proporciona un método poderoso y elegante para resolver problemas en electromagnetismo, especialmente los relacionados con antenas, donde normalmente es más conveniente hallar el campo **B** calculando primero el potencial vectorial **A**.

Ejemplo 14. El potencial magnético vectorial en el espacio anular cilíndrico de la Fig. 5.12 es igual a $\mathbf{A} = -k \ln \rho \hat{\mathbf{a}}_{z}$, donde *k* es una constante. Determine el flujo magnético total en el espacio anular.



Solución: Se aplica la Ec. (5.32) a una sección transversal como la ilustrada por la región sombreada en la Fig. 5.12 y obtenemos

$$\Phi_m = \int_0^L (-k \ln r_1) dz + 0 + \int_L^0 (-k \ln r_2) dz + 0 = kL \ln \frac{r_2}{r_1}$$

donde los valores cero corresponden a las trayectorias radiales.



Ejemplo 15. Determínese el potencial magnético vectorial de una espira circular de corriente a una gran distancia de la espira (zona lejana).

Solución: Como se pide el potencial en un punto muy alejado de la espira, se selecciona un sistema de coordenadas cartesiano de modo que el punto de observación *P* queda en el plano y = 0 (véase la Fig. 5.13). Por la Ec. (5.29), el potencial vectorial en *P* es dado por

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{R} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{a}}_y}{R} d\phi$$
(5.33)

También se tiene que

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{u} = (x\hat{\mathbf{a}}_x + z\hat{\mathbf{a}}_z) - (a\cos\phi\hat{\mathbf{a}}_x + a\sin\phi\hat{\mathbf{a}}_y)$$
$$= (x - a\cos\phi)\hat{\mathbf{a}}_x - a\sin\phi\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z$$

y dado que $r^2 = x^2 + z^2 \gg a^2$, se obtiene

$$R^{2} = x^{2} + z^{2} - 2ax\cos\phi \approx (x^{2} + z^{2})\left(1 - \frac{2ax\cos\phi}{x^{2} + z^{2}}\right)$$

y

$$R^{-1} = \left(R^2\right)^{-1/2} \approx \left(x^2 + z^2\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2ax\cos\phi}{x^2 + z^2}\right)$$
(5.34)



Figura 5.13. Configuración para el Ejemplo 15.

y al sustituir la Ec. (5.34) en la Ec. (5.33), la integral que contiene el seno se anula (el integrando es impar en ϕ). Por tanto, $\mathbf{A}(P) = A_y \hat{\mathbf{a}}_y$, donde

$$A_{y} = \frac{\mu_{0}Ia}{2\pi(x^{2}+z^{2})^{1/2}} \int_{0}^{\pi} \left(\cos\phi + \frac{ax\cos\phi}{x^{2}+z^{2}}\right) d\phi = \frac{\mu_{0}Ia^{2}x}{4(x^{2}+z^{2})^{3/2}}$$

Ejemplo 16. Ahora se aplicará la Ec. (5.29) para hallar el campo magnético debido a un alambre largo y recto con un retorno paralelo en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_x$ como muestra la Fig. 5.14. Puesto que todos los elementos del alambre están en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_x$, el potencial vectorial **A** tiene sólo la componente A_x . Aplicando la Ec. (5.29), se obtiene

$$A_{x} = \frac{\mu_{0}I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{1}} - \frac{1}{r_{2}}\right) dx = \frac{\mu_{0}I}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\left(a_{1}^{2} + x^{2}\right)^{-1/2} - \left(a_{2}^{2} + x^{2}\right)^{-1/2}\right] dx$$
$$= \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \left[\ln\frac{r_{1} + x}{r_{2} + x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \ln\frac{a_{2}}{a_{1}}$$

Las componentes de la densidad de campo magnético son

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \qquad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Como $a_1 = \left[\left(y - \frac{1}{2}a \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}$ y $a_2 = \left[\left(y + \frac{1}{2}a \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}$, esto da

$$B_y = \frac{\mu_0 I z}{2\pi} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right)$$
(5.35)

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{y + \frac{1}{2}a}{a_2^2} - \frac{y - \frac{1}{2}a}{a_1^2} \right)$$
(5.36)



Figura 5.14

5.7 Fuerzas y Pares Magnéticos

Con base en experimentos, se establece que cuando una partícula de carga Q se mueve con una velocidad **u** en un campo magnético **B**, este campo ejerce una fuerza sobre la partícula cargada que forma ángulos rectos con su velocidad, y tiene una amplitud que es proporcional a la carga, a su velocidad y a la densidad de flujo magnético. La expresión completa para la fuerza magnética la da la ecuación de Lorentz para la fuerza:

$$\mathbf{F}_m = Q \, \mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{5.37}$$

Así que la dirección de una partícula en movimiento es modificada por un campo magnético. La Ec. (5.37) muestra claramente que la fuerza magnética \mathbf{F}_m es perpendicular tanto a **u** como a **B**. Por tanto, la magnitud de la velocidad, *u*, *y*, en consecuencia, la energía cinética de la carga, permanecerá igual. Esto contrasta con la situación en el campo eléctrico, donde la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$ sí actúa sobre la partícula modificando su energía cinética y puede transferir energía a la partícula.

Comparando la Ec. (5.37) para \mathbf{F}_m con la ecuación para \mathbf{F}_e , se presentar varias diferencias importantes en los campos magnéticos y eléctricos:

1. Igual que el campo eléctrico, el campo magnético es directamente proporcional a la fuerza magnética, pero, a diferencia de **E**, el cual es paralelo o antiparalelo a la fuerza eléctrica, la dirección de **B** es *perpendicular* a la fuerza magnética.

- 2. Igual que E, el campo magnético puede definirse a través de la fuerza experimentada por una pequeña carga de prueba, pero a diferencia de E, se deben tomar en cuenta la rapidez y la dirección de la carga de prueba cuando se relacionan las fuerzas y los campos magnéticos.
- **3.** Como la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad en todo instante, la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es cero y en consecuencia el trabajo realizado por el campo magnético es siempre cero.
- 4. En tanto que los campos electrostáticos son producidos por cargas eléctricas, los campos magnetostáticos son producidos por corrientes eléctricas.

Cuando ambos campos están presentes en una región, la fuerza sobre una partícula en movimiento es dada por

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{5.38}$$

Ésta se conoce como la *fuerza de Lorentz* y ella relaciona la fuerza mecánica con la fuerza eléctrica. La fuerza de Lorentz, junto con las condiciones iniciales, determina la trayectoria de la partícula. Es decir, si se conoce la masa *m* de la partícula moviéndose en los campos **E** y **B**, por la segunda ley del movimiento de Newton se tiene que

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{5.39}$$

y la solución de esta ecuación determina el movimiento de partículas cargadas en los campos E y B.

Ejemplo 17. Una partícula de carga Q y masa m está en reposo en el origen de coordenadas, en presencia de un campo gravitatorio que ejerce una fuerza $-mg\hat{\mathbf{a}}_z$ sobre ella y de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_y$. Se quiere determinar las ecuaciones del movimiento de la partícula y calcular las distintas componentes de su velocidad.

Solución: En este caso la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = mg\hat{\mathbf{a}}_z + Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Entonces

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = (-v_z \hat{\mathbf{a}}_x + v_x \hat{\mathbf{a}}_z) B_0$$

y la ecuación diferencial para cada componente será entonces

$$m\frac{dv_x}{dt} = -Q_0 Bv_z$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = mg + QB_0 v_x$$
(5.40)

Diferenciando ahora la primera de las Ecs. (5.40) y sustituyendo el valor de dv_z/dt , se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 v_x + \frac{QB_0}{m}g$$

Si se toma $\omega_0 = QB_0/m$ y se reacomoda la ecuación, se obtiene

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_0^2 v_x = \omega_0 g \tag{5.41}$$

La solución general de esta ecuación es

$$v_x = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t + \frac{g}{\omega_0}$$

donde A_1 y A_2 son constantes a determinar a partir las condiciones iniciales. Para t = 0, v = 0; por tanto,

$$0 = A_1 + \frac{g}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{g}{\omega_0}$$

Como sobre la partícula en reposo sólo opera una fuerza en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_z$ (la gravedad), entonces la aceleración en la dirección $\hat{\mathbf{a}}_x$ es cero, es decir, $dv_x/dt = 0$ en t = 0. Por tanto,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_0 A_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + A_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0$$

y la solución para v_x es

 $v_x = \frac{g}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t)$

De la segunda de las ecuaciones en (5.40) se deduce que $v_y = 0$ (la velocidad inicial es cero). La componente v_z se puede calcular en una forma similar a v_x . En resumen, las componentes de la velocidad son

$$v_{x} = \frac{g}{\omega_{0}} (1 - \cos \omega_{0} t)$$

$$v_{y} = 0$$

$$v_{x} = \frac{g}{\omega_{0}} \sec \omega_{0} t$$
(5.42)

La trayectoria de las partículas se obtiene integrando las componentes de la velocidad e imponiendo la condición que la partícula está en el origen en t = 0. El resultado es

$$x = \frac{g}{\omega_0} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sec \omega_0 t \right)$$
$$y = 0$$
$$z = -\frac{g}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t$$

5.7.1 Fuerza sobre un Elemento de Corriente

Una situación común es la de un conductor por el cual fluye una corriente colocado en un campo magnético. Puesto que I = dQ/dt, la fuerza diferencial sobre un elemento de carga dQ = Idt puede escribirse como

$$d\mathbf{F}_{m} = dQ(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (I \, dt)(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

= $I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ (5.43)

donde $d\mathbf{l} = \mathbf{u}dt$ es un elemento de longitud en la dirección de la corriente *I*. Si la corriente *I* circula en una trayectoria cerrada o circuito *C*, la fuerza sobre el circuito viene dada por

$$\mathbf{F}_m = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{5.44}$$

Al usar la Ec. (5.43) o la Ec. (5.44) se debe tener en cuenta que el campo magnético producido por el elemento de corriente Idl no ejerce fuerza sobre sí mismo, en la misma forma que una carga puntual no actúa sobre sí misma. El campo **B** en las Ecs. (5.43) o (5.44) es externo al elemento de corriente.

Como casos especiales de la Ec. (5.44), considérese primero un circuito o lazo cerrado en un campo eléctrico uniforme. En este caso, la ecuación puede escribirse como

$$\mathbf{F}_m = I\left(\oint_C d\mathbf{l}\right) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

es decir, la fuerza magnética total ejercida por un campo magnético uniforme sobre una espira cerrada es cero. Como segundo caso considérese un segmento de conductor curvo no cerrado. Si se tiene un segmento de este conductor entre dos puntos *a* y *b* y se coloca en un campo uniforme **B**, entonces la Ec. (5.44) se convierte en

$$\mathbf{F}_{m} = I\left(\int_{a}^{b} d\mathbf{l}\right) \times \mathbf{B} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$
(5.45)

donde ℓ es el vector dirigido desde *a* hasta *b*. Observe que si el conductor es recto y el campo es constante, la fuerza es dada por $F_m = ILB \operatorname{sen} \theta$, donde *L* es la longitud del conductor y θ es el ángulo entre ℓ y **B**.

Cuando se tienen dos conductores cerrados por los cuales circulan las corrientes I_1 e I_2 , respectivamente, la situación presentada es la de un circuito que conduce una corriente en el campo magnético producido por otro circuito, Fig. 5.15. Si **B**₂₁ es el campo magnético establecido por la corriente I_2 en el circuito C_2 , la fuerza **F**₂₁ sobre el circuito C_1 puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{21} = I_1 \oint_{C_1} d\boldsymbol{\ell}_1 \times \mathbf{B}_{21} \tag{5.46}$$

donde \mathbf{B}_{21} es, de acuerdo con la ley de Biot-Savart,

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\ell_2 \times \hat{\mathbf{a}}_{R_{21}}}{R_{21}^2}$$
(5.47)



Figura 5.15

Combinando las Ecs. (5.46) y (5.47), se obtiene

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\ell_1 \times (d\ell_2 \times \hat{\mathbf{a}}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (N)$$
(5.48)

que es la *ley de fuerzas de Ampere* entre dos circuitos conductores de corriente. La fuerza F_{12} sobre el circuito C_2 en la presencia del campo magnético creado por la corriente I_1 en el circuito C_1 , puede escribirse a partir de la Ec. (5.48) intercambiando los subíndices 1 y 2, es decir,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\ell_2 \times \left(d\ell_1 \times \hat{\mathbf{a}}_{R_{12}}\right)}{R_{12}^2} \quad (N)$$
(5.49)

Se deja como ejercicio para el lector verificar que $F_{12} = F_{21}$ y se cumple la tercera ley de Newton.

Ejemplo 19. Determinar la fuerza por unidad de longitud sobre dos conductores paralelos largos y rectos, separados una distancia *d*, si cada uno conduce una corriente de *I* (A) en la misma dirección.



Figura 5.16

Solución: Para la configuración mostrada en la Fig. 5.16, el conductor en el lado izquierdo establece un campo cuya magnitud en la posición del conductor en el lado derecho es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

y cuya dirección es $-\hat{a}_z$. Por tanto, la fuerza sobre el conductor en el lado derecho es

$$\mathbf{F} = IL\hat{\mathbf{a}}_{y} \times (-B\hat{\mathbf{a}}_{z}) = \frac{\mu_{0}I^{2}L}{2\pi d}(-\hat{\mathbf{a}}_{x})$$

у

$$\frac{\mathbf{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \hat{\mathbf{a}}_x$$

Se obtiene entonces que la fuerza es de atracción. Para conductores paralelos, cuando las corrientes están en la misma dirección, se producen fuerzas de atracción entre los conductores. Si las corrientes en los conductores son diferentes, es fácil demostrar que la fuerza de atracción entre los dos es dada por

$$\frac{\mathbf{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \,\hat{\mathbf{a}}_x$$

Ejemplo 20. Un conductor recto y muy largo con una corriente I_1 divide en dos partes iguales una espira conductora cuadrada de lado 2*a*, por la cual circula una corriente I_2 , como indica la Fig. 5.17. Determinar la fuerza neta sobre la espira.



Figura 5.17

Solución: Las magnitudes de los campos B_1 y B_2 debidos al conductor recto son

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

con las direcciones indicadas. Por tanto, la fuerza sobre el lado y = 0 es

$$\mathbf{F}_1 = I_2(2a)B_1\hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\hat{\mathbf{a}}_y$$

y la fuerza sobre el lado en y = 2a es la misma, ya que tanto la corriente como el campo están invertidos. Por simetría, no se ejerce ninguna fuerza sobre los otros dos lados. Por tanto, la fuerza neta sobre la espira es

$$\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_1 = \frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \hat{\mathbf{a}}_y$$

5.7.2 Pares o Momentos de Torsión Magnéticos

El *momento de torsión de una fuerza* o *par* con respecto a un punto especificado es el producto vectorial del brazo de palanca respecto de ese punto y la fuerza. Como muestra la Fig. 5.16, el momento T con respecto al punto *P*, si el punto de aplicación de la fuerza F es *Q*, está dado por

$$\mathbf{T} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{5.50}$$

donde **T** tiene las unidades de trabajo o energía, newton-metro ($N \cdot m$), pero el momento no representa trabajo o energía. En la figura, la fuerza **F** y el vector \overrightarrow{PQ} (llamado brazo de la fuerza) están en el mismo plano (región sombreada).



Figura 5.16

Ejemplo 21. Considere una espira de una sola vuelta en el plano z = 0, como muestra la Fig. 5.17. La espira tiene un ancho w en la dirección del eje x y una longitud ℓ en la dirección de y. El campo **B** es uniforme, tiene magnitud B_0 y está en la dirección positiva de x.



Figura 5.17. Espira cuadrada en un campo B uniforme.

Solución: Como se indica en la figura, solamente las corrientes dirigidas en las direcciones +y y - y dan lugar a fuerzas. Para el lado izquierdo de la espira,

$$\mathbf{F} = I\left(-\ell \hat{\mathbf{a}}_{y} \times B_{0} \hat{\mathbf{a}}_{x}\right) = B_{0} I \ell \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

y para el lado derecho

$$\mathbf{F} = I\left(\ell \hat{\mathbf{a}}_{y} \times B_{0} \hat{\mathbf{a}}_{x}\right) = -B_{0} I \ell \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

El momento con respecto al eje *y* del elemento de corriente en la izquierda requiere de un brazo de fuerza $\mathbf{r} = -(w/2)\hat{\mathbf{a}}_x$; y para el momento del elemento de corriente en la derecha, cambia el signo. Por consiguiente, el momento de ambos elementos de corriente es

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{w}{2}\right)\hat{\mathbf{a}}_x \times (B_0 I\ell)\hat{\mathbf{a}}_z + \left(\frac{w}{2}\right)\hat{\mathbf{a}}_x \times (-B_0 I\ell)\hat{\mathbf{a}}_z = BI\ell w\hat{\mathbf{a}}_y = BIA\hat{\mathbf{a}}_y$$

donde *A* es el área de la espira. Aunque esta expresión se obtuvo para una espira cuadrada, se puede demostrar que tiene validez para una espira plana de forma arbitraria (y para cualquier eje paralelo al eje *y*.

El **momento magnético m** de una espira de corriente plana se define como el producto $IA\hat{a}_n$, donde el vector normal unitario \hat{a}_n se determina mediante la regla de la mano derecha. Se tiene entonces que el momento de fuerzas sobre una espira plana está relacionado con el campo aplicado por

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{5.51}$$

como muestra la Fig. 5.18. Una espira de corriente en un campo magnético se comporta como un dipolo eléctrico en un campo eléctrico, excepto que hay un momento angular asociado con la corriente circulante.

El concepto de momento magnético es esencial para comprender la conducta de partículas cargadas girando en órbitas. Por ejemplo, una carga positiva Q moviéndose en una órbita circular con una velocidad u, o una velocidad angular ω , es equivalente a una corriente $I = uQ = (\omega/2\pi)Q$ y, por tanto, da lugar a un momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi} W A \hat{\mathbf{a}}_n \tag{5.52}$$

como muestra la Fig. 5.19. En la presencia de un campo magnético **B** se producirá un momento $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, el cual tiende a rotar el lazo o espira de corriente hasta que **m** y **B** estén en la misma dirección; es decir, en una orientación para la cual **T** es cero.



5.7.3 El Dipolo Magnético

Un imán de barra o un pequeño lazo o espira de corriente se conocen como un *dipolo magnético*. En el Ejemplo 14 se determinó el potencial vectorial **A** producido por una espira de corriente en el punto P(x, 0, z) muy alejado de ella. La ecuación obtenida para **A** fue

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2 x}{4 \left(x^2 + z^2\right)^{3/2}} \,\hat{\mathbf{a}}_y$$

la cual puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 x}{4\pi (x^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$= \frac{\mu_0 I A x}{4\pi (x^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_y$$
(5.53)

donde $A = \pi a^2$ es el área de la espira. Si ahora se convierte la Ec. (5.53) a coordenadas esféricas usando las relaciones $x = r \operatorname{sen} \theta$ y $z = r \cos \theta$ e introduciendo el *momento del dipolo magnético*, $\mathbf{m} = IA\hat{\mathbf{a}}_z$, y observando que $\hat{\mathbf{a}}_y \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_{\phi}$, se obtiene

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m \operatorname{sen} \theta}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \mathbf{r}$$
(5.54)

La densidad de flujo magnético **B** se obtiene a partir de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \,\hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \,\hat{\mathbf{a}}_\theta \right) \tag{5.55}$$

Resulta interesante comparar la Ec. (5.55) con la Ec. (2-73) para el campo E del dipolo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_{\theta})$$

Observe la semejanza entre el campo lejano **B** de un pequeño lazo de corriente y el campo lejano **E** de un dipolo eléctrico. Por esta razón parece razonable considerar a un pequeño lazo de corriente como un dipolo magnético. Las líneas del campo **B** del dipolo magnético son similares a las del campo **E** para el dipolo eléctrico (Fig. 5.20). No obstante, en las cercanías de los dipolos las líneas de flujo del dipolo magnético son continuas, en tanto que las líneas del campo de un dipolo eléctrico terminan en las cargas, y se orientan desde la carga positiva a la negativa.





5.8 Magnetización y Corrientes de Magnetización

Hasta ahora este estudio se ha restringido a campos magnéticos en el espacio libre producidos por distribuciones de corrientes. En la presencia de un campo magnético, un medio magnético puede volverse magnetizado o polarizado magnéticamente. En el interior del medio, en una escala atómica, hay electrones moviéndose en órbitas ligadas a átomos y girando en torno a sus ejes. El movimiento de los electrones resulta en una corriente macroscópica que debe explicarse. Se introducirá un vector **M**, el *momento de dipolo por unidad de volumen* (también llamado *vector de magnetización*) para explicar esta corriente. El vector **M** es análogo al vector de polarización **P** en los dieléctricos. El movimiento de los electrones en un material magnético se considera equivalente a la presencia de lazos de corriente circulante en el lazo. Los lazos de corriente pueden considerarse como equivalentes a dipolos magnéticos y el momento del dipolo por unidad de volumen es

$$\mathbf{M} = AnI_C \hat{\mathbf{a}}_n$$

donde el vector unitario \hat{a}_n es normal al plano del lazo y forma un sistema de mano derecha con respecto a la dirección del flujo de corriente. Considérese un cilindro elemental de longitud *dx* a lo largo del eje *x* formado por los lazos de corriente (Fig. 5.21*a*). Los lazos de corriente resultan en la formación de una corriente de superficie en el cilindro, la cual es dada por

$$nI_C A \cos\theta dx = M_x dx \tag{5.56}$$

donde M_x es la componente de **M** en la dirección x. Se pueden obtener expresiones similares para las componentes en las direcciones y y z. Considérese ahora un elemento de superficie dS = dx dy de una sección del interior del material magnético (Fig. 5.21b). Debido a los lazos de corriente, a lo largo del borde de dS hay electrones que se mueven a través del área en ambas direcciones. Si, en un intervalo de tiempo unitario, más electrones atraviesan la superficie hacia arriba que hacia abajo, entonces debe existir una densidad de corriente efectiva que identificaremos como J_m y la corriente que pasa por dS es dada por $J_{mz}dx dy$. Esta corriente se puede determinar usando la Ec. (5.56) para calcular la contribución de cada uno de los cuatro bordes de ds:

$$J_{mz}dx\,dy = M_xdx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x}dx\right)dy - M_ydy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}dy\right)dx$$

0

$$J_{mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$

Se pueden obtener expresiones similares para las componentes de J_m en las direcciones de y y z. Por consiguiente, se define la *densidad de corriente de magnetización* por la ecuación

$$\mathbf{J}_m \triangleq \operatorname{rot} \mathbf{M} \triangleq \nabla \times \mathbf{M} \tag{5.57}$$

Estas corrientes también son fuentes del campo magnético y pueden usarse en la ley de Ampere como

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_m + \mathbf{J} \tag{5.58}$$

donde J es la corriente libre debida al movimiento de cargas libres, en contraste con la corriente de magnetización J_m , la cual se debe al movimiento de cargas ligadas en los materiales.

Para el caso en que **M** es uniforme, $J_m = 0$. Este resultado puede verse notando que los lazos de corriente en el interior del medio se cancelan entre sí. Si **M** no es uniforme, hay una densidad de corriente efectiva J_m dentro del medio. Esta densidad de corriente establece un campo magnético en la misma forma que la densidad de corriente de conducción J.



Figura 5.21

La corriente de magnetización J_m dada por la Ec. (5.57) está restringida al interior del material. En la superficie, los lazos de corriente resultan en una *densidad superficial de corriente de magnetización* o *ligada* J_{sm} , la cual puede determinarse considerando la Fig. 5.22. Los lazos de corriente en un segmento de longitud *h* de la superficie dan como resultado una corriente superficial efectiva

$$J_{sm}h = nI_CAh \operatorname{sen} \theta = hM \operatorname{sen} \theta$$

y observando la dirección de la corriente se obtiene

$$\mathbf{J}_{sm} \triangleq \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n \tag{5.59}$$

donde $\hat{\mathbf{a}}_n$ es un vector unitario normal a la superficie.



Figura 5.22. La densidad superficial de corriente de magnetización.

Considérese un caso general en el cual se tiene una densidad de corriente de conducción J en un volumen v; esa densidad de corriente establece un campo magnético que magnetiza un medio magnético de volumen v_m delimitado por la superficie S_m . Desde un punto de vista fundamental no hay diferencias entre los tipos de densidades de corriente. Todas las corrientes establecen un campo magnético en la misma forma y el potencial vectorial resultante es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v} \frac{J}{r} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_m} \frac{J_m}{r} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_m} \frac{J_{sm}}{r} dS$$
(5.60)

Las densidades de corriente J_m y J_{sm} son inducidas en el medio magnético por el campo magnético primario establecido por J. En el caso de *materiales suaves* (*lineales*), la magnetización está relacionada con la intensidad del campo magnético por la ecuación

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\chi}_m \mathbf{H} \tag{5.61}$$

donde χ_m es una cantidad adimensional denominada *susceptibilidad magnética*. Para materiales diamagnéticos y paramagnéticos, χ_m es una constante a una temperatura dada y el resultado es una relación lineal entre **M** y **H**, lo cual no es el caso para sustancias ferromagnéticas. En el caso de imanes permanentes, la relación fundamental es más complicada, ya que el material permanece magnetizado después de remover el campo aplicado externamente. Para hierro suave, las densidades **J**_m y **J**_{sm} no se conocen hasta que se haya determinado **H**. De manera que la Ec. (5.60), aunque es de importancia fundamental, no es muy útil para la solución práctica de problemas del campo. No obstante, se verá que mediante la definición apropiada de **H** en la Ec. (5.61), se puede usar este vector como un medio conveniente para la solución de problemas del campo. Como sólo es posible medir corrientes libres, es conveniente definir el vector **H** como la intensidad de campo magnético en un medio magnético mediante la ecuación

$$\mathbf{H} \triangleq \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{5.62}$$

Sustituyendo la Ec. (5.61) en la Ec. (5.62), se obtiene

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M} \right) = \boldsymbol{\mu}_0 \left(1 + \boldsymbol{\chi}_m \right) \mathbf{H} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$$
(5.63)

donde $\mu \triangleq \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$ es la *permeabilidad magnética* del material y se mide en henrys por metro. La cantidad adimensional $\mu_r = 1 + \chi_m$ se conoce como la *permeabilidad relativa* del material. Introduciendo μ y **H** en esta forma, se puede eliminar cualquier consideración explícita relativa a la corriente de magnetización (un procedimiento similar al que se hizo con la carga ligada en dieléctricos y la polarización). Ahora la Ec. (5.58) puede escribirse como

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
(5.64)

Con la ayuda de la Ec. (5.61), se puede escribir la densidad de corriente de magnetización en una región donde μ es uniforme en la forma

$$\mathbf{J}_m = \boldsymbol{\chi}_m \nabla \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\chi}_m \mathbf{J} \tag{5.65}$$

$$\mathbf{J}_{sm} = \boldsymbol{\chi}_m \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{a}}_n \tag{5.66}$$

Para ilustrar el uso de las Ecs. (5.65) y (5.66), se considerará de nuevo el Ejemplo 3. Ahora se supondrá que el conductor es un alambre de hierro de permeabilidad μ . Usando la ley circuital de Ampere en la forma dada por la Ec. (5.11), se obtienen las Ecs. (5.65) y (5.66), igual que antes. Sin embargo, la densidad de flujo magnético ahora tiene una magnitud dada por

$$B = \mu H = \frac{\mu J \rho}{2}, \qquad \rho < b$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 J b^2}{2\rho}, \qquad \rho > b$$
(5.67)

Observe que hay una discontinuidad en $\rho = b$. La densidad de la corriente de magnetización y la densidad superficial de la corriente de magnetización son

$$\mathbf{J}_m = \boldsymbol{\chi}_m \mathbf{J}, \qquad \mathbf{J}_{sm} = -\frac{\boldsymbol{\chi}_m b \mathbf{J}}{2}$$

El uso del vector **H** y el escalar μ resultan en una solución relativamente directa del problema del campo. Una vez determinado **H**, se está en posición de determinar las corrientes de magnetización.

Materiales Magnéticos. Un material es *no magnético* si su susceptibilidad magnética $\chi_m = 0$ (por ejemplo, el aire y el espacio libre). Si un material dado puede tener una polarización magnética **M** diferente de cero, entonces debe estar compuesto por sistemas atómicos que posean momentos magnéticos capaces de una orientación. En términos de la susceptibilidad magnética o la permeabilidad relativa, los materiales magnéticos se pueden ubicar en las tres categorías siguientes:

Materiales Paramagnéticos. ($\mu_r \ge 1$, es decir, χ_m positiva y muy pequeña). En la mayoría de los átomos, los momentos magnéticos provenientes de los movimientos orbitales y del espín de los electrones se cancelan. No obstante, en algunos de ellos la cancelación no es completa y existe un momento residual de dipolos magnéticos. Ejemplos de esto son los llamados elementos de transición, como el manganeso. Cuando esos átomos se colocan en un campo magnético, son sometidos a un par de fuerzas que tiende a alinearlos, pero la agitación térmica tiende a destruir esta alineación. Este fenómeno es completamente análogo al alineamiento de moléculas polares en dieléctricos. La permeabilidad relativa varía inversamente con la temperatura absoluta. Para la mayoría de los materiales paramagnéticos, χ_m está en el orden de $+10^{-5}$ a $+10^{-3}$.

Materiales Diamagnéticos. En estos materiales los momentos elementales no son permanentes sino que son inducidos de acuerdo con la ley de Faraday. La polarización resultante está en la dirección opuesta a la del campo externo aplicado; la permeabilidad relativa es menor que la unidad (aunque sólo por una cantidad del

orden de 10⁻⁵) y es independiente de la temperatura. Todos los materiales son diamagnéticos, pero puede predominar la polarización de orientación, en cuyo caso la permeabilidad resultante es mayor que la unidad.

Materiales Ferromagnéticos. En estos materiales hay una fuerte polarización magnética y la permeabilidad relativa puede ser bastante grande en comparación con la unidad, alcanzando incluso magnitudes de muchos miles en algunos materiales. Estas polarizaciones tan grandes son el resultado de fenómenos de grupos en el material, en el cual todos los momentos elementales en una pequeña región o dominio se alinean. La polarización resultante en un dominio puede estar orientada en forma aleatoria con respecto a la orientación en un dominio vecino. La característica de grandes polarizaciones de los materiales ferromagnéticos es el resultado de la orientación de dominios completos. El fenómeno es complejo y no se analizará aquí. Los materiales ferromagnéticos pueden ser magnetizados por un campo magnético, retienen una buena cantidad de su magnetización cuando se remueve el campo y son no lineales; es decir, la relación constitutiva $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ no se cumple ya que μ_r depende de \mathbf{B} y no puede representarse mediante un valor único.

5.9 Condiciones de Frontera

Ahora se examinarán las condiciones de continuidad que deben existir en la interfaz entre dos medios magnéticos con propiedades diferentes. Se procederá en una forma similar a la de la Sección 3.8 y se demostrará que la componente normal de **B** y la componente tangencial de **H** deben ser continuas.

Considérese la trayectoria cerrada en la Fig. 5.23*a*. La trayectoria tiene dos lados paralelos a la interfaz y están a una distancia infinitesimal de ella. Por la ley circuital de Ampere, los lados cortos identificados c y d tienen longitudes iguales a cero y no contribuyen a la integral de línea. Los dos lados restantes producen

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) dl = I = J_{s} dl$$
(5.68)

donde J_s es la componente de la corriente superficial perpendicular al contorno especificada por la regla de la mano derecha. De manera que la componente tangencial del campo magnético puede ser discontinua si existe una corriente superficial libre en la interfaz. En forma vectorial, la Ec. (5.68) puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \tag{5.69}$$

donde la normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ apunta de la región 1 hacia la región 2. En la interfaz entre medios con conductividades finitas no hay corriente superficial, $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$, y entonces la componente tangencial de \mathbf{H} es continua en la interfaz; es decir

$$H_{it} = H_{2t} \tag{5.70}$$



Figura 5.23

La Fig. 5.23*b* muestra un pequeño volumen cuyas superficies superior e inferior son paralelas y están a cada lado de la interfaz. El lado lateral del cilindro, al pasar al límite tiene una longitud cero, no contribuye a la integral de superficie de **B**. Por tanto,

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B_{2n} - B_{1n}) dS = 0$$
(5.71)

la cual da la condición de frontera; ésta establece que la componente de **B** normal a una interfaz de discontinuidad es siempre continua:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \tag{5.72}$$

Para medios isótropos lineales, la condición de frontera dada por la Ec. (5.72) se traduce en la siguiente condición para H:

$$\mu_1 H_{2n} = \mu_2 \mathbf{H}_{1n} \tag{5.73}$$

La relación entre los ángulos θ_1 y θ_2 , si no hay corriente superficial en la interfaz puesto que $H_{t1} = H_{t2}$, se determina a partir de la ecuación **B** = μ **H**, es decir,

$$\frac{B_1}{\mu_1}\cos\theta_1 = \frac{B_2}{\mu_2}\cos\theta_2$$

También, $B_{1n} = B_{2n}$, o

 $B_1 \operatorname{sen} \theta_1 = B_2 \operatorname{sen} \theta_2$

y al dividir esta ecuación por la anterior, se obtiene

 $\mu_1 \tan \theta_1 = \mu_2 \tan \theta_2$

que es una relación análoga a la ley de Snell (óptica).

5.10 El Potencial Magnético Escalar

En muchos casos, el estudio de la magnetostática se facilita considerablemente por la introducción de la función del potencial magnético vectorial **A**. La disponibilidad de esta función, introducida con un artificio en el análisis, siempre está asegurada debido al carácter solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) del vector del campo **B**. Pero **A** es un vector y, como en el caso de electrostática, sería mucho más fácil trabajar con un potencial escalar. Ahora se estudiará la posibilidad de un potencial magnético escalar, el cual se denotará por V_m .

Considérese una región R libre de corrientes. La Fig. 5.24 muestra una sección plana de esa región, la cual, como se indica, es de conexión múltiple. La región R', complemento de R, contiene las fuentes del campo magnetostático bajo consideración. Se supone que el campo es producido por una bobina enrollada alrededor de R, como muestra la figura. La bobina tiene N vueltas y por ella fluye una corriente I.



Figura 5.24. Región de conexión múltiple que no contiene corrientes.

En todo punto de la región libre de fuentes *R*, la Ec. (5.12) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{5.74}$$

Por tanto, en la región R, H puede expresarse como el negativo del gradiente de una función escalar V_m,

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \tag{5.75}$$

José R. Morón

La función V_m es el *potencial magnético escalar* y se mide en amperios-vueltas. En virtud de esta definición, se infiere que

$$\int_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} (-\nabla V_m) \cdot d\mathbf{l} = V_m(P) - V_m(Q)$$
(5.76)

donde C_1 denota la porción *PFQ* del contorno cerrado *C* en la Fig. 5.24. La diferencia entre los valores que la función potencial V_m toma en los puntos extremos *P* y *Q* de C_1 se conoce tradicionalmente como la *fuerza magnetomotriz* (fmm) entre esos puntos. Esta noción es análoga a la de diferencia de potencial, o voltaje, asociada con el campo electrostático.

Ya se vio que el potencial escalar electrostático V es una función inyectiva de las coordenadas. En contraste, el potencial magnético escalar V_m es generalmente una función de valores múltiples de la posición excepto cuando la región es de conexión simple y libre de corrientes. La validez de esta afirmación puede demostrarse en la forma siguiente.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \tag{5.77}$$

Esta ecuación establece que si el contorno *C* comienza y termina en el mismo punto *P*, los valores inicial y final del potencial magnético V_m serán diferentes y diferirán por una cantidad exactamente igual a *NI*. En otras palabras, la Ec. (5.77) dice que

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = V_{m}(P)\big|_{\text{inicio}} - V_{m}(P)\big|_{\text{final}} = NI$$
(5.78)

Si el contorno es recorrido dos veces, por ejemplo, entonces

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2NI$$

o tres veces,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 3NI \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 3NI$$

y así sucesivamente. De modo que la discontinuidad en V_m es igual a la corriente neta enlazada por el contorno. Sólo cuando la región es de conexión simple o cuando la densidad de corriente es cero en todas partes, el potencial se convierte en una función uno a uno de la posición.

5.11 Problemas de Frontera en Magnetostática

En regiones donde no hay corrientes, la densidad de flujo magnético **B** es irrotacional ($\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$) y por tanto es posible expresarla como el gradiente de un potencial escalar magnético V_m :

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla V_m \tag{5.79}$$

donde V_m es el *potencial magnético escalar* y se mide en amperios-vueltas. El signo negativo en la Ec. (5.79) es por convención (similar a la definición de potencial eléctrico escalar) y la permeabilidad del material μ es una constante de proporcionalidad. Suponiendo que ésta es una constante, entonces al sustituir la relación dada por (5.79) en $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se obtiene una ecuación de Laplace en V_m :

$$\nabla^2 V_m = 0 \tag{5.80}$$

y esta ecuación es completamente similar a la ecuación de Laplace para el potencial escalar eléctrico V en una región libre de cargas. Las técnicas para resolver problemas electrostáticos de valores de frontera pueden adaptarse para resolver problemas análogos en magnetostática. Sin embargo, aunque los problemas electrostáticos con fronteras conductoras mantenidas a potenciales fijos ocurren en la práctica con bastante frecuencia, los problemas análogos en magnetostática son de poca importancia práctica. La no linealidad en la relación entre **B** y **H** en materiales ferromagnéticos también complica la solución analítica de problemas con valores de frontera en electrostática.

Ejemplo 22. Una esfera de radio *a* y permeabilidad μ está en un campo magnético que, lejos de la esfera, es uniforme. Se quiere hallar el campo magnético en el interior de la esfera.

Solución: Como toda la región está libre de corrientes y es de conexión simple, el campo magnético puede deducirse a partir de un potencial escalar que satisfaga la ecuación de Laplace. Por tanto, si se hace que el centro de la esfera coincida con el origen de un sistema de coordenadas esférico (Fig. 5.25), el problema es el de hallar una solución al problema con valores de frontera en el cual:

- 1. $\nabla^2 V_m = 0$ en todas partes.
- 2. El potencial V_n es continuo en r = a.
- 3. La componente normal de la densidad de flujo magnético es continua en r = a.
- 4. $V_m = H_0 r \cos \theta$, $r \gg a$, donde H_0 es una constante.



Figura 5.25. Esfera metálica en un campo uniforme.

Siguiendo el mismo procedimiento general usado en el Cap. 4 para resolver el problema de una esfera en un campo eléctrico uniforme, se determina que las soluciones admisibles para el potencial magnético en la esfera y en la región externa son, respectivamente,

$$V_m = A + \frac{B}{r} + Cr\cos\theta + \frac{D}{r^2}\cos\theta$$
$$V_{m0} = A_0 + \frac{B_0}{r} + C_0r\cos\theta + \frac{D_0}{r^2}\cos\theta$$

Por la condición de frontera en $r \gg a$, se obtiene que $A_0 = 0$, $C_0 = H_0$. Para evitar potenciales infinitos en el origen (r = 0), se debe tomar B = D = 0. De manera que

$$V_m = A + Cr\cos\theta$$
$$V_{m0} = \frac{B_0}{r} + H_0 r\cos\theta + \frac{D_0}{r^2}\cos\theta$$

Ahora, la continuidad de la componente normal del vector densidad de flujo magnético en la frontera r = a requiere que

$$\left. \mu \frac{\partial V_m}{\partial r} \right|_{r=a} = \mu_0 \left. \frac{\partial V_{m0}}{\partial r} \right|_{r=a}$$

es decir,

$$\mu(C\cos\theta) = \mu_0 \left(-\frac{B_0}{a^2} + H_0\cos\theta - \frac{2D_0}{a^3}\cos\theta \right)$$

José R. Morón

Por tanto, $B_0 = 0$ y

$$\mu C = \mu_0 \left(H_0 - \frac{2D_0}{a^3} \right)$$
 (5.81)

Por otra parte, la continuidad de V_m en r = a requiere que

$$Aa + Ca\cos\theta = H_0 a\cos\theta + \frac{D_0}{a^2}\cos\theta$$

Por tanto, A = 0 y

 $Ca = H_0 a + \frac{D_0}{a^2}$ (5.82)

La solución simultánea de las Ecs. (5.81) y (5.82) da entonces

$$C = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0, \qquad D_0 = a^3 \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0 + \mu} H_0$$

2...

y por consiguiente

$$V_m = H_0 \frac{5\mu_0}{2\mu_0 + \mu} r \cos \theta$$
$$V_{m0} = H_0 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0 + \mu} \right] r \cos \theta$$

La intensidad del campo magnético en el interior de la esfera es dada por

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m = H_0 \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left(-\cos\theta \,\hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \,\hat{\mathbf{a}}_\theta \right)$$
$$= -H_0 \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \,\hat{\mathbf{a}}_z \qquad r \le a$$

de la cual queda claro que la esfera está magnetizada uniformemente en una sola dirección. Fuera de la esfera,

$$\mathbf{H}_{0} = -\nabla V_{m0} = -H_{0} \left[1 - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{3} \frac{\mu_{0} - \mu}{2\mu_{0} + \mu} \right] \cos \theta \,\hat{\mathbf{a}}_{r} + H_{0} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^{3} \frac{\mu_{0} - \mu}{2\mu_{0} + \mu} \right] \operatorname{sen} \theta \,\hat{\mathbf{a}}_{\theta} \qquad r > a$$

que, para $r \gg a$, se reduce a un valor constante

$$\mathbf{H}_{0} \approx H_{0} \left(-\cos\theta \,\hat{\mathbf{a}}_{r} + \sin\theta \,\hat{\mathbf{a}}_{\theta} \right) = -H_{0} \,\hat{\mathbf{a}}_{z}$$

como se requiere.

Para $\mu >> \mu_0$, el campo se transforma en

$$V_m \approx 0 \qquad \mathbf{H} \approx 0$$
$$V_{m0} \approx H_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] r \cos \theta$$
$$\mathbf{H}_0 \approx -H_0 \left[1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] \cos \theta \, \hat{\mathbf{a}}_r + H_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] \sin \theta \, \hat{\mathbf{a}}_{\theta}$$

En el interior de la esfera la intensidad del campo magnético es esencialmente igual a cero cuando la permeabilidad es alta. Sin embargo, la densidad de flujo magnético en la esfera permanece diferente de cero y finita debido a que

$$\lim_{\mu \to \infty} \mathbf{B} = \lim_{\mu \to \infty} \mu \mathbf{H} = \lim_{\mu \to \infty} H_0 \frac{-3\mu\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \hat{\mathbf{a}}_z = -3\mu_0 H_0 \hat{\mathbf{a}}_z$$

Ejemplo 23. Blindaje Magnético. Ahora se calculará el blindaje (apantallado) magnético proporcionado por un cascarón cilíndrico de radios *a* y *b* y permeabilidad μ.

Solución: Se supone que en una cierta región del espacio existe un campo magnético uniforme H_0 en la dirección -y (es decir, $V_m = H_0 \rho \operatorname{sen} \phi$). En este campo uniforme se introduce un cascarón magnético cilíndrico largo de permeabilidad μ . Se quiere determinar el campo dentro del cascarón, suponiendo que el eje del cilindro coincide con el eje *z* de un sistema de coordenadas cilíndrico (Fig. 5.26).



Figura 5.26. Escudo magnético.

Toda la región está libre de corrientes; por tanto, en ella existe un potencial magnético que satisface la ecuación de Laplace. Las condiciones de frontera son

$$V_{m3} = H_0 r \rho \operatorname{sen} \phi \quad \rho \gg b$$

$$V_{m3} = V_{m2} \quad y \quad \mu_0 \frac{\partial V_{m3}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = \mu \frac{\partial V_{m2}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b}$$

$$V_{m2} = V_{m1} \quad y \quad \mu \frac{\partial V_{m2}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=s} = \mu_0 \frac{\partial V_{m1}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}$$

Usando técnicas semejantes a las utilizadas en el Cap. 4, se obtiene para el campo en la región 1

$$V_{m1} = \frac{4\mu_0 \mu H_0}{\left(\mu + \mu_0\right)^2 - \left(a^2/b^2\right) \left(\mu - \mu_0\right)^2} \rho \operatorname{sen} \phi$$
(5.83)

$$\mathbf{H}_{1} = -\nabla V_{m1} = -\frac{4\mu_{0}\mu H_{0}}{\left(\mu + \mu_{0}\right)^{2} - \left(a^{2}/b^{2}\right)\left(\mu - \mu_{0}\right)^{2}}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(5.84)

Para $\mu >> \mu_0$, la intensidad de campo es

$$\mathbf{H}_1 \approx -\frac{4(\mu_0/\mu)H_0}{1-(a^2/b^2)}\hat{\mathbf{a}}_y$$

la cual tiende a cero para μ creciente.
La discusión anterior junto con los dos ejemplos que siguen, muestra claramente que en el interior de una región libre de corrientes (J = 0), los problemas con valores de fronteras en magnetostática son matemáticamente equivalentes a sus contrapartes electrostáticos. Esta equivalencia se refleja en las formas idénticas de las ecuaciones que describen los dos tipos de campos. En consecuencia, los mismos métodos estudiados en el Cap. 4 para resolver la ecuación de Laplace son aplicables. Si la región no está libre de corrientes, el problema magnetostático de valores de frontera no responde a una solución a través del potencial escalar V_m y se deben utilizar otros recursos, como el potencial vectorial magnético **A** o los mismos vectores del campo.

5.12 Inductancia e Inductores

La Ley de Faraday. Considere un lazo cerrado por el cual fluye una corriente constante. Esta corriente crea un campo magnético que podría calcularse a partir de la geometría del lazo y este campo es proporcional a la magnitud de la corriente. Si se hace que la corriente cambie, el campo también cambia. Pero esto significa que el flujo total que atraviesa el lazo también cambiará y, por la ley de Faraday, se inducirá un voltaje en el lazo. Si el problema se analiza cuantitativamente, se descubrirá que el voltaje auto inducido siempre tiene una polaridad que tiende a oponerse al cambio original en la corriente (ley de Lenz).

La ley de Faraday se puede expresar en la forma siguiente. Alrededor de cualquier trayectoria que se pueda recorrer en el espacio existe una fuerza electromotriz (fem) que el negativo de la tasa de cambio del flujo magnético sobre el área para la cual la trayectoria cerrada es un perímetro.

Ya se ha identificado la fem como la integral de línea del campo eléctrico. Según la ley de Faraday, la integral de línea de **E** no tiene por qué ser cero. Para el flujo magnético definido por la relación

$$\Phi = \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

la ley de Faraday se puede escribir como

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
(5.85)

Cuando el flujo magnético no varía en el tiempo, la integral de E en torno a la trayectoria cerrada y la ley de Faraday se reduce a la relación ya conocida para campos eléctricos estáticos.

El signo negativo en la ley de Faraday es una expresión de una ley enunciada por Heinrich Lenz (físico ruso), la cual establece que los efectos de un cambio en un sistema eléctrico siempre ocurren de una forma tal que tienden a oponerse al cambio.

Considérese ahora el problema que involucra dos lazos o espiras de corriente; en este caso ocurre una secuencia de eventos un poco más complicados pero con el mismo resultado cuantitativo que el problema de un solo lazo. Considérese dos lazos cerrados C_1 y C_2 muy cerca uno del otro, como muestra la Fig. 5.27. Si una corriente I_1 fluye en C_1 , se creará un campo magnético **B**₁. Parte del flujo magnético debido a **B**₁ enlazará a C_2 – es decir, atravesará S_2 , la superficie delimitada por C_2 . Designemos este flujo mutuo por Φ_{12} . Se tiene entonces que

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \tag{5.86}$$



Figura 5.27. Espiras con acoplamiento magnético.

Por la ley de Faraday de inducción electromagnética se sabe que una corriente I_1 variable en el tiempo inducirá una fuerza electromotriz o voltaje en C_2 . El flujo Φ_{12} creado por I_1 obviamente también variará en el tiempo. Por la ley de Biot-Savart, Ec. (5.4), el campo **B**₁ es directamente proporcional a I_1 , de manera que Φ_{12} también lo es y entonces

$$\Phi_{12} = L_{12}I_1 \tag{5.87}$$

donde la constante de proporcionalidad L_{12} se denomina la *inductancia mutua* entre los lazos C_1 y C_2 . En el caso en que C_2 tenga N vueltas, el *enlace de flujo* Λ_{12} debido a Φ_{12} es

$$\Lambda_{12} = N_{12} \Phi_{12} \tag{5.88}$$

y la Ec. (5.87) se generaliza a

$$\Lambda_{12} = L_{12}I_1 \tag{5.89}$$

0

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} \tag{5.90}$$

En el sistema SI, la unidad de la inductancia es el henry (H). La *inductancia mutua entre dos circuitos o lazos es entonces el enlace de flujo en un circuito debido a la corriente en el otro por unidad de esa corriente.*

$$L_{12} = \frac{\text{Enlace de flujo en } C_2 \text{ debido a la corriente en } C_1}{\text{Corriente en } C_1}$$
(5.91)

La definición dada por la Ec. (5.90) o (5.91) aplica solamente en medios lineales.

Al comienzo de esta sección se mencionó que parte del flujo magnético producido por la corriente I_1 atraviesa el propio lazo C_1 . El enlace de flujo total con C_1 producido por I_1 es

$$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_{11} \tag{5.92}$$

Claramente, este enlace es mayor que el enlace $N_1\Phi_{12}$. La *auto-inductancia* o, simplemente, *inductancia* del lazo C_1 se define como el enlace de flujo por unidad de corriente en el propio lazo, es decir,

$$L_{11} = \frac{\text{Enlace de flujo en } C_1 \text{ debido a la corriente en } C_1}{\text{Corriente en } C_1} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1}$$
(5.93)

para un medio lineal.

La inductancia de un lazo o circuito depende de la forma geométrica y del arreglo físico del conductor que constituye el circuito y también de la permeabilidad del medio. En un medio lineal, la auto-inductancia no depende de la corriente en el circuito. De hecho, ella existe sin importar si el circuito está abierto o cerrado o de si está cerca de otro circuito.

Ejemplo 24. Inductancia de una Línea Coaxial. La Fig. 5.28 ilustra una línea de transmisión coaxial formada por dos cilindros conductores de paredes delgadas con radios *a* y *b*. Por el cilindro interno fluye una corriente *I* y por el cilindro externo fluye una corriente de retorno –*I*. Se quiere evaluar la inductancia por unidad de longitud.



Figura 5.28. Una línea coaxial.

Solución: Observe que la geometría no se corresponde precisamente con la de los lazos para los cuales se formuló la definición de inductancia. No obstante, se tratará de extender las definiciones de la Ec. (5.93) en una forma plausible bajo la hipótesis de que su utilidad se confirmará en el futuro.

El campo **B** está en la dirección θ solamente y está dado por **B** = $(\mu_0 I/2\pi\rho)\hat{a}_{\rho}$. El flujo magnético total que enlaza al conductor interno por unidad de longitud de línea es

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

y por tanto la inductancia por unidad de longitud de la línea viene dada por

$$L = \Phi/I = (\mu_0/2\pi)\ln(b/a)$$
 (5.94)

Si el centro del conductor es sólido, entonces el resultado anterior no es válido, ya que entonces la corriente *I* se distribuye uniformemente en la sección transversal de área πa^2 . Para considerar este caso se requiere el concepto de enlaces de flujo parciales. La corriente que fluye en la porción del conductor interno entre 0 y ρ es

$$\frac{\pi\rho^2}{\pi a^2}I = \frac{\rho^2}{a^2}I$$

El campo en la línea coaxial es dado por

$$B_{\theta} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}, & 0 < \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, & a < \rho < b \end{cases}$$

Puesto que el campo tiene simetría circular, cada elemento de corriente en la región anular entre ρ y ρ + $d\rho$ está enlazado por el mismo flujo El valor del flujo magnético que enlaza esta corriente es

$$d\Phi' = \int_{\rho}^{b} B_{\theta} d\rho = \frac{\mu_{0}I}{2\pi a^{2}} \int_{\rho}^{a} \rho \, d\rho + \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{d\rho}{\rho}$$
$$= \frac{\mu_{0}I}{4\pi a^{2}} (a^{2} - r^{2}) + \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

En el cálculo anterior de la inductancia para el conductor de paredes delgadas, el flujo enlazaba toda la corriente *I*. Sin embargo, en el interior del conductor sólido se tiene flujo que sólo enlaza parte de la corriente. Ahora bien, como el flujo $d\Phi'$ no enlaza toda la corriente *I*, parece lógico que se debiera reducir su contribución al enlace de flujo total, para los propósitos del cálculo de inductancia, por la fracción entre la corriente real enlazada y la corriente total. Como la corriente enlazada por $d\Phi'$ es la corriente en la región anular de área $2\pi\rho d\rho$, el factor de reducción es $2\pi\rho d\rho/\pi a^2$ y el enlace de flujo equivalente $d\Phi$ es dado entonces por

$$d\Phi = \frac{2\pi\rho\,d\rho}{\pi a^2}d\Phi'$$

y por tanto

$$d\Phi = \frac{2\pi\rho I \, d\rho}{\pi a^2 I} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \left(a^2 - \rho^2 \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right]$$

El enlace de flujo total es

$$\Phi = \int_{a}^{b} d\Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \left(\int_{0}^{a} \frac{a^2 \rho - \rho^3}{2a^2} d\rho + \ln \frac{b}{a} \int_{0}^{a} \rho \, d\rho \right) = \frac{\mu_0 I}{8\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Por tanto, la inductancia por unidad de longitud es

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$
(5.95)

El primer término, $\mu_0/8\pi$, se conoce como la inductancia interna del conductor central y el segundo como la inductancia externa, ya que corresponde a los enlaces de flujo externos.

Fórmulas de Neumann. Considérese dos alambres muy delgados doblados en lazos y muy cercanos entre si, como los de la Fig. 5.27. Suponga que por C_1 fluye una corriente I_1 . Como se supone que el alambre es muy delgado, el valor calculado para **B**₁ no estará muy errado si se supone que la corriente está concentrado en un filamento infinitamente delgado a lo largo del centro del conductor, siempre que se consideren sólo puntos del campo externos al alambre. Bajo estas consideraciones, el campo **B**₁ producido por I_1 es dado por

$$\mathbf{B}_{1} = \frac{\mu_{0}I_{1}}{4\pi} \oint_{C_{1}} \frac{d\mathbf{l}_{1} \times \hat{\mathbf{a}}_{R}}{R^{2}} = \frac{\mu_{0}I_{1}}{4\pi} \oint_{C_{1}} \left[\nabla \left(\frac{1}{R}\right) \right] \times d\mathbf{l}_{1}$$
(5.96)

ya que $\nabla(1/R) = -\hat{\mathbf{a}}_R/R^2$. La integración es sobre las coordenadas de la fuente; así que se tiene que

$$\nabla \mathbf{x} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \mathbf{x} d\mathbf{l}_1$$

puesto que dl_1 es un vector constante en lo que respecta al operador ∇ . Entonces, en lugar de la Ec. (5.96) se puede escribir que

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \nabla \mathbf{x} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} \mathbf{a}$$

y por tanto el flujo que enlaza el circuito C₂ es

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{S_2} \oint_{C_1} \nabla \mathbf{x} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \int_{S_2} \nabla \mathbf{x} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} \cdot d\mathbf{S}$$

al cambiar el orden de integración. Ahora se aplica el teorema de Stokes y la integral de superficie se convierte en una integral de línea en torno a C_2 para obtener

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

Por la definición de la inductancia mutua dada en la Ec. (5.90), se obtiene la fórmula de Neumann:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$
(5.97)

Como en la Ec. (5.97), *R* es la distancia entre un punto en C_1 y un punto en C_2 , la integral como un todo es simétrica; es decir, los subíndices 1 y 2 pueden intercambiarse sin influir en el resultado final. Esto demuestra la relación de reciprocidad para las inductancias mutuas:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$
(5.98)

Ejemplo 25. Determine la inductancia mutua entre un lazo conductor triangular y un alambre recto y muy largo como se muestra en la Fig. 5.29.



Figura 5.29. Configuración para el Ejemplo 23.

Solución: Designe el lazo triangular como el circuito 1 y el alambre largo como el circuito 2. Si se supone una corriente I_1 en el lazo triangular, la tarea para hallar la densidad de flujo creada por esta corriente se vuelve bastante complicada. En consecuencia, es difícil hallar la inductancia mutua utilizando la Ec. (5.90). Sin embargo, mediante la aplicación de la ley circuital de Ampere se puede escribir la expresión para **B**₂, el campo producido por una corriente I_2 en el alambre recto y largo:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_\phi \tag{5.99}$$

El enlace de flujo $\Lambda_{21} = \Phi_{21}$ es entonces

$$\Lambda_{21} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} \tag{5.100}$$

donde

$$d\mathbf{S} = z \, d\rho \, \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \tag{5.101}$$

(5.103)

y

$$z = -[\rho - (d+b)]\tan 60^\circ = -\sqrt{3}[\rho - (d+b)]$$
(5.102)

Sustituyendo ahora las Ecs. (5.99), (5.101) y (5.102) en la Ec. (5.100), se obtiene

$$\Lambda_{21} = -\frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I_2}{2\pi} \int_{d}^{d+b} \frac{1}{\rho} [\rho - (d+b)] d\rho$$

= $\frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I_2}{2\pi} \Big[(d+b)\ln\Big(1 + \frac{b}{d}\Big) - b \Big]$

y la inductancia mutua es

$$L_{21} = \frac{I_{21}}{I_2} = \frac{I_2 I_0}{2\pi} \left[(d+b) \ln \left(1 + \frac{1}{d}\right) - b \right]$$

5.13 Energía Magnética

Energía en Inductores. Una distribución de corriente estacionaria tiene energía potencial representada por el trabajo realizado para establecer la distribución contra la reacción de las fuerzas de inducción. La presencia de estas fuerzas de inducción es, por supuesto, dictada por la ley de Faraday, ya que cualquier cambio en la distribución de corriente es acompañado por un cambio correspondiente en el campo magnético.

Considérese, por ejemplo, un solo inductor ideal aislado, el cual en su estado final mantiene una corriente total *I* enlazada por un flujo Φ . Entonces, si en alguna etapa del establecimiento de la configuración, la corriente es λI , el flujo correspondiente es $\lambda \Phi$ y el ritmo de cambio del flujo es $\Phi d\lambda/dt$. La tasa con la cual se realiza trabajo contra las fuerzas de inducción es entonces dada por

$$\lambda I \Phi \frac{d\lambda}{dt}$$

de manera que el trabajo total realizado para llevar a λ de 0 a 1 es

$$W_m = \frac{1}{2}I\Phi \tag{5.104}$$

o en las formas alternas

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$
(5.105)

у

$$W_m = \frac{\Phi^2}{2L} \tag{5.106}$$

donde se omitieron los subíndices en las inductancias propias.

Para un sistema consistente de *n* inductores ideales que en su etapa final conducen corrientes I_1 , I_2 , ..., I_n enlazadas por flujos Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_n , respectivamente, un argumento semejante al anterior conduce al resultado

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k$$
(5.107)

Aquí la energía propia de cada inductor está, por supuesto, incluida, en que una contribución al flujo Φ_i a través del *i*-ésimo inductor proviene del campo generado por I_i .

Evidentemente, la Ec. (5.107) puede expresarse en términos de las corrientes solamente, en la forma correspondiente a la Ec. (5.105). El resultado es

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^n L_{jk} I_j I_k \tag{5.108}$$

La Energía como una Integral del Campo. La Ec. (5.107) puede generalizarse para determinar la energía magnética de una distribución continua de corriente en el interior de un volumen. Un solo lazo de corriente puede considerarse como si estuviese compuesto por un gran número de filamentos elementales de corriente contiguos de trayectorias cerradas C_{k_r} cada uno con una corriente ΔI_k que fluye a través de una sección transversal de área $\Delta a'_k$ y enlazada por un flujo Φ_k :

$$\Phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n dS'_k = \oint_{C_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}'_k$$
(5.109)

donde S_k es la superficie acotada por C_k . Sustituyendo la Ec. (5.109) en la Ec. (5.107), se obtiene

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta I_k \oint_{C_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}'_k$$
(5.110)

Ahora se tiene que

$$\Delta I_k d\mathbf{l}'_k = J(\Delta a'_k) d\mathbf{l}'_k = \mathbf{J} \Delta v'_k$$

Conforme $n \to \infty$, $\Delta v'_k$ se convierte en dv' y es posible escribir la sumatoria en la Ec. (5.110) como una integral; es decir,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv' \tag{5.111}$$

donde v' es el volumen del lazo o el medio lineal en el cual existe J. Este volumen puede extenderse para incluir todo el espacio, ya que la inclusión de una región donde J = 0 no cambia a W_m . La Ec. (5.111) debe compararse con la ecuación obtenida para la energía eléctrica W_e en los Capítulos 2 y 3. José R. Morón

Con frecuencia es deseable expresar la energía magnética en función de las cantidades del campo **B** y **H** en vez de la densidad de corriente **J** y del potencial vectorial **S**. Usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

se tiene que

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$$

0

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \tag{5.112}$$

Sustituyendo la Ec. (5.112) en la Ec. (5.111), se obtiene

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv' - \frac{1}{2} \oint_{S'} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_n dv'$$
(5.113)

Si v' se toma lo suficientemente grande, los puntos en su superficie S' estarán muy lejos de las corrientes. En esos puntos lejanos, la contribución a la integral de superficie en la Ec. (5.113) tiende a cero ya que $|\mathbf{A}|$ decrece como 1/R y $|\mathbf{H}|$ como $1/R^2$. Así que la magnitud de $(\mathbf{A} \times \mathbf{H})$ decrece como $1/R^3$, en tanto que al mismo tiempo la superficie S' se incrementa como R^2 . Cuando R tiende a infinito, la integral de superficie se anula. Entonces se tiene que

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv' \tag{5.114}$$

Puesto que $H = B/\mu$, esta ecuación puede escribirse en dos formas alternas como

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \frac{B^2}{\mu} dv'$$
(5.115)

у

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \mu H^2 dv'$$
 (5.116)

Si ahora se define una *densidad de energía magnética*, w_m , de forma que su integral de volumen sea igual a la energía magnética total

$$W_m = \int_{v'} w_m dv' \tag{5.117}$$

entonces w_m se puede escribir en tres formas diferentes:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$
$$= \frac{B^2}{2\mu}$$
$$= \frac{1}{2} \mu H^2$$
(5.118)

Si se usa la Ec. (5.105), con frecuencia se puede determinar la inductancia propia más fácilmente a partir de la energía magnética almacenada calculada en términos de \mathbf{B} y/o \mathbf{H} que a partir del enlace de flujo.

Ejemplo 26. Un cable coaxial (Fig. 5.30) está formado por un núcleo conductor macizo de radio *a* y una cubierta metálica de radio *b* (a < b). Por el cilindro interno circula una corriente total *I* distribuida uniformemente por todo el volumen, en tanto que por la cubierta externa circula una corriente -I. Hállese el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud del cable coaxial a partir de la energía almacenada por unidad de longitud. El dieléctrico entre los metales es ideal.



Figura 5.30

Solución: La energía almacenada viene dada por un lado por

$$W_m = \frac{1}{2} \int_c \frac{B^2}{\mu_0} dv$$

y, por otro, por

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

Para el caso actual, por el conductor interno circula una corriente *I* distribuida uniformemente y la densidad de corriente correspondiente es

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \,\hat{\mathbf{a}}_z$$

la cual retorna por el conductor externo y puede ser modelada por una densidad superficial de valor

$$\mathbf{K} = -\frac{I}{2\pi b} \hat{\mathbf{a}}_x$$

El campo magnético debido a estas corrientes puede determinarse a partir de la ley de Ampere y se obtiene que

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} & a < \rho < b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$$

Para calcular la energía almacenada, se considera un volumen del cable de longitud *h*. La integral correspondiente debe dividirse en dos partes, una correspondiente al conductor central y la otra al dieléctrico:

$$W_{m} = \int_{0}^{h} \int_{0}^{2\pi} d\phi dz \Biggl(\int_{0}^{a} \frac{B_{\text{int}}^{2}}{2\mu_{0}} \rho d\rho + \int_{0}^{b} \frac{B_{\text{ext}}^{2}}{2\mu_{0}} \rho d\rho \Biggr)$$
$$= \int_{0}^{h} \int_{0}^{2\pi} d\phi dz \Biggl(\int_{0}^{a} \frac{\mu_{0}I^{2}\rho^{2}}{8\pi^{2}a^{4}} \rho d\rho + \int_{0}^{b} \frac{\mu_{0}I^{2}}{8\pi^{2}\rho^{2}} \rho d\rho \Biggr)$$
$$= \frac{\mu_{0}I^{2}h}{4\pi} \Biggl(\int_{0}^{a} \frac{\rho^{3}}{a^{4}} d\rho + \int_{0}^{b} \frac{d\rho}{\rho} \Biggr)$$
$$= \frac{\mu_{0}I^{2}h}{4\pi} \Biggl(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \Biggr)$$

Igualando esta cantidad a $\frac{1}{2}LI^2$, se obtiene el coeficiente de autoinductancia por unidad de longitud como

$$L' = \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente en el Ejemplo 22.

5.1 Aplique la ley de Biot-Savart y demuestre que la intensidad de campo magnético de un filamento de corriente recto de longitud *l* en un punto *P* (Fig. 5.31) es





5.2 Un filamento de corriente tiene la forma de un polígono plano uniforme de *n* lados (Fig. 5.32). Use el resultado del Problema 5.1 y demuestre que la intensidad del campo magnético en el centro *O* es dado por

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{a}}_z \frac{nI}{2\pi a} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

donde *I* es la corriente. Use esta expresión para determinar la intensidad de campo magnético en el centro de un filamento de corriente circular.



Figura 5.32

5.3 Un filamento de corriente rectangular tiene su centro en el eje *x* a una distancia *x* del origen (Fig. 5.33). El plano del rectángulo es paralelo al plano *yz* y la corriente es *I*. Use el resultado del Problema 5.1 y demuestre que para un punto del campo en *O*,

$$B_{x} = \frac{\mu_{0}Iab}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^{2} + (a/2)^{2} + (b/2)^{2}}} \left[\frac{1}{x^{2} + (b/2)^{2}} + \frac{1}{x^{2} + (a/2)^{2}} \right]$$



Figura 5.33

5.4 En los conductores cilíndricos circulares interno y externo de la Fig. 5.34 se tienen corrientes distribuidas uniformemente. Use la ley de Ampere para demostrar que para $b \le r \le c$, el campo es dado por



Figura 5.34

5.5 Calcular el flujo magnético total Φ_m que cruza el plano z = 0 en coordenadas cilíndricas para $\rho \le 5 \times 10^{-2}$ m si

$$\mathbf{B} = \frac{0.2}{\rho} \operatorname{sen}^2 \phi \, \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\mathrm{T})$$

Resp. 3.14×10^{-2} Wb

- **5.6** Un disco circular de radio *b* y espesor *t* conduce una corriente en una dirección circular en torno a su centro. Un sistema de coordenadas cilíndrico tiene el origen en el centro del disco y el eje *z* coincide con el eje de simetría del disco. La densidad de corriente en el disco es $\mathbf{J} = k\rho \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \text{ A/m}^2$, donde *k* es una constante real mayor que cero. Deduzca una fórmula para la intensidad del campo magnético **H** en el centro del disco, suponiendo que el espesor *t* es muy pequeño comparado con *b*.
- **5.7** Una cinta conductora delgada y muy larga de ancho *w* está en el plano *yz* entre $x = \pm w/2$. En la cinta fluye una corriente de superficie $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{a}}_z J_{s0}$. Halle la densidad de flujo magnético en un punto arbitrario fuera de la cinta.
- **5.8** Una esfera conductora de radio *a* se mueve con una velocidad constante $v\hat{a}_x$ a través de un campo magnético uniforme **B** dirigido a lo largo del eje *y*. Demuestre que alrededor de la esfera existe un campo eléctrico tipo dipolo dado por

$$\mathbf{E} = \frac{vBa^3}{r^3} (2\cos\theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_{\theta})$$

5.9 Una corriente *I* fluye por un alambre largo con un doblez semicircular de radio *b* como el de la Fig. 5.35. Determine la densidad de flujo magnético en el punto central *P* de la curva.



5.10 Dado que el potencial magnético vectorial en el interior de un conductor cilíndrico de radio *a* es

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I \rho}{4\pi a^2} \hat{\mathbf{a}}_z$$

determínese el campo H correspondiente.

- **5.11** Una línea de transmisión trifásica consiste de tres conductores que están soportados en los puntos *A*, *B* y *C* y forman un triángulo equilátero. En un instante, los conductores *A* y *B* conducen una corriente de 75 A en tanto que el conductor *C* conduce una corriente de retorno de 150 A. Halle la fuerza por metro sobre el conductor *C* en ese instante.
- **5.12** Un tubo de longitud infinita de radio interno *a* y radio externo *b* está hecho de material magnético conductor. El tubo conduce una corriente total *I* y está colocado a lo largo del eje *z*. Si se expone a un campo magnético constante $B_0\hat{\mathbf{a}}_0$, determine la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el tubo.
- **5.13** Un conductor recto y muy largo con una corriente *I* está contenido en el plano de un conductor triangular, el cual conduce una corriente *I'*, de manera que un lado del triángulo es paralelo al conductor recto, como muestra la Fig. 5.36. Determine la fuerza mutua entre los dos conductores.
- 5.14 Exprese el campo H de una espira de corriente si el origen de coordenadas se escoge como en la Fig. 5.37.





Figura 5.37

- **5.15** Calcule la fuerza por unidad de longitud sobre cada uno de tres conductores de longitud infinita, con separación entre ellos de d (m) y por los cuales fluye una corriente I (A) en la misma dirección. Especifique la dirección de la fuerza.
- **5.16** Para el pequeño lazo rectangular con lados *a* y *b* que conduce una corriente *I*, mostrado en la Fig. 5.38:
 - a) Halle el potencial magnético vectorial **A** en un punto lejano P. Demuestre que puede ponerse en la forma de la Ec. (5.54).
 - b) Determine la densidad de flujo magnético **B** y demuestre que es la misma que la dada en la Ec. (5.55),
- **5.17** Verifíquese la Ec. (5.83).





5.18 Un campo magnético de magnitud H_1 incide sobre la superficie plana que separa dos medios diferentes y linealmente permeables formando un ángulo θ_1 con la normal (Fig. 5.39). No hay corriente de superficie en la interna. ¿Cuáles son la magnitud y ángulo del campo magnético en la región 2?



Figura 5.39

- **5.19** Una lámina muy grande de un material de espesor *d* tiene una posición perpendicular a un campo magnético uniforme $\mathbf{H}_0 = \hat{\mathbf{a}}_z H_0$. Ignorando los efectos en los bordes, determine la intensidad de campo magnético en la lámina:
 - a) Si el material de la lámina tiene permeabilidad µ,
 - b) Si la lámina es un imán permanente que tiene un vector de magnetización $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{a}}_z M_i$.
- 5.20 Determine la inductancia mutua para la configuración mostrada en la Fig. 5.36.
- 5.21 Determine la inductancia mutua para las configuraciones mostradas en la Fig. 5.40.
- **5.22** Dos lazos circulares de radios r_1 y r_2 conducen corriente I_1 e I_2 . Los lazos están en planos paralelos y separados por una distancia grande *R*. Usando una aproximación de dipolo para el campo magnético establecido por uno de los lazos en la posición del otro lazo, obtenga una expresión para la inductancia mutua entre los dos lazos.



Figura 5.40

José R. Morón

Capítulo 6

Principios Generales y las Ecuaciones de Maxwell

En los capítulos anteriores se estudiaron los campos eléctricos y magnéticos. Se debe señalar que estos estudios son de gran utilidad en la predicción de efectos en muchos problemas de variación con el tiempo, pero hay efectos dinámicos importantes que no son descritos por relaciones estáticas. Un ejemplo es la generación de campos eléctricos por campos magnéticos variables en el tiempo (ley de Faraday) o el efecto complementario por el cual campos magnéticos son generados por campos eléctricos variables en el tiempo.

En este capítulo se estudiarán las propiedades básicas que definen los principios que gobiernan la teoría de los campos electromagnéticos y se extenderán las ecuaciones que se ha estudiado hasta ahora a las ecuaciones más generales para el campo electromagnético, las *ecuaciones de Maxwell*. Se repetirán muchos conceptos dados en los capítulos anteriores para aclarar más las explicaciones de esos principios. Existe una gran cantidad de evidencia experimental que demuestra la validez general de las ecuaciones de Maxwell. En este capítulo, con base en una serie de experimentos sencillos, se postularán las ecuaciones asociándolas con los resultados experimentales. Se debe señalar que algunos de esos experimentos son hipotéticos y sólo se exponen para dar una mayor claridad a la teoría. Sin embargo, también se debe mencionar que algunos de ellos son muy parecidos, y en algunos casos idénticos, a los realizados por los investigadores originales para deducir sus resultados. También se introduce la ley de fuerzas de Lorentz y su función como integradora de la mecánica y el campo electromagnético. Hasta ahora se han estudiado campos eléctricos y magnéticos estáticos y entre ellos no se tenía ningún acoplamiento. Sin embargo, cuando los campos varían en el tiempo, los campos se acoplan y se producen ondas electromagnéticas. En esta parte del estudio es cuando entran en juego completamente las ecuaciones de Maxwell.

6.1 La Intensidad del Campo Eléctrico

Como se mencionó en el Capítulo 2, la carga es una *cantidad fundamental* de los cuerpos en la naturaleza; es una primitiva, igual que lo son la masa, la longitud y el tiempo. La carga no puede definirse convenientemente en función de esas tres cantidades ya que ella se manifiesta por sí misma y sólo como la causa de efectos cuyo origen está más allá de la mecánica. Así, por ejemplo, cargas en reposo y/o en movimiento ejercen fuerzas sobre otras cargas en reposo y/o en movimiento; estas fuerzas no son proporcionales a la masa, por lo que no son gravitacionales. Estos nuevos tipos de fuerzas se denominan *fuerzas electromagnéticas* y los nuevos campos se denominan *campos electromagnéticos*. Como ya se sabe, la evidencia experimental indica la existencia de *dos clases* de cargas: *positivas* y *negativas*. Cuantitativamente, la carga se encuentra en múltiplos enteros de una carga elemental y esta carga elemental que es la más pequeña conocida es la que posee un electrón.

Antes de entrar a considerar los experimentos relacionados con lo que se denominará campo eléctrico, se debe repasar el concepto de *carga eléctrica puntual*, ya introducido en el Cap. 1. Este concepto bastante sencillo, es matemáticamente conveniente y, además, posibilita el desarrollo de una teoría macroscópica del electromagnetismo basada en el movimiento de las cargas eléctricas. Sin embargo, se debe señalar que la casi totalidad de los campos vectoriales físicos surgen de fuentes que tienen una distribución macroscópica continua

en el espacio, es decir, *no provienen de cargas puntuales*. En la exposición se observará que mediante una superposición apropiada de fuentes puntuales se puede representar cualquier distribución arbitraria.

Una partícula cargada siempre tiene una distribución de carga en su volumen. Cuando una segunda partícula cargada interactúa con la primera, se establecen ciertas relaciones entre ellas que alteran la distribución de carga en las partículas. Los cambios en la distribución de carga se hacen menores a medida que las dimensiones de las partículas se hacen más y más pequeñas. En el límite, cuando las dimensiones se hacen muy pequeñas en comparación con otras dimensiones macroscópicas, se tiene una carga finita en una región muy pequeña y se tiene entonces lo que se considera una *carga eléctrica puntual*. Normalmente, el volumen de la partícula se toma como cero, pero siempre se debe tener en mente que en realidad es un volumen de dimensiones ínfimas, el cual contiene una distribución de carga de magnitud arbitraria. Obviamente, la frontera entre el dominio de los fenómenos de gran escala y los microscópicos es arbitraria.

La conveniencia del concepto de carga puntual reside en que no hay que preocuparse por los cambios que se puedan originar en la distribución de carga en el interior de la partícula cuando hay otras cargas en sus alrededores.

6.1.1 Experimento 1

Habiendo definido lo que se considerará una carga puntual, se pasará ahora a describir un primer experimento. Hace mucho tiempo se determinó experimentalmente que cualquier objeto que posea una carga eléctrica establece un campo de fuerzas a su alrededor. Este campo de fuerzas se hace evidente si una carga puntual exploradora se coloca en algún punto de la región cercana al cuerpo cargado. En la Fig. 6.1 se muestra lo que podría constituir el montaje del experimento en un laboratorio. Se tiene un cuerpo de forma y volumen arbitrarios, el cual ha sido cargado previamente con una cantidad de carga q_0 . Si la carga puntual exploratoria se coloca en el punto 1, por ejemplo, sobre ella actuará una fuerza F_1 ; si la carga se coloca en los puntos 2 y 3, sobre ella se ejercerán fuerzas F_2 y F_3 . Si se cambia la magnitud de la carga puntual exploratoria y se coloca en los mismos puntos, se observará que la magnitud de la fuerza cambia en la misma proporción en la cual cambió su magnitud, pero la dirección y el sentido de las fuerzas no cambian. Si en lugar de cambiar la magnitud de la carga se cambia su signo y se le coloca de nuevo en los mismos puntos, se observa que la magnitud y la dirección de las fuerzas permanecen iguales pero cambia el sentido. Los resultados de este experimento posibilitan la definición de un campo eléctrico.



Figura 6.1. Campo alrededor de una carga eléctrica

Por definición, la *intensidad del campo eléctrico* en cualquier punto es igual en magnitud, dirección y sentido a la fuerza ejercida sobre una carga puntual exploradora de magnitud unitaria y la cual está en reposo en ese punto, es decir,

$$\mathbf{F} = kq\mathbf{E} \tag{6.1}$$

donde **F** es la fuerza sobre la carga puntual exploradora q y **E** es la intensidad del campo eléctrico. Obsérvese que la Ec. (6.1) no está limitada a un punto en particular sino que es aplicable en todas partes. La cantidad k es sólo un factor de proporcionalidad y su valor dependerá del sistema de unidades seleccionado. En todos los sistemas que se utilizados en este texto su valor es 1, de forma que

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{6.2}$$

es la definición del campo eléctrico. En el Apéndice se estudiará en detalle las unidades de mayor uso.

Es conveniente considerar al campo **E** como si existiese independientemente de si se usa o no una carga puntual exploratoria q para determinar su existencia. Esta consideración es de gran importancia pues permite remover a q y considerar solamente a q_0 y su campo asociado. Como se verá en un capítulo posterior en relación con la discusión de ondas electromagnéticas, la existencia de un campo eléctrico en una región del espacio, independientemente del medio que se utilice para medirlo, es un concepto diferente de lo que anteriormente se llamó la teoría de acción a distancia, en la cual se suponía que la distribución de carga q_0 actúa directamente a través del espacio sobre la carga puntual q produciendo la fuerza que se observa. El concepto de un campo es el siguiente: la distribución de carga q_0 establece un campo en todo el espacio. La fuerza ejercida sobre la carga puntual exploradora q, *la comunica el campo*. En otras palabras, q_0 ocasiona el establecimiento de un campo; éste a su vez tiene la propiedad de hacer que se ejerza una fuerza sobre una carga presente en el campo. *La fuerza depende sólo de la intensidad del campo y no de su origen*; es decir, el campo tiene una existencia independiente y no depende ni siquiera de la carga q para su detección. En el caso actual, para cargas en reposo, no es posible diferenciar el concepto de campo del concepto de acción a distancia en el cual se suponía que la acción eléctrica aparecía instantáneamente en todos los puntos del espacio, no importa la distancia a que estuviesen.

Otro punto que se debe señalar es el proceso de detección del campo eléctrico con la carga exploratoria; se supone que el proceso no afecta en nada al campo ni a la fuente que lo produce. Es por ello que otra forma de definir el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{\Delta q} \tag{6.3}$$

En la Ec. (6.3) se introduce el concepto de límite para asegurar que la carga exploratoria no perturba el campo. Haciendo que Δq tienda a cero, el valor calculado mediante esta ecuación debe tender al valor de la intensidad del campo antes de introducir la carga exploradora. Sin embargo, este proceso límite es una ficción puesto que es imposible dividir la carga indefinidamente. En la práctica, similar a lo que se definió anteriormente para cargas puntuales, basta con que la magnitud de la carga exploradora tenga una magnitud mucho menor que las de las cargas que producen el campo, de manera que su introducción en él no lo perturbe apreciablemente.

Supóngase ahora que se tienen *n* cargas eléctricas puntuales q_k distribuidas en el espacio libre y que \mathbf{E}_k es la intensidad del campo eléctrico en un punto *P* del espacio producida por la carga q_k . La intensidad del campo eléctrico total \mathbf{E} en *P* debida a todas las cargas q_k será entonces la suma vectorial (el campo se definió como un vector) de las intensidades producidas por cada una de las cargas, esto es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

= $\sum_{k=1}^n \mathbf{E}_k$ (6.4)

Se debe señalar que el resultado anterior se obtiene observando que $-E_k$ es la fuerza mecánica requerida para mantener en P a una carga puntual unitaria de prueba cuando está sometida a la influencia del campo producido por la carga puntual q_k y -E es entonces la fuerza mecánica requerida para mantener en P a la carga puntual exploratoria sometida a la influencia de todas las cargas. El campo eléctrico producido por una colección de cargas es simplemente la suma vectorial de cada una de las cargas tomada aisladamente. En otras palabras, los campos eléctricos se pueden *superponer*.

6.2 La Corriente Eléctrica

Cuando dos partículas cargadas se mueven con velocidades relativas diferentes con respecto a un sistema de referencia común, entre ellas existe una fuerza que es diferente a la fuerza descrita por la intensidad del campo eléctrico. Para entender la naturaleza de esta fuerza, se describirán algunos experimentos y se recurrirá parcialmente al conocimiento obtenido en los cursos elementales de Física e Ingeniería Eléctrica sobre la teoría de los circuitos eléctricos.

260

Normalmente, en la ausencia de factores externos de perturbación, el movimiento microscópico de partículas cargadas en un material es rápido y, en cierto sentido, aleatorio. Sin embargo, la introducción de un campo eléctrico hace que las cargas eléctricas en el material, en promedio, se muevan con un ordenamiento regular siguiendo la dirección general del campo eléctrico; este movimiento constituye una *corriente eléctrica*. En un medio conductor, los electrones tienen libertad para moverse bajo la influencia de un campo eléctrico externo. Si no existiese un mecanismo de oposición al movimiento, los electrones se acelerarían y adquirirían grandes velocidades. Sin embargo, las imperfecciones y las vibraciones térmicas de la estructura cristalina de un conductor tienden a dispersar los electrones. Esta dispersión se manifiesta macroscópicamente a través de una velocidad promedio finita adquirida por los electrones.

En la Sección 6.1 (y en el Capitulo 2) se utilizó el concepto de carga eléctrica puntual para definir la intensidad de un campo eléctrico E. Supóngase ahora que en el interior de un cierto volumen finito se tiene un gran número de cargas puntuales. Si se supone que la carga contenida dentro de un elemento de volumen Δv es Δq , entonces la *densidad de carga de volumen* ρ_v se definirá mediante la relación

$$\Delta q = \rho_v \Delta v \tag{6.5}$$

Es decir, cuando se habla de la densidad de carga en un punto, el significado es la carga promedio por unidad de volumen en un entorno de ese punto. En un sentido estricto, la Ec. (6.5) no define una función continua de la posición puesto que Δv no puede tender a cero sin límite (como ya se mencionó, la carga no puede ser dividida indefinidamente). A pesar de ello, se supondrá que ρ_v puede representarse mediante una función de las coordenadas y del tiempo, la cual en los puntos ordinarios es continua y posee derivadas continuas. Claramente, la carga total en un volumen *v* es

$$q = \int_{v} \rho_{v} \, dv \tag{6.6}$$

El valor total de la carga en v obtenido mediante la Ec.(6.6) diferirá entonces de la carga real en ese volumen en una cantidad microscópica como máximo.

Cualquier movimiento ordenado de cargas constituye una corriente. Experimentalmente se determina que en un medio conductor la corriente y el campo eléctrico están relacionados por la expresión

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \quad (\text{Ley de Ohm}) \tag{6.7}$$

En esta ecuación, σ es la *conductividad* del medio (un conductor presenta *resistencia* al paso de la corriente) y J es la densidad de corriente. De la ecuación se observa que una distribución de corriente está caracterizada por un campo vectorial que especifica en todo punto tanto la intensidad del flujo como su dirección. Igual que en el estudio del movimiento de fluidos, es conveniente imaginarse líneas de flujo trazadas en la distribución y tangentes en todas partes a la dirección del flujo. Considérese ahora una superficie que es ortogonal a un sistema de líneas de flujo. La *densidad de corriente* en cualquier punto de esta superficie se define entonces como un vector J dirigido a lo largo de la línea de flujo que pasa por el punto y que es igual en magnitud a la carga que cruza un área unitaria de la superficie por unidad de tiempo. Observe que para el caso particular de un conductor indicado por la Ec. (6.7), la densidad de corriente J tiene igual dirección y sentido que el campo eléctrico que la genera.

Ahora bien, la corriente *I* que atraviesa cualquier superficie es igual a la tasa temporal con la cual la carga cruza esa superficie. Si $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria positiva a un elemento ΔS de la superficie *S*, entonces

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \,\Delta S \tag{6.8}$$

Como ΔS es un elemento macroscópico de área, la Ec. (6.8) no define con rigor matemático a la densidad de corriente como una función continua de la posición, pero de nuevo la distribución se puede representar por una función de este tipo sin cometer un error apreciable. Entonces, para calcular el flujo de corriente total a través de una superficie, se debe evaluar la siguiente integral de superficie:

$$I = \int_{S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.9}$$

Como la carga eléctrica puede ser positiva o negativa, se debe adoptar una convención sobre lo que constituye una corriente positiva. Si el flujo que atraviesa un elemento de área consiste de cargas positivas cuyos vectores de velocidad forman un ángulo de menos de 90° con la normal positiva $\hat{\mathbf{n}}$, se dice que la corriente es positiva. Si el ángulo es mayor que 90°, la corriente se dice negativa. Igualmente, si el ángulo es menor que 90° pero las cargas son negativas, la corriente que pasa por el elemento es negativa.

Supóngase ahora que la superficie *S* de la Ec. (6.9) es cerrada, delimitando así un volumen *v*. Sea ρ_v la densidad de carga. Entonces, la carga total dentro del volumen *V* es

$$q = \int_{v} \rho_{v} \, dv \tag{6.10}$$

(6.11)

Si la carga en el interior del volumen v varía con el tiempo, entonces debe existir una densidad de corriente J, y la corriente que sale de V (Fig. 6.2) está dada por



Figura 6.2. Experimento para establecer la ecuación de continuidad

En el capítulo se seguirá usando la convención usual en la cual la *normal positiva a una superficie cerrada va desde adentro hacia afuera.* En virtud de la definición de la corriente como el flujo de carga a través de una superficie, se deduce que la integral de superficie de la componente normal de J en la superficie S debe medir la pérdida de carga en la región dentro de S. No hay evidencia experimental que indique que bajo condiciones ordinarias la carga pueda ser creada o destruida en cantidades macroscópicas. Por tanto, lo anterior se puede expresar como

$$\oint_{S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\frac{d}{dt} \int_{v} \rho_{v} dv \tag{6.12}$$

donde *v* es el volumen encerrado por *S*. El lado izquierdo de la Ec. (6.12) da el flujo neto de corriente que sale desde *S*, mientras que el lado derecho representa la tasa temporal neta de pérdida de carga desde el volumen *V*, es decir, la Ec. (6.12) es una relación que expresa la *conservación de la carga*. El flujo de carga a través de la superficie puede originarse en tres formas. La superficie *S* puede estar fija en el espacio y la densidad de carga ρ_v puede ser función del tiempo y de la posición; la densidad de carga puede ser invariable en el tiempo mientras que la superficie *S* cambia de alguna manera prescrita, o ρ_v y *S* cambian en el tiempo. En estos dos últimos casos, la integral en el lado derecho de la Ec. (6.12) es una función del tiempo a causa de ρ_v y de límites de integración variables. Sin embargo, si la superficie es fija y la integral converge, se puede reemplazar *d/dt* por una derivada parcial bajo el signo de integración,

$$\oint_{S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\int_{v} \frac{\partial \rho_{v}}{\partial t} \, dv \tag{6.13}$$

La aplicación del teorema de la divergencia a la integral de superficie resulta en

$$\int_{v} \left(\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{v}}{\partial t} \right) dv = 0$$
(6.14)

El integrando en la Ec. (6.14) es una función continua de la posición y por tanto deben existir pequeñas regiones en las cuales no cambia de signo. Si el valor de la integral es cero para volúmenes arbitrarios v, el integrando

debe ser idénticamente igual a cero y se obtiene así la forma diferencial de la ley para la conservación de la carga,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \tag{6.15}$$

A esta ecuación se le conoce comúnmente como la *ecuación de continuidad* y expresa la conservación de la carga en el entorno de un punto.

Si en todo punto en el interior de una región especificada la densidad de carga es constante, es decir, la corriente que entra a la región es igual en todo momento a la corriente que sale, entonces en la superficie *S* que delimita la región se tiene que

$$\oint_{S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{6.16}$$

y, por el teorema de la divergencia, en todo punto interior

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$
 (6.17)

Es decir, un flujo de corrientes estacionarias o estables en una región está definido por un vector **J**, el cual es constante en dirección y magnitud en todo punto en el interior de esa región. En virtud del carácter no divergente de este tipo de distribución de corriente, se deduce que en el régimen estacionario los filamentos de corriente se cierran sobre sí mismos, es decir, el campo del vector **J** es *solenoidal*.

En la Sec. 6.10 se estudian con algo más de detalle las corrientes eléctricas.

6.3 Algunas Propiedades de la Intensidad del Campo Eléctrico

Ahora se procederá a describir algunos experimentos cuyos resultados pondrán de manifiesto ciertas características del comportamiento de los campos eléctricos.

6.3.1 Experimento 2

Si una partícula exploradora cargada eléctricamente se *mueve lentamente* en una región en la cual existe un campo eléctrico que no varía con el tiempo, se encuentra que cuando la partícula se mueve en una trayectoria cerrada y regresa al punto donde se inició el movimiento, *no se realiza trabajo sobre la partícula ni ella realiza trabajo*.

En la Fig. 6.3, por ejemplo, una partícula exploradora de carga q_0 puede moverse siguiendo la trayectoria indicada por la trayectoria de puntos alrededor de un cuerpo cargado. Cuando la partícula se aleja del cuerpo cargado que origina el campo eléctrico **E**, este campo realiza trabajo sobre la partícula. Sin embargo, cuando la partícula se acerca al campo cargado, siempre en la trayectoria indicada, ella debe realizar un trabajo exactamente igual al que se hizo sobre ella al moverse contra la fuerza del campo.

Esta conclusión está de acuerdo con el principio de conservación de la energía, puesto que si la partícula regresase a su punto de partida con un exceso de energía, podría desplazarse de nuevo alrededor de la trayectoria una y otra vez, ganando cada vez más y más energía sin que exista una disminución correspondiente en otra parte del sistema. Esto es contrario al principio de conservación de la energía. Es igualmente imposible que la partícula regrese a su punto de partida con una deficiencia de energía ya que, suponiendo que no hay fricción, entonces la energía total del sistema tendría que disminuir.

La conclusión de este experimento es completamente independiente de la forma de la trayectoria que siga la partícula exploratoria, siempre que esa trayectoria sea cerrada. La conclusión también es independiente de la fuente que produce el campo eléctrico; sin embargo, la partícula exploradora debe tener una carga muy pequeña para no alterar en ninguna forma la fuente origen del campo cuando ella está recorriendo su circuito completo y esa fuente origen no debe cambiar en ninguna forma cuando se está realizando el experimento.



Figura 6.3. Movimiento de una partícula cargada en una trayectoria cerrada en un campo eléctrico **E**.

Puesto que la energía es igual al producto escalar de la fuerza por la distancia y la energía total es la sumatoria, o integral, de las energías individuales contribuidas por cada incremento de distancia alrededor de la trayectoria cerrada *C*, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{6.18}$$

Luego, como el campo de fuerzas y el campo eléctrico están relacionados por un factor constante, igual que en la Ec. (6.2), se obtiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{6.19}$$

Ahora bien, por el teorema de Stokes se sabe que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.20}$$

donde *S* es la superficie delimitada por el contorno *C* y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria a la superficie; su dirección positiva está dada por la regla de la mano derecha, la cual dice que si se recorre el contorno *C* de forma que nuestra mano izquierda esté en el interior de *S*, la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ va de los pies a la cabeza. Como la superficie *S* es arbitraria, sus bordes son los únicos definidos por *C*, entonces el integrando en la integral de superficie debe ser idénticamente igual a cero, es decir,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{6.21}$$

En otras palabras, el vector rot \mathbf{E} no produce un flujo neto en una región arbitraria. En este caso se dice que el campo \mathbf{E} , para el caso en que no hay variación en el tiempo, es *irrotacional* o *conservativo*; este hecho también lo expresa la Ec. (6.19).

El carácter irrotacional del campo eléctrico estático **E** permite una simplificación; del análisis vectorial se sabe que ello implica que **E** se puede calcular a partir del gradiente de una función escalar, la *función potencial* o *potencial escalar*, que se denotará por Φ ; entonces

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi = -\nabla \Phi \tag{6.22}$$

que es un criterio similar al expresado por la Ec. (6.21). Una virtud del potencial Φ es que reduce un problema vectorial a uno escalar. El signo negativo puede entenderse del hecho de que E está en la dirección en que se mueve una partícula positiva y, por tanto, en la dirección decreciente del potencial. Observe primero que el trabajo que el campo E realiza al mover una carga positiva unitaria de un punto a otro en una longitud infinitesimal es

$$dW = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

El trabajo realizado al mover la partícula una distancia *d*l *contra* la fuerza del campo **E** es precisamente el negativo de lo anterior. El trabajo total W_{12} requerido para mover una partícula una distancia finita entre los puntos 1 y 2 en un campo **E** es entonces

V

$$\mathbf{V}_{12} = -\int_{1}^{2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{6.23}$$

Usando la Ec. (6.22) se obtiene

$$W_{12} = \int_{1}^{2} (\nabla \Phi) \cdot d\mathbf{l} = \int_{1}^{2} d\Phi = \Phi_{2} - \Phi_{1}$$
(6.24)

Es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo que debe realizarse para mover una carga unitaria entre esos dos puntos. Las Ecs. (6.23) y (6.24) también muestran que la integral de línea de la componente tangencial de E a lo largo de cualquier trayectoria que une los dos puntos es independiente de la trayectoria y sólo depende de los puntos extremos. Ésta es una propiedad importante de los campos conservativos y es equivalente a la relación

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_{C} d\Phi \tag{6.25}$$

Así pues, un campo eléctrico generado por cargas estacionarias es un ejemplo de un campo conservativo.

La ecuación Φ = constante, define una superficie denominada una *superficie equipotencial*; estas superficies juegan un papel muy importante en electrostática.

El *voltaje* (o *fuerza electromotriz*), el cual es esencialmente la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2, se definió en el Capítulo 2 como

$$V_{12} = \int_{1}^{2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{6.26}$$

Es decir, el voltaje entre el punto 1 y el punto 2 es la integral de línea del campo eléctrico tomando cualquier trayectoria desde el punto 1 hasta el punto 2 [de acuerdo con la Ec. (6.24), la integral en la Ec. (6.26) es independiente de la trayectoria]. La cantidad V_{12} también se conoce como *fuerza electromotriz*. Recuerde del Capítulo 1 que la diferencial de la trayectoria *d*l en la Ec. (6.26) es equivalente a utilizar el diferencial *d*r del vector radial desde el origen.

Para un campo dado E, la especificación de una función potencial por la Ec. (6.22) da, por supuesto, libertad para la selección de una constante arbitraria. En particular, el punto inicial 1 en (6.23) puede estar ubicado en cualquier parte. Sin embargo, a menos que haya alguna razón para lo contrario, usualmente ese punto se tomo en el infinito. De esto ya se habló en el Cap. 3.

6.3.2 La Ley de Gauss y la Densidad del Campo Eléctrico

Una relación entre las cargas y la intensidad del campo, la ley de Gauss, es de importancia fundamental en electromagnetismo y posibilita atajos convenientes para el cálculo de campos eléctricos en casos especiales.

Supóngase que se tiene una superficie imaginaria completamente cerrada en un espacio libre, en el cual existe un campo eléctrico E. La superficie puede tener cualquier forma y es imaginaria en el sentido que ella se usa para aislar el espacio en su interior del espacio exterior. Ahora se procede a medir la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie cerrada. Esto puede hacerse mejor dividiendo la superficie en pequeñas secciones de área *d***a** como se indica en la Fig. 6.4.



Figura 6.4. Superficie experimental para verificar la ley de Gauss.

Entonces se procede a medir la componente del campo eléctrico normal al área dS. Si la componente normal es hacia afuera se toma (igual que antes) como positiva, si es hacia adentro se toma como negativa. Luego se multiplican todas las componentes normales por sus áreas respectivas y se suman todas. Cuando este experimento se hace para todas las superficies posibles y bajo una gran variedad de circunstancias, se llega a la conclusión de que la sumatoria que se acaba de describir es proporcional a la cantidad de carga eléctrica encerrada por la superficie en la cual se hacen las mediciones. Si ε_0 es una constante y q_{enc} es la cantidad de carga en el interior de la superficie cerrada, entonces esto se puede expresar por la ecuación

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = q_{\text{enc}} \quad \text{(espacio vacío)} \tag{6.27}$$

Si la integral en la Ec. (6.27) es igual a cero, entonces, o no hay carga en el interior del volumen encerrado por *S* o, si existe una cantidad de carga de cierto signo, entonces hay una cantidad igual de carga de signo contrario. Si la integral no es cero, entonces en el interior de *S* hay una cantidad de carga y esa cantidad es proporcional al valor de la integral. La Ec. (6.27) es una forma básica de la *ley de Gauss*. El factor de proporcionalidad ε_0 se denomina la *permitividad* del espacio vacío o espacio libre. La integral en la Ec. (6.27) no es sino la descripción matemática del flujo eléctrico que atraviesa la superficie cerrada *S* y no depende de la forma de la superficie.

Repitiendo el experimento en otros medios, aire o aceite, por ejemplo, cambia el valor de la integral en la Ec. (6.27); sin embargo, su valor *sigue siendo proporcional a la carga encerrada* y con un valor definido en cada medio. Para hacer que la Ec. (6.27) aplique a todas las substancias, es necesario incluir un factor que sea característico del material en el cual se hacen las mediciones. Este factor se denota por κ y se denomina la *constante dieléctrica relativa* o *capacidad inductiva específica* del material. Si se denota por q la carga encerrada, entonces la Ec. (6.27) se convierte entonces en

$$\kappa \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = q \tag{6.28}$$

Una forma más adecuada de la Ec. (6.28) es

$$\oint_{S} \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = q \tag{6.29}$$

puesto que k puede variar durante el proceso de integración.

La constante κ (también denotada por ε_r) depende de las características del medio en el cual está el campo eléctrico y frecuentemente ella y ε_0 se combinan en una sola constante $\varepsilon = \kappa \varepsilon_0$ y la Ec. (6.29) se convierte en

$$\oint_{S} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = q \tag{6.30}$$

A ε se le denomina la *permitividad del medio*.

Considérese ahora al vector **D** definido por la relación $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Con este nuevo vector, la Ec. (6.30) se escribe entonces como

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = q \tag{6.31}$$

En términos físicos, la Ec. (6.31), otra forma de la ley de Gauss, expresa que el flujo total del vector **D** que sale del volumen encerrado por la superficie *S* es igual a la carga total en el interior del volumen. A **D** se le denomina la *densidad del campo eléctrico* y al producto de **D** por el área se le denomina *flujo eléctrico*. Dicho de otra forma, el lado izquierdo de esta ecuación es la descripción matemática del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada *S*, en tanto que el lado derecho es la cantidad de carga total contenida en el interior de esta superficie. La superficie puede ser real o imaginaria y tener cualquier tamaño o forma.

Debe quedar claro que la ley de Gauss involucra solamente la *carga encerrada*; es decir, la carga en el interior del volumen en el cual se determina el flujo. Cualquier carga situada fuera de la superficie produce una cantidad igual de flujo entrante (negativo) que saliente (positivo), de modo que la contribución neta al flujo total a la superficie debe ser cero.

Para obtener la forma diferencial de la Ec. (6.31) se procede de la forma siguiente: Para cualquier campo vectorial **A** definido en un volumen *V* acotado por una superficie *S* simplemente conexa como en la Fig. 6.4, el teorema de la divergencia establece la siguiente relación:

$$\oint_{S} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{v} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dv \tag{6.32}$$

Imagínese ahora una distribución continua de carga con una densidad ρ_v . Aplicando el teorema de la divergencia a un volumen arbitrario v en la densidad de carga, entonces la carga q que aparece en la Ec. (6.31) puede escribirse como

$$q = \int_{v} \rho_{v} dv$$

y utilizando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de (6.31), se obtiene

$$\int_{v} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \boldsymbol{\rho}_{v}) \, dv = 0 \tag{6.33}$$

Esta ecuación es válida para un volumen arbitrario sólo si el integrando se anula, y así se obtiene que

$$\operatorname{div} \mathbf{D} - \boldsymbol{\rho}_v = \nabla \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\rho}_v = 0 \tag{6.34}$$

Ésta es la forma diferencial de la ley de Gauss y es una de las cuatro ecuaciones del campo, denominadas ecuaciones de Maxwell, las cuales en conjunto forman una descripción completa del electromagnetismo.

Observe que hay una diferencia fundamental entre las formas diferencial e integral de la ley de Gauss; la forma diferencial trata sobre la divergencia del campo eléctrico y la densidad de carga *en puntos individuales* en el espacio, en tanto que la forma integral involucra la integral de la componente normal del campo eléctrico *sobre una superficie*.

Ejemplo 1. Como un ejemplo de la aplicación de la ley de Gauss, se calculará el campo eléctrico producido por una carga uniforme distribuida en el volumen de una esfera (Fig. 6.5).



En la Fig. 6.5 se muestra un octante de la esfera de radio R. Para determinar **E** fuera de la esfera, construya una esfera imaginaria S_0 , de radio $r_0 > R$, el radio real. Aplique la ley de Gauss a esta esfera:

$$\oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_0$$

La carga Q_0 en el interior de S_0 es igual a Q, la carga total. Entonces

$$\oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_0} (E_r \hat{\mathbf{a}}_r) \cdot (dS_0 \hat{\mathbf{a}}_r) = \oint_{S_0} E_r dS_0$$

Por simetría, el valor de E_r debe ser constante en la superficie S_0 . Así que



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r \oint_{S_0} dS_0 = E_r^o \left(4\pi r_0^2 \right)$$

 $y E_r^o \left(4\pi r_0^2\right) = \left(1/\epsilon_0\right)Q y$

 $\mathbf{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}, \qquad r > R$

A continuación, para hallar **E** en el interior de la esfera, se construye una esfera imaginaria similar a la anterior de radio $r_0 < R$ y se aplica de nuevo la ley de Gauss:

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_i$$

donde Q_i es la carga en el interior de S_i . La carga total en S_i es

$$Q_i = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r_i^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)Q = \left(\frac{r_i}{R}\right)^3 Q$$

Igual que antes, $\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r^i (4\pi r_i^2) \text{ y } E_r^i (4\pi r_i^2) = (1/\varepsilon_0)(r_i/R)Q$. De manera que

$$\mathbf{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r \hat{\mathbf{a}}_r , \qquad r < R$$

En la superficie de la esfera, ambas ecuaciones dan el mismo resultado:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\hat{\mathbf{a}}_r , \qquad r = R$$

Como un ejemplo del uso de la forma diferencial de la ley de Gauss, considérese el campo eléctrico de una carga positiva puntual *q*; el campo eléctrico se origina en la carga positiva, es radial y disminuye como $1/r^2$:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Para evaluar la divergencia en el origen, se usa la definición formal de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_{S} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

y se considera una superficie gaussiana que encierra la carga puntual q; es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{1}{\Delta v} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \oint_S dS \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{1}{\Delta v} \frac{q}{4\pi r^2} (4\pi r^2) \right)$$
$$= \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{1}{\Delta v} \frac{q}{\varepsilon_0} \right)$$

Pero $q/\Delta v$ es precisamente la densidad de carga promedio en el volumen Δv y, conforme $\Delta v \rightarrow 0$, ésta se vuelve igual a ρ , la densidad de carga en el origen. De manera que la divergencia en el origen es

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}_v}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

en concordancia con la ley de Gauss.

6.4 El Campo Magnético

Cuando por un conductor fluye una corriente, puede existir una fuerza que se ejerce sobre él. Esta fuerza es de un tipo bastante diferente a la fuerza electrostática y a todas las otras fuerzas que no son de origen eléctrico, puesto que ella desaparece cuando la corriente deja de fluir.

6.4.1 Experimento 4

Ahora se utilizará un montaje de laboratorio similar al utilizado por Ampere para establecer la ley de fuerzas entre conductores. El equipo se muestra en la Fig. 6.6. Una sección pequeña y recta de alambre conductor se monta de tal forma que se pueda medir la fuerza sobre ella cuando fluye corriente de un extremo al otro. Como la sección de alambre debe tener libertad de movimiento para poder medir la fuerza, se usa algún tipo de conexión flexible para pasar la corriente.



Figura 6.6. Circuito para comprobar la fuerza entre conductores de corriente.

El experimento muestra que sobre el alambre se ejerce una fuerza que es siempre normal al alambre y que la magnitud de la fuerza es proporcional a la cantidad de corriente que pasa por el alambre y a su longitud *L*. Ahora bien, también se encuentra que la magnitud y la dirección de la fuerza dependen de la situación y de la orientación del alambre en el espacio y, en particular, en referencia a imanes u otros circuitos en los que fluya corriente. Esto sugiere, en una forma similar a lo mencionado para el campo eléctrico, que existe alguna condición en el espacio que produce la fuerza sobre el alambre, y que se debe considerar la posible existencia de un *campo magnético*.

La evidencia experimental dice que en cualquier punto en el espacio es posible orientar al alambre de tal forma que sobre él no se ejerza una *fuerza magnética*. Si el alambre se mantiene en esa misma posición pero se cambia su orientación, se encuentra que sobre él se ejerce una fuerza y que la cantidad de la fuerza es proporcional al seno del ángulo entre la dirección del alambre y su dirección cuando la fuerza era cero, es decir, la dirección nula. La dirección de la fuerza magnética, además de ser normal al alambre, también lo es a su dirección nula.

De estos resultados experimentales se obtiene entonces que la idea de la existencia de un campo magnético es bastante razonable y que debe ser un campo vectorial puesto que tiene magnitud y dirección. Sólo hay una dirección definida en forma única: la dirección del alambre cuando la fuerza que se ejerce sobre él es nula. Ésta se toma por definición como la *dirección* del campo magnético. La *intensidad* del campo magnético se encuentra a partir de la máxima fuerza magnética que se ejerce sobre el alambre cuando éste está en una dirección normal a su dirección nula. El *sentido* de esta fuerza también se define en términos de esta fuerza máxima; se asume una relación de "mano derecha" entre la dirección positiva del campo magnético y el sentido de la fuerza resultante; en forma de ecuación

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{6.35}$$

donde **F** representa la fuerza, **L** es la longitud y la dirección del alambre sobre el cual se ejerce la fuerza e *I* es la corriente que pasa por el alambre. El sentido positivo de **L** se toma en el sentido en el cual fluye la corriente positiva en el alambre. **B** se denomina el *vector de inducción magnética* o también de la *densidad del campo*

magnético. Si F se mide en newtons, L en metros e I en amperios, entonces B estará expresada en webers por metro cuadrado o teslas.

6.4.2 La Densidad del Campo Magnético

De la misma manera que se consideró a la Ec. (6.31) como la definición del flujo eléctrico, se puede concebir un flujo magnético y establecer su definición:

Flujo magnético =
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$
 (6.36)

La cantidad **B** es la densidad del campo magnético puesto que al multiplicarla por un área, el resultado es un flujo.

6.5 La Primera Ecuación de Maxwell

Ahora se establecerá la formulación de la primera de las ecuaciones de Maxwell y la cual proporciona una relación entre los campos eléctricos y magnéticos. El descubrimiento de que un campo magnético podía producir un campo eléctrico lo hizo Michael Faraday en Inglaterra e, independientemente, Joseph Henry en los Estados Unidos unos meses después.

6.5.1 Experimento 5

Considérese una espira de un conductor conectada a un galvanómetro balístico, como se ilustra en la Fig. 6.7. Un galvanómetro balístico está diseñado de forma que su lectura sea proporcional a la carga que pasa por su bobina móvil. Cualquier galvanómetro convencional puede usarse como uno balístico, pero este último tiene un par menor y una mayor inercia en la bobina. En este experimento se encuentra que cada vez que se cambia la intensidad del campo magnético, el galvanómetro indica que hay un flujo de carga y su lectura es proporcional al aumento o disminución del flujo que pasa por la espira. También se encuentra que la lectura del galvanómetro es inversamente proporcional a la resistencia total *R* del aparato (espira, conectores y galvanómetro). Como el galvanómetro mide carga eléctrica, tenemos entonces que

$$q = -\frac{\Phi_m}{R} \tag{6.37}$$

El signo negativo en la Ec. (6.37) indica que si la dirección positiva para el flujo de carga alrededor de la espira se relaciona con la dirección del flujo positivo mediante la regla de la mano derecha, entonces un incremento positivo de flujo produce una corriente negativa.

Michael Faraday (Londres) y Joseph Henry (Nueva York) realizaron experimentos semejantes al planteado para verificar que si una corriente puede producir un campo magnético, entonces, el efecto contrario debe ser cierto, es decir, un campo magnético debe producir una corriente.



Figura 6.7. Experimento de Faraday

6.5.2 La Ley de Faraday

Faraday descubrió experimentalmente que un voltaje es inducido en un circuito conductor cuando se altera el campo magnético que enlaza ese circuito. El voltaje es proporcional a la tasa de cambio en el tiempo del campo magnético que enlaza al circuito. La *ley de inducción electromagnética* de Faraday se deduce a partir de la Ec. (6.37). La ecuación puede escribirse como

$$Rq = -\Phi_m$$

y diferenciando ahora con respecto al tiempo se obtiene

$$R\frac{\partial q}{\partial t} = RI = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$
(6.38)

De la teoría de circuitos se sabe que el producto *IR* alrededor de un circuito cerrado es igual a la fuerza electromotriz en el circuito, de forma que a partir de las Ecs. (6.26) y (6.38), se obtiene

$$v_e =$$
Fuerza electromotriz $= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$ (6.39)

donde *C* es el contorno establecido por la espira. v_e es la fuerza electromotriz definida por la Ec. (6.26) y el flujo Φ_m se determina evaluado la componente normal de la densidad de flujo **B** en cualquier superficie que tengan la trayectoria deseada como su frontera. Así pues, el flujo cambiante del campo magnético a través del lazo genera un campo eléctrico dirigido alrededor del lazo. Este proceso es lo que se conoce como *inducción magnética* y la ecuación se conoce como la *ley de Faraday de la inducción electromagnética*. La derivada parcial en la Ec. (6.39) indica que *C* y *S* no varían en el tiempo.

La Ec. (6.39) es la expresión para la ley de Faraday y es también la primera ecuación de Maxwell aplicada al caso especial de una espira conductora. Ahora se hará una generalización de esta ecuación experimental y se postulará su validez en el sentido de que un campo magnético induce un campo eléctrico acorde con la Ec. (6.39) no sólo en un material conductor sino también en materiales no conductores y hasta en el espacio libre. Este concepto es de una importancia fundamental, puesto que sin los campos eléctricos y magnéticos produciéndose entre sí en el espacio no habría transmisión de radio, luz u otras ondas electromagnéticas.

Para un circuito de n vueltas, el voltaje inducido v_e puede escribirse como

$$v_e = n \frac{d\Phi_m}{dt} \tag{6.40}$$

donde Φ_m es el flujo magnético que enlaza cada vuelta de la bobina.

Usando la expresión para Φ_m dada por la Ec. (6.36) y usando la derivada total en vez de una derivada parcial, la Ec. (6.39) puede escribirse en la forma

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.41}$$

donde *S* es la superficie delimitada por el contorno *C*. La ley de Faraday expresa lo siguiente: La integral de línea del campo vectorial **E** alrededor de cualquier contorno cerrado *C* es igual a la tasa de cambio en el tiempo del *flujo* total del vector **B** que cruza cualquier superficie *S* delimitada por *C*, siempre que (1) el contorno *C* permanezca fijo con respecto al tiempo y (2) la superficie *S* sea *simplemente conexa*, esto es, la superficie no tiene "huecos", indiferentemente de su tamaño, forma o configuración.

La fórmula dada por la Ec. (6.41) puede conducir a interpretaciones incorrectas ya que involucra dos fenómenos distintos: la inducción magnética (debida a un campo magnético cambiante) y la fuerza electromotriz de movimiento, fem, (la cual involucra el movimiento de una partícula cargada a través de un campo magnético). En ambos casos, se produce una fuerza electromotriz, pero sólo la inducción magnética conduce a un campo eléctrico circulante en el marco en reposo del laboratorio. Esto significa que la Ec. (6.41) es

rigurosamente válida con la advertencia de que E representa el campo eléctrico en el marco en reposo de cada segmento *d*I de la trayectoria de integración.

Una forma de escribir la ley de Faraday que separa los dos efectos y aclara la conexión entre la circulación del campo eléctrico y un cambio magnético cambiante es la siguiente. Si se toma

fem =
$$-\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$
 Regla del flujo (6.42)

y si se supone que el contorno (o circuito) C está fijo, entonces la Ec. (6.41) también puede escribirse en la forma

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad \text{Ley de Faraday (forma alterna)}$$
(6.43)

Observe que en esta versión de la ley de Faraday, la derivada con respecto al tiempo opera solamente sobre el campo magnético y no sobre el flujo magnético, y tanto **E** como **B** se miden en el marco de referencia del laboratorio. En cualquier caso, se debe tener clara la idea principal en la ley de Faraday:

Un flujo magnético cambiante que atraviesa una superficie induce una fuerza electromotriz en cualquier trayectoria que delimite a esa superficie y, un campo magnético cambiante induce un campo eléctrico circulatorio. Es decir, si el flujo magnético que atraviesa la superficie está cambiando, se induce un campo eléctrico en la frontera de esa superficie; este campo eléctrico inducido proporciona una fuerza electromotriz que produce una corriente en el material.

El signo negativo en la ley de Faraday dice simplemente que la fuerza electromotriz inducida *se opone* al cambio en flujo, es decir, tiende a mantener el flujo existente. Ésta es *la ley de Lenz*. Lo que dedujo Lenz fue lo siguiente: las corrientes inducidas por un flujo magnético cambiante siempre fluyen en una dirección tal que se *oponen* al cambio en el flujo. Es importante entender que el flujo magnético cambiante induce un campo eléctrico ya sea que exista o no una trayectoria conductora por la cual pueda circular una corriente. Así pues, la ley de Lenz da la dirección de la circulación del campo eléctrico inducido en torno a una trayectoria especificada, aun cuando realmente no fluya corriente por esa trayectoria.

Experimentalmente se determina que la ley de Faraday predice correctamente la fuerza electromotriz (fem) generada alrededor de cualquier espira de alambre, sin importar la posición o forma de la espira. Es razonable suponer que la misma fem se generaría en la ausencia del alambre (por supuesto, en este caso no circularía corriente).

La ley de Faraday expresada por la Ec. (6.43) puede escribirse en forma diferencial usando el teorema de Stokes. La transformación de la integral correspondiente a la fuerza electromotriz conduce a la relación

$$\int_{S} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{6.44}$$

Como el contorno *C* y la superficie *S* limitada por el contorno son arbitrarios, el integrando debe anularse para que la Ec. (6.44) sea válida en cualquier parte, es decir,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
(6.45)

Observe que la Ec. (6.45) es la generalización para campos variables en el tiempo de la expresión $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ dada por la Ec. (6.21) para el caso estático. Se debe señalar que la experimentación es consistente con la suposición de que la Ec. (6.45) es satisfecha por los dos campos **E** y **B**.

6.6 La Intensidad del Campo Magnético

En este experimento se usa un medidor de flujo para medir la componente normal de la densidad del campo magnético en todos los puntos de una superficie cerrada *S* colocada en un campo magnético. Un medidor de flujo es un galvanómetro balístico calibrado para poder medir el flujo magnético enlazado por una (o varias) espira(s) conectada entre sus terminales. La superficie cerrada es imaginaria y puede tener cualquier forma o tamaño, y el experimento debe repetirse para una gran variedad de superficies. En todos los casos, el resultado del experimento es que la sumatoria del flujo del campo magnético en cada una de las superficies cerradas es cero, es decir,

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{6.46}$$

Ésta es la forma integral de la ley de Gauss para campos magnéticos. El lado izquierdo de la ecuación es una descripción matemática del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada. En este caso, la ley de Gauss se refiere al flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada *S*. La aplicación del teorema de la divergencia a la Ec. (6.46) produce el resultado que la densidad del campo magnético *no tiene divergencia bajo ninguna circunstancia*:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.47}$$

En otras palabras, el campo **B** es *solenoidal* y la Ec. (6.46) expresa que el flujo total del vector **B** que atraviesa cualquier superficie regular cerrada es cero. Esto implica que el vector *densidad del flujo magnético* **B** es continuo, vale decir, si se comienza en cualquier punto en la región de un campo magnético y el movimiento es en la dirección del vector del campo en ese punto, y luego se mantiene el movimiento en la dirección del campo magnético, finalmente se regresará al punto de partida. Si se parte desde un segundo punto que no fue tocado por la primera trayectoria y el movimiento es en la misma forma que antes, se encuentra que se regresa a este segundo punto y que en ningún sitio se corta la primera trayectoria. Ésta es una de las características principales de un campo *solenoidal*.

El experimento puede realizarse en diferentes tipos de medios materiales y siempre se obtendrá el mismo resultado: *la divergencia de* **B** *es cero*.

La divergencia de la Ec. (6.45) da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \tag{6.48}$$

De modo que la ecuación (6.45) realmente exige que la divergencia del campo magnético sea constante en el tiempo para ser consistente. Sin embargo, un campo magnético constante no solenoidal sólo puede ser generado por monopolos magnéticos y éstos no existen. Por tanto, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Observe que la ausencia de monopolos magnéticos es un hecho proveniente de observaciones – no puede predecirse a partir de teoría alguna.

La ley de Gauss para campos magnéticos se origina de la falta de polos magnéticos aislados en la naturaleza. Si ellos existiesen, servirían como fuentes y sumideros de las líneas del campo magnético, en la misma forma que lo hace la carga eléctrica para las líneas del campo eléctrico.

6.6.1 Experimento 6

Este experimento consiste en medir la densidad del flujo magnético en todos los puntos de una trayectoria cerrada *C* y en evaluar la integral

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

sumando así la componente tangencial de la densidad del campo. Lo primero que se descubre es que si la trayectoria cerrada está en un medio homogéneo, el valor de la integral es proporcional a la cantidad de corriente eléctrica enlazada por la trayectoria de integración. Si no hay un flujo de corriente a través de la

superficie delimitada por la trayectoria de integración, el valor de la integral es cero. Sin embargo, si la corriente fluye a través de la trayectoria, el valor de la integral está dado por

$$\frac{1}{\mu} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I \tag{6.49}$$

donde *I* es la corriente enlazada por *C* y μ es un parámetro característico del material. Para una trayectoria de integración en un material no homogéneo, se debe asociar el valor apropiado de μ con cada parte de la trayectoria y, por ello, la Ec. (6.49) se convierte en

$$\oint_C \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I \tag{6.50}$$

A μ se le denomina la *permeabilidad* del material. Introduciendo un ahora el campo **H** para representar al vector definido por la relación **B** = μ **H** y al cual representa la *intensidad del campo magnético*, la Ec. (6.50) se puede escribir en la forma

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \tag{6.51}$$

(6.52)

Esta ecuación es válida para todas las posibles trayectorias cerradas y resume los resultados de este experimento. En analogía con la ecuación para la fuerza electromotriz, la Ec. (6.51) puede ser la corriente en un solo conductor, como en la Fig. 6.8a, o la corriente en varios conductores como en la Fig. 6.8b, o un flujo en toda la región, como en la Fig. 6.8c. En cualquier caso puede definirse como la integral de la densidad de corriente en una superficie *S* delimitada por la trayectoria de integración *C*:



Figura 6.8. Corrientes enlazadas por un circuito cerrado.

y se tiene entonces que

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.53}$$

que es la *ley de Ampere* en su forma integral. Ésta establece que la integral de línea de la intensidad del campo magnético en torno a un lazo cerrado *C* es igual al flujo de la densidad de corriente que atraviesa el lazo. Como un resultado de la aplicación del teorema de Stokes a la integral en el lado izquierdo de la Ec. (6.53), se obtiene la relación

$$\int_{S} (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \tag{6.54}$$

Como la superficie *S* es arbitraria, entonces la única forma para que la integral se anule en todo punto de *S* es que el valor del integrando sea idénticamente igual a cero, vale decir,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{6.55}$$

en todo punto de *S* (ésta es la forma diferencial de la ley de Ampere). Esta ecuación dice que el rotacional de la intensidad del campo magnético en cualquier punto es igual a la densidad de corriente en ese punto.

6.7 La Segunda Ley de Maxwell

Hasta ahora se han establecido las siguientes relaciones para las diferentes entidades físicas que conforman el campo electromagnético:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.56}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{6.57}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{6.58}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{6.59}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}_{v} \tag{6.60}$$

Si ahora se toma la divergencia de la Ec. (6.57), se obtiene

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{div} \mathbf{J} \tag{6.61}$$

y se usa la propiedad de que la divergencia del rotacional de un vector es cero, se obtiene que

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \tag{6.62}$$

lo cual está en contradicción con lo expresado en la ecuación de continuidad, Ec. (6.58). Sin embargo, los experimentos que ayudaron a establecer la Ec. (6.57) fueron realizados bajo condiciones de invariabilidad en el tiempo de los campos magnéticos, de manera que ahora se tienen que buscar los factores de corrección de la Ec. (6.57) para que el sistema de ecuaciones (6.56)–(6.60) sea también consistente para el caso de variación en el tiempo.

Por la ley de Faraday sabemos que un campo magnético variable en el tiempo siempre es acompañado por un campo eléctrico (inducido) variable en el tiempo. Esto también significa que un campo eléctrico variable en el tiempo debe estar acompañado por un campo magnético variable en el tiempo. Sabemos que las fuentes de un campo magnético son corrientes eléctricas. De la afirmación precedente, podemos decir que un *campo magnético variable en el tiempo* no es producido únicamente por corrientes variables en el tiempo sino también por un *campo eléctrico variable en el tiempo*. Esta conclusión es la esencia de la conclusión de Maxwell a la teoría del electromagnetismo.

Lo que Maxwell observó fue que la ecuación de continuidad podía convertirse en una divergencia que se anula usando la Ec. (6.60), es decir,

div
$$\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0$$
 (6.63)

y entonces reemplazó a J en la Ec. (6.57) por su generalización

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

para campos dependientes del tiempo, de manera que la forma modificada de la ley de Ampere, Ec. (6.57), es

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{6.64}$$

Al término adicional en la Ec. (6.64), Maxwell lo llamó la *densidad de corriente de desplazamiento*. La inclusión de este término es de una importancia crucial para campos que varían con el tiempo. Luego de introducir la

corrección a la ley de Ampere, Maxwell hizo una proposición de alcance extraordinario: por experimentación se sabía que la corriente de *conducción* produce un campo magnético; sin embargo, matemáticamente la corriente total se expresa mejor como la suma de una corriente de conducción y una corriente de desplazamiento. La pregunta hecha por Maxwell fue: ¿No es posible entonces, que la corriente de *desplazamiento* también produzca un campo magnético de acuerdo con la misma ley que la corriente "normal"? En la época de Maxwell las técnicas experimentales no permitieron que esto se verificara o desmintiera, pero esta hipótesis condujo a una conclusión de importancia fundamental, puesto que Maxwell demostró que de ser cierta, entonces sería posible la transmisión de energía en la forma de ondas electromagnéticas y que la luz también era un fenómeno electromagnético.

El conjunto de ecuaciones independientes

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (\operatorname{ley \, de \, Faraday}) \tag{6.65}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (\text{ley de Maxwell-Ampere}) \tag{6.66}$$

div **J** =
$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
 (ecuación de continuidad) (6.67)

y las dos ecuaciones auxiliares

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\operatorname{ley de Gauss}) \tag{6.68}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\operatorname{ley} \operatorname{de} \operatorname{Gauss-magnética}) \tag{6.69}$$

forman la base de la teoría de Maxwell sobre el electromagnetismo clásico. Las Ecs. (6.68) y (6.69) se llaman *auxiliares* porque ellas pueden obtenerse a partir de las otras tres. Cuando las Ecs. (6.65) a (6.69) se combinan con la ecuación de fuerzas de Lorentz (la cual se estudiará más adelante) y la segunda ley de movimiento de Newton, el conjunto resultante da una descripción completa de la interacción entre partículas cargadas y campos electromagnéticos.

Estas ecuaciones se puede explicar en la forma siguiente. La Ec. (6.65) nos dice que un campo magnético variable en el tiempo es una fuente de un campo eléctrico variable en el tiempo. La Ec. (6.66) establece que las fuentes de un campo magnético son corrientes eléctricas *y un campo eléctrico variable en el tiempo*. De acuerdo con la Ec. (6.68), la única fuente que produce un flujo diferente de cero a través de una superficie cerrada del vector de desplazamiento eléctrico son las cargas eléctricas libres. Finalmente, la Ec. (6.69) puede interpretarse como la manifestación de que existe un análogo de las cargas eléctricas libres para un campo magnético. La Ec. (6.67) no es una ecuación del campo, pero todas las fuentes reales del campo electromagnético deben satisfacer la ley de conservación de la carga eléctrica

Un ejemplo de la corriente de desplazamiento es la "corriente" que fluye en el espacio entre un par de placas paralelas en un capacitor cuando las placas están conectadas a un circuito externo. Existe una corriente de desplazamiento aun cuando ninguna carga se mueva a través del espacio entre las placas. Para ilustrar este punto, considere el circuito de la Fig. 6.9a, el cual consiste de una fuente de corriente alterna conectada a un capacitor de placas paralelas. Tomemos ahora un contorno *C* que enlaza parte del circuito y que a su vez delimita una superficie *S*. Si en el circuito fluye una corriente I, la ley de Ampere expresa que

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

Claramente, este resultado debe ser independiente de la forma particular en la cual construimos la superficie *S*. Consideremos entonces a *S* como se muestra en la Fig. 6.9b. Ahora la corriente de conducción no fluye a través de *S* y nos vemos obligados a concluir que

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

lo cual obviamente no es cierto. Se puede hacer que las dos situaciones produzcan el mismo resultado si se incluye el término correspondiente a la corriente de desplazamiento, ya que entonces

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = I$$

Para un alambre conductor perfecto y un vacío entre las placas del capacitor, la integral de $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ sólo contribuye en el caso en que la superficie *S* corte el circuito del alambre, y la integral de $\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ sólo contribuye en el caso en que la superficie pase entre las placas del capacitor; en cualquiera de los dos casos el valor de la integral es *I*.



Figura 6.9. Superficies para demostrar la corriente de desplazamiento.

Para concluir esta sección se hará una generalización de la ley de Faraday para circuitos en movimiento. En la deducción de la ley de Faraday, Ec. (6.43), se supuso que el circuito *C* que delimitaba una superficie abierta *S* estaba fijo. Ahora bien, ¿qué sucede cuando el circuito está en movimiento? Antes del desarrollo de la relatividad especial se daba por entendido que las leyes físicas debían ser invariables bajo las transformaciones de Galileo; es decir, los fenómenos físicos son los mismos cuando son considerados por dos observadores moviéndose con una velocidad relativa constante **v** entre ellos, bajo la condición de que las coordenadas en el espacio y el tiempo estén relacionadas por las transformaciones de Galileo **r**' = **r**+*vt*, *t*' = *t*, donde **r** y **r**' son los vectores de posición en los sistemas de coordenadas respectivos. En particular, considérese las observaciones de Faraday. Experimentalmente se verifica que la misma cantidad de corriente se induce en un circuito secundario si éste está en movimiento cuando el circuito primario en el cual fluye la corriente constante que produce el campo está en reposo o si se mantiene fijo mientras el circuito primario se mueve en la misma forma relativa.

Considérese entonces la ley de Faraday para un circuito en movimiento y veamos las consecuencias de la invariancia de Galileo. Primero se debe hacer la observación que, a causa del movimiento, las derivadas parciales que aparecen en las Ecs. (6.39) y (6.43) deben ser reemplazadas por derivadas totales (¿por qué?). Con esta observación, la Ec. (6.41) se convierte en

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.70}$$

donde se ha reemplazado \mathbf{E} por \mathbf{E}' para indicar que el campo eléctrico \mathbf{E}' es el campo en el sistema de coordenadas en el cual $d\mathbf{S}$ está en reposo, puesto que ese campo es el que hace que fluya una corriente si realmente hubiese un circuito presente.

Si el circuito *C* está moviéndose con una velocidad **v** en alguna dirección, como se ilustra en la Fig. 6.10, la derivada con respecto al tiempo en la Ec. (6.70) debe tomar en cuenta este movimiento. El flujo que atraviesa el circuito puede cambiar porque (a) el flujo en un punto cambia con el tiempo o (b) el movimiento del circuito cambia la situación del contorno. Es decir, el cambio, en general, incluye una deformación y un desplazamiento. La derivada total de una función de flujo del tipo

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

viene expresada por la fórmula de Helmholtz

Figura 6.10. Ley de Faraday para un circuito en movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{S} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{F} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.71}$$

donde se ha utilizó la notación *nabla*, ∇ , para indicar las operaciones de tomar el rotacional y la divergencia, y el símbolo \times para indicar el producto vectorial. En la fórmula se supone que **F** es una función vectorial continua y con derivadas continuas con respecto a las variables temporales y espaciales.

Para el caso bajo estudio se tiene entonces que

$$\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{S} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.72}$$

donde v se toma como un vector fijo en la diferenciación. Ahora bien, utilizando el teorema de Stokes y el hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la Ec. (2-68) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \oint_{C} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \tag{6.73}$$

y la Ec. (6.70) se convierte en

$$\oint_{C} \left[\mathbf{E}' - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{l} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.74}$$

Obsérvese que cuando $\mathbf{v} = 0$, la Ec. (6.74) se reduce a cualquiera de las otras formas ya expresadas de la ley de Faraday cuando no hay movimiento. Una interpretación de la Ec. (6.74) es la siguiente: considere el contorno C con su superficie generada S en el instante en que ocupa una cierta posición en el espacio de un laboratorio. Aplicando la ley de Faraday, Ec. (6.41), a ese circuito fijo, se encuentra que

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{6.75}$$

donde ahora E es el campo eléctrico en el espacio del laboratorio. La suposición de la invariancia de Galileo implica que los lados izquierdos de las Ecs. (6.74) y (6.75) deben ser iguales. Esto significa que el campo eléctrico \mathbf{E}' en el sistema de coordenadas en movimiento del circuito es

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{6.76}$$

Se debe señalar que como se consideró una transformación de Galileo, la Ec. (6.76) es una aproximación válida sólo para velocidades pequeñas cuando se comparan con la velocidad de la luz.

Como un resultado adicional, observe que una partícula cargada q en reposo en un circuito en movimiento, experimentará una fuerza igual a qE', es decir,

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{6.77}$$

la cual es la expresión de la ley de fuerzas de Lorentz y es la relación que establece el puente de contacto entre las leyes de la mecánica clásica y el electromagnetismo. En su forma integral esta ley está dada por



$$\int_{v} \mathbf{f} \, dv = \int_{v} \rho \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) dv \tag{6.78}$$

donde **f** es la fuerza por unidad de volumen, en newtons por metro al cubo (N/m^3) , y **v** es la velocidad con la cual se mueve la carga.

6.8 Propiedades Macroscópicas de la Materia

En las leyes de Maxwell está implícito que debe haber relaciones adicionales entre los vectores **D** y **E**, **B** y **H** y **J** y **E** de modo que el sistema de ecuaciones sea consistente. Esto se debe a que la ley de Faraday, la ley de Maxwell-Ampère y la ecuación de continuidad forman un sistema de siete ecuaciones diferenciales escalares con dieciséis incógnitas. Las relaciones adicionales que nos proporcionan las nueve ecuaciones independientes restantes pueden escribirse en forma funcional general como

$$D = D(E)$$

$$B = B(H)$$

$$J = J(E)$$

(6.79)

y éstas especifican las propiedades electromagnéticas del medio. Las ecuaciones (6.79) se denominan las *relaciones constitutivas del medio*. Así que las ecuaciones de Maxwell, la ley de fuerzas de Lorentz y las relaciones subsidiarias que sirven para la caracterización electromagnética del medio son las *leyes básicas completas* de la teoría electromagnética.

La naturaleza de las relaciones funcionales dadas por (6.79) es determinada por las propiedades físicas del medio en las cercanías inmediatas del punto en el cual se especifican y basándose siempre en una premisa fundamental: el modelo matemático a tomar debe describir en forma adecuada sólo las propiedades macroscópicas de la materia, es decir, propiedades que varían en el espacio en forma apreciable en distancias grandes en comparación con las dimensiones atómicas (parte de este material ya fue cubierto en el Capítulo 3). Ciertas relaciones sencillas ocurren comúnmente.

 Las relaciones más sencillas que pueden encontrarse son relaciones para medios isótropos (propiedades iguales en todas direcciones) y lineales,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{6.80}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{\mu}\mathbf{H} \tag{6.81}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{\sigma} \mathbf{E} \tag{6.82}$$

donde $\varepsilon \mu y \sigma$ son constantes de proporcionalidad. Estas constantes se conocen colectivamente como los *parámetros del medio*, con cada parámetro poseyendo su nombre especial. Por ejemplo, ε se denomina la *permitividad* de un medio, μ su *permeabilidad* y σ su *conductividad*. Los valores y las dimensiones de estos parámetros dependerán del sistema de unidades adoptado y se especificarán más adelante. Observe en este caso que los vectores **D**, **B** y **J** tienen las mismas direcciones que los vectores del campo **E**, **H** y **E**, respectivamente.

Para el espacio libre, las relaciones dadas por las Ecs.(6.80) y (6.81) son

$$\mathbf{D} = \mathbf{\varepsilon}_0 \mathbf{E} \tag{6.83}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{H} \tag{6.84}$$

donde ε_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad para el espacio libre. La conductividad en el espacio libre es cero.

En lugar de especificar ε y μ para una sustancia, a menudo es ventajoso especificar valores de *permitividad relativa* y *permeabilidad relativa* utilizando como base de comparación los valores de ε_0 y μ_0 . Entonces, por definición,

Permeabilidad relativa,
$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Obsérvese que ε_r y μ_r son cantidades adimensionales.

2. Los medios isótropos exhiben las mismas propiedades en todas las direcciones, pero los medios anisótropos exhiben una conducta bastante complicada y sus propiedades varían en forma diferente con respecto a un punto a lo largo de diferentes direcciones. En este caso, los vectores D y E, H y B son paralelos sólo a lo largo de ciertos ejes preferidos. Si se puede suponer que las relaciones son todavía lineales, cada componente rectangular de D se puede expresar como una función lineal de los tres componentes de E:

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z$$

$$D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z$$

$$D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z$$
(6.85)

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$
(6.86)

Los coeficientes ε_{ij} de esta transformación lineal son las componentes de un tensor simétrico {la matriz [ε] es simétrica}. Si se pueden escoger las coordenadas de referencia en una forma tal que los términos fuera de la diagonal de la matriz de permitividad en la Ec. (6.86) sean iguales a cero, se dice entonces que los materiales con esta propiedad son *biaxiales*. Una relación análoga puede escribirse entre los vectores **B** y **H**; éste es el caso de substancias tales como las ferritas. La anisotropía en las ferritas constituye la base de operación de dispositivos importantes utilizados extensamente en muchas aplicaciones como, por ejemplo, el radar.

6.9 Polarización Eléctrica y Magnética

La caracterización de un medio mediante la especificación de los parámetros ε y μ no es la única forma posible de proporcionar la información deseada. Una caracterización alterna la constituye la introducción de dos vectores adicionales separando a **D** y **B** en dos partes,

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$
(6.87)

y definiendo a **P** como el *vector de polarización eléctrica* y a **M** como el *vector de polarización magnética*. Los vectores de polarización están así asociados en forma definida con medios materiales y son idénticamente iguales a cero para el espacio libre. Mediante estas relaciones se pueden eliminar **D** y **H** de las ecuaciones del campo para obtener el sistema

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \right)$$
(6.88)

y este sistema se interpreta así: la presencia de materiales rígidos en un campo electromagnético puede incluirse completamente mediante una distribución de carga equivalente de densidad $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ y una distribución de corriente equivalente de densidad igual a $\partial \mathbf{P}/\partial t + \nabla \times \mathbf{M}$.
En medios isótropos, los vectores de polarización son paralelos a los vectores del campo correspondientes y, excluyendo los materiales ferromagnéticos, se ha determinado experimentalmente que son proporcionales a ellos. Definiendo las *susceptibilidades eléctrica y magnética* χ_e y χ_m mediante las relaciones

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}, \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{6.89}$$

se puede escribir entonces

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} (1 + \chi_e)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi_m)$$
(6.90)

Los parámetros χ_e y χ_m definidos por la Ec. (6.89) son razones adimensionales cuyos valores son independientes del sistema de unidades empleado. **D** y **H** son vectores derivados asociados con el estado de la materia. El vector de polarización **P** tiene las dimensiones de **D**, no de **E**, mientras que **M** y **H** son dimensionalmente iguales. De las Ecs. (6.80), (6.81), (6.87) y (6.89) se obtiene entonces, que las susceptibilidades están relacionadas con ε_r y μ_r en la forma

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e , \qquad \mu_r = 1 + \chi_m \tag{6.91}$$

En medios anisótropos, las susceptibilidades están representadas por las componentes de un tensor.

Una diferencia inherente a la naturaleza de los vectores **P** y **M** viene indicada por la posibilidad de que la susceptibilidad magnética puede ser positiva o negativa, mientras que la susceptibilidad eléctrica es siempre positiva. Las sustancias caracterizadas por una susceptibilidad χ_m positiva se denominan *paramagnéticas*, mientras que aquellas con susceptibilidad χ_m negativa se denominan *diamagnéticas*. Los metales del grupo ferromagnético, incluyendo el hierro, níquel, cobalto y aleaciones, constituyen un grupo particular de substancias con una susceptibilidad magnética enormemente positiva y cuyo valor puede estar en el orden de los millares. En virtud de la relación no lineal entre **M** y **H** característica de estos materiales, la susceptibilidad χ_m debe interpretarse como la pendiente de una tangente a la curva **M** versus **H** en un punto correspondiente a un valor particular de **H**. Para incluir estos casos, la definición de χ_m se generaliza a

$$\chi_m = \frac{\partial M}{\partial H} \tag{6.92}$$

Las susceptibilidades de los materiales que no son ferromagnéticos, bien sean paramagnéticos o diamagnéticos, son tan pequeñas que para la mayoría de los propósitos prácticos son despreciables.

6.10 Medios Conductores

A las ecuaciones de Maxwell se les debe añadir ahora una tercera relación entre la densidad de corriente y el campo, suponiendo que en todo punto dentro de un sólido la densidad de corriente es una función del campo **E**,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \tag{6.93}$$

Para una gran variedad de condiciones, en sólidos y soluciones con débil ionización, la relación (2-38) es lineal, esto es,

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \tag{6.94}$$

donde el factor σ se denomina la *conductividad* del medio. La distinción entre conductores buenos y malos es relativa y arbitraria. Todas las sustancias exhiben algún grado de conductividad, pero la gama de los valores observados de σ es bastante grande. Por ejemplo, la conductividad del cobre es alrededor de 10¹⁷ veces la del agua de mar, una "buena conductora", y 10¹⁹ la del vidrio ordinario, un "mal conductor".

La Ec. (6.94) es simplemente la *ley de Ohm*. Imagínese ahora una distribución estacionaria de corriente en todo el volumen de cualquier medio conductor. En virtud del carácter no divergente del flujo, esta distribución puede representarse mediante líneas de flujo cerradas. Si *a* y *b* son dos puntos en una línea de flujo en particular, y *d*l es un elemento de su longitud, tenemos que

$$\int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a}^{b} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{\sigma}} \cdot d\mathbf{l}$$

Un manojo de líneas de flujo adyacentes constituye un filamento o tubo de corriente. Como el flujo es solenoidal, la corriente *I* a través de toda sección transversal del filamento es la misma. Sea *S* el área seccional transversal del filamento en un plano normal a la dirección del flujo. No es necesario que *S* sea infinitesimal, pero se presume que sí es lo suficientemente pequeña como para que la densidad de corriente sea uniforme en toda su área. Entonces $S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = Idl$ y

$$\int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \int_{a}^{b} \frac{1}{\sigma S} dl$$
(6.95)

El factor

es igual a la *resistencia* del filamento entre los puntos *a* y *b*. La resistencia de una sección lineal de un conductor homogéneo de sección transversal uniforme y longitud ℓ es

 $R = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sigma S} dl$

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \tag{6.97}$$

(6.96)

Una relación estrictamente válida sólo en el caso de corrientes estacionarias.

Un teorema de importancia fundamental es el que establece que *en el interior de una región donde la conductividad no se anula, no puede haber una distribución permanente de carga libre*. Esto puede demostrarse fácilmente cuando el medio es homogéneo y las relaciones entre **D** y **E** y **J** y **E** son lineales. Por la ecuación de continuidad se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$
(6.98)

y para un medio homogéneo,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_{v} \tag{6.99}$$

la cual combinada con la Ec. (6.98) conduce a la relación

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0 \tag{6.100}$$

Por consiguiente, la densidad de carga en cualquier instante es

$$\rho_v = \rho_{v0} e^{-(\sigma/\epsilon)t} \tag{6.101}$$

donde la constante de integración ρ_{v0} es igual a la densidad de carga cuando t = 0. La distribución inicial de carga en el conductor decae exponencialmente con el tiempo en todos los puntos y en una forma totalmente independiente del campo aplicado. *Si la densidad de carga inicial es cero, permanece igual a cero*.

El tiempo

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{6.102}$$

requerido por la carga en cualquier punto para decaer a 1/e de su valor inicial se denomina el tiempo de relajación.

Supóngase que para t = 0 se concentra una carga dentro de una pequeña región esférica en un cuerpo conductor. En cualquier otro punto del conductor la densidad de carga es cero. La carga dentro de la esfera

comienza ahora a desvanecerse, pero de acuerdo con la Ec. (2-46) no puede reaparecer en ninguna parte en el interior del conductor y surge entonces la pregunta: ¿qué pasó con esa carga? Como la carga se conserva, el desvanecimiento de la carga dentro de la superficie esférica debe ir acompañado por un flujo hacia afuera. La carga no puede acumularse en ningún otro punto interior, ya que el flujo es no divergente. Sin embargo, será detenido en la superficie exterior del conductor y es aquí donde encontraremos la carga que se perdió del interior de la esfera original. Esta carga superficial hace su aparición prácticamente en el mismo instante en que la carga interior comienza a decaer, puesto que la carga total es constante.

6.11 Los Potenciales Electromagnéticos Vectoriales y Escalares

El análisis de un campo electromagnético con frecuencia se facilita mediante el uso de funciones auxiliares conocidas como *potenciales*. Ya se sabe que en todo punto ordinario del espacio, los vectores del campo satisfacen las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (6.103), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (6.104), \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (6.105), \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (6.106)$$

De acuerdo con la Ec. (6.104), el campo del vector **B** siempre es solenoidal. Por tanto, **B** puede representarse como el rotacional de otro vector A_0 :

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{x} \mathbf{A}_0 \tag{6.107}$$

Sin embargo, la Ec. (6.107) no define en forma única a A₀, ya que B también es igual al rotacional de un vector A,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{6.108}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \nabla \Psi \tag{6.109}$$

y Ψ es cualquier función escalar de su posición y arbitraria.

Si ahora se reemplaza a \mathbf{B} en (6.103) por (6.107) o (6.108), se obtiene, respectivamente,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} \right) = 0, \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$
 (6.110)

Así que los campos de los vectores $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}_0 / \partial t$ y $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ son irrotacionales e iguales a los gradientes de dos funciones escalares Φ y Φ_0 :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi_0 - \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} \tag{6.111}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{6.112}$$

Obviamente, las funciones Φ y Φ_0 están relacionadas por la igualdad

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{6.113}$$

Las funciones **A** y \mathbf{A}_0 son los *potenciales vectoriales* del campo, y Φ y Φ_0 son los *potenciales escalares*. **A** y Ψ designan un par específico de potenciales a partir de los cuales puede derivarse el campo utilizando las Ecs. (6.107) y (6.111); debe observarse que a partir de (6.109) y (6.113) puede construirse un número infinito de potenciales que también conducen al mismo campo.

Supóngase ahora que el medio es homogéneo e isótropo y que μ y ϵ son independientes de la intensidad del campo, esto es,

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \,, \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \tag{6.114}$$

En términos de los potenciales,

$$\mathbf{D} = -\varepsilon \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{x} \mathbf{A}$$
(6.115)

y al sustituir estas relaciones en las Ecs. (6.105) y (6.106), se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}$$
(6.116)

у

$$\nabla^2 \Phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \tag{6.117}$$

Todas las soluciones particulares de las Ecs. (6.116) y (6.117) conducen al mismo campo electromagnético al estar sujetas a condiciones de contorno idénticas; la única diferencia entre ellas está dada por la función arbitraria Ψ . Imponiendo ahora sobre **A** y Φ la condición suplementaria (condición de Lorentz)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{6.118}$$

Para hacer esto sólo es necesario que Y satisfaga la relación

$$\nabla^2 \Psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$$
(6.119)

donde Φ_0 y A_0 son soluciones particulares de las Ecs. (6.116) y (6.117). Los potenciales Φ y A están ahora definidos en forma única y son soluciones de las ecuaciones

$$\nabla \mathbf{x} \nabla \mathbf{x} \mathbf{A} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}$$
(6.120)

y

$$\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \tag{6.121}$$

La Ec. (6.120) se reduce a una forma similar a la de la Ec. (6.121) al usar la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} \tag{6.122}$$

El último término de la Ec. (6.122) puede interpretarse como el laplaciano operando sobre las componentes *rectangulares* de **A**. En este caso,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$
(6.123)

Las Ecs. (6.121) y (6.123) se conocen como las ecuaciones de ondas.

6.12 Condiciones de Frontera

Ahora se considerarán las condiciones que deben cumplirse cuando el medio en el cual existe el campo consiste de más de un material con características diferentes. Este material se incluye para demostrar que las condiciones deducidas anteriormente son válidas para campos variables en el tiempo. Para establecer algunas de las condiciones de borde (o de frontera) se necesitará la forma vectorial del teorema de Stokes y la cual es

$$\int_{V} (\nabla \times \mathbf{F}) dv = \oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) dS$$
(6.124)

donde $\hat{\mathbf{n}}$ denota la normal unitaria (apuntando hacia afuera) a la superficie cerrada *S* que encierra al volumen *V*. La forma integral de la segunda ley de Maxwell es

$$\int_{V} (\nabla \times \mathbf{H}) dv = \int_{V} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv$$
(6.125)

la cual, al aplicar el teorema de Stokes en la forma dada por la Ec, (6.125) se convierte en

$$\oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) dS = \int_{V} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv$$
(6.126)

De la misma forma, la expresión para la primera ley de Maxwell se convierte en

$$\oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) dS = -\int_{V} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv$$
(6.127)

Considérense ahora dos medios diferentes en contacto, como se muestra en la Fig. 6.11. Las relaciones integrales (6.126) y (6.127) se evalúan en el volumen indicado al pasar de un medio a otro.

Medio $\int \hat{\mathbf{n}}_2$

Figura 6.11. Condiciones de frontera.

También se supone que los vectores del campo **B** y **D** son finitos en la superficie de separación entre los medios y que pueden ser discontinuos. Las condiciones de contorno que resultan de aplicar la Ec. (6.127) cuando Δh_1 y Δh_2 tienden a cero son

 $\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$

puesto que

$$\lim_{\Delta h \to 0} \left(\Delta h_1 \mathbf{B}_1 + \Delta h_2 \mathbf{B}_2 \right) = \mathbf{0}$$

Suponiendo que la superficie de separación puede soportar una densidad de corriente lineal K definida por

$$\mathbf{K} = \lim_{\Delta h \to 0} \left(\mathbf{J}_1 \Delta h_1 + \mathbf{J}_2 \Delta h_2 \right)$$
(6.129)

(6.128)

entonces, en el límite, la Ec. (6.126) produce la relación

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K} \tag{6.130}$$

La Ec. (6.128) expresa el hecho que las componentes tangenciales de los vectores intensidad del campo eléctrico son *continuos* al pasar de un medio al otro, mientras que la Ec. (6.130) expresa que las componentes tangenciales de los vectores intensidad del campo magnético son *discontinuos* y esa discontinuidad está dada por la densidad de corriente lineal **K**. Observe que los vectores normales cumplen $|X(f)|^2$ con la relación $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$.

Para derivar las otras condiciones de frontera necesarias, se usarán las ecuaciones

$$\int_{S} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0 \tag{6.131}$$



у

$$\oint_{S} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}) dS = \int_{V} \rho_{v} dv \tag{6.132}$$

Primero se supondrá que la superficie de separación entre los medios puede soportar una densidad de carga superficial dada por la relación

$$\rho_{S} = \lim_{\Delta h \to 0} \left(\rho_{v1} \,\Delta h_{1} + \rho_{v2} \,\Delta h_{2} \right) \tag{6.133}$$

Entonces, de la Ec. (6.131) se obtiene que, cuando Δh_1 , Δh_2 y ΔS tienden a cero,

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \tag{6.134}$$

y de la Ec. (6.132),

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_S \tag{6.135}$$

La Ec. (6.134) establece que las componentes normales de la densidad del campo magnético son *continuas* al pasar de un medio a otro, mientras que la Ec. (6.135) indica que la presencia de una capa de carga en la región de transición resulta en un cambio abrupto en la componente normal del vector **D**, y la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad de carga superficial presente.

6.13 Flujo de Energía en el Campo Electromagnético

Una de las propiedades más espectaculares de un campo electromagnético es su habilidad para transferir energía a grandes distancias, aun en la ausencia de un medio. Ninguna otra forma de energía pueden transportarse ni siquiera por una corta distancia en la ausencia de un medio material. Los aspectos de potencia y energía de los campos electromagnéticos están contenidos implícitamente en las ecuaciones del campo. Para obtener relaciones explícitas que muestre la conducta de potencia y energía, debemos manipular las ecuaciones del campo en forma apropiada y luego examinar el significado de los resultados.

El Teorema de Poynting. En la derivación de este teorema se usa la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$
(6.136)

Se tienen las relaciones dadas por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \mathbf{x} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Al sustituir éstas en la Ec. (6.136), se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$
(6.137)

El lado derecho de esta ecuación puede interpretarse en la forma siguiente. En electrostática se demuestra que un pequeño cambio en el campo produce un aumento en la energía interna $\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$ por unidad de volumen. En forma similar, para un campo magnetostático, el incremento será $\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}$. Si se supone que estos resultados se mantienen para campos variables en el tiempo, las tasas de incrementos de las energías eléctricas y magnéticas por unidad de volumen serán $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t)$ y $\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t)$, respectivamente. El último término $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ es la tasa por unidad de volumen con la cual el campo está realizando trabajo. En la ausencia de fuentes, esto será disipación de calor. Por tanto, la Ec. (6.137) puede interpretarse como una ecuación de balance de energía.

Ahora se usará la Ec. (6.137) para hallar la ecuación de balance de energía para un volumen finito. Considérese una superficie *S* que rodea un volumen *v*, e integre ambos lados de la Ec. (6.137) sobre el volumen. La integral en el lado izquierdo está en una forma a la cual se le puede aplicar el teorema de Gauss:

$$\int_{v} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \oint_{S} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

Si se denota por U_e y U_m las densidades de energía de los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, se tiene entonces que

0

$$\oint_{S} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_{v} \left[\frac{\partial U_{e}}{\partial t} + \frac{\partial U_{m}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \right] dv$$

$$\oint_{S} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{v} (U_{e} + U_{m}) \, dv \qquad (6.138)$$

Г

El lado derecho de la Ec. (6.138) da la tasa de pérdidas de la energía eléctrica en el interior del volumen. Por tanto, el lado izquierdo también debe representar estas pérdidas: el segundo término es la tasa de conversión en otras formas de energía dentro del volumen, de modo que el primer término debe representar un flujo de potencia desde el volumen hacia el exterior. Este flujo de potencia es dado por

$$P = \oint_{S} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$
 (6.139)

Ésta puede interpretarse también como una densidad de flujo de potencia local dada por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{6.140}$$

que se conoce como el vector de Poynting. Se debe tener en cuenta que la interpretación de S como el vector del flujo de potencia local no se deduce de la Ec. (6.139) con rigor matemático. En principio se puede añadir a E×H cualquier función vectorial de la posición para la cual la integral en una superficie cerrada se anula y todavía se obtiene la Ec. (6.139). Se pueden hacer objectiones similares a la interpretación de $H \cdot \delta B$ y $E \cdot \delta D$ como cambios en la densidad de energía. Sin embargo, el caso en el cual estamos interesados principalmente es cuando las variaciones con el tiempo son sinusoidales. En este caso se puede demostrar que el promedio en el tiempo del lado derecho de la Ec. (6.138) es cero y, por tanto, que el promedio en el tiempo de $\oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ es efectivamente el promedio del flujo de energía. Como se estudiará posteriormente, para un medio homogéneo, lineal e isótropo $U_e = \varepsilon E^2/2$. Cuando $E = E_0 \cos \omega t$, se demuestra fácilmente que $\partial U_e/\partial t$ es proporcional a sen $2\omega t$ y, por tanto, que el promedio temporal se hace cero. Conclusiones similares aplican a U_m . Por consiguiente, se puede concluir que, siempre que se tenga una superficie cerrada y variación sinusoidal en el tiempo, el uso de la Ec. (6.139) dará le promedio correcto del flujo de potencia.

Ejemplo 2. Campo Alrededor de un Conductor de CD

La teoría presentada en la última sección aplica a cualquier campo electromagnético. Supóngase el caso de un conductor largo y recto de sección transversal circular por el cual circula una corriente constante I. La Fig. 6.12 muestra una longitud l de radio a, rodeada por una superficie cilíndrica. Fuera del alambra, el campo magnético es acimutal y, en un radio r, tiene una intensidad

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

En el conductor se tiene una caída de potencial igual a la corriente multiplicada por la resistencia, la cual está dirigida contra la corriente. De manera que el campo eléctrico está a lo largo del conductor, en la misma dirección de la corriente y tiene una intensidad

E = IR

donde *R* es la resistencia por unidad de longitud.



Figura 6.12. Los campos eléctrico y magnético cerca de un conductor con corriente cd.

Formando el producto $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, se ve que el vector de Poynting está dirigido *radialmente entrando* hacia la superficie del conductor y tiene una magnitud

$$S = EH = \frac{I^2 R}{2\pi r} \tag{6.141}$$

Ahora se calcula la integral en la Ec. (6.139), y el flujo saliente de potencia es

$$-\left(\frac{I^2R}{2\pi r}\right)2\pi r\,l = -I^2Rl$$

y este flujo es precisamente el negativo de la potencia disipada por la caída resistiva, lo cual verifica la interpretación dada.

6.14 Ondas Electromagnéticas

Una de las principales consecuencias de las ecuaciones de Maxwell es la predicción de ondas electromagnéticas. En una región libre de fuentes ($\rho_v = 0$, **J** = 0), el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.142}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{6.143}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, pueden existir campos en la ausencia de fuentes; en este caso, el campo eléctrico variable en el tiempo es la causa del campo magnético y la variabilidad de éste en el tiempo es la causa del campo eléctrico.

Las Ecs. (6.142) y (6.143) se pueden manipular para obtener las ecuaciones para cada campo por separado:

$$\nabla^{2}\mathbf{E} - \mu_{0}\varepsilon_{0}\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}} = \mathbf{0}$$

$$\nabla^{2}\mathbf{B} - \mu_{0}\varepsilon_{0}\frac{\partial^{2}\mathbf{B}}{\partial t^{2}} = \mathbf{0}$$
(6.144)

Éstas son ecuaciones de ondas y sus soluciones pueden ser de muchos tipos (planas, cilíndricas, esféricas, etc.) y se denominan *ondas electromagnéticas*. Estas ondas se propagan con una velocidad

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$
(6.145)

la cual coincide con la velocidad de la luz.

6.1 Supóngase que las placas paralelas mostradas en la Fig. P6.1 están suspendidas en el espacio libre. En la región entre las placas existe un campo eléctrico estático producido por las placas cargadas. También hay presente un campo magnético independiente del tiempo producido por el campo magnético terrestre. ¿Constituye esta combinación de campos un campo electromagnético?





- **6.2** Verifique directamente que el potencial dado por $\Phi = \rho_v a^3 / (3\epsilon_0 r)$, r > a y $\Phi = \rho_v \left(a^2 \frac{1}{3}r^2\right) / 2\epsilon_0$, r < a de la densidad de carga uniforme ρ_v confinada a la esfera r < a satisface la ecuación de Poisson $\nabla^2 \Phi = -\rho_v / \epsilon_0$.
- **6.3** Utilizando potenciales, para el capacitor de placas paralelas de la Fig. P6.1 determine (a) la distribución del potencial entre las placas, (b) la intensidad del campo eléctrico E entre las placas. Suponga una distribución de carga superficial ρ_s en la placa superior y –ρ_s en la inferior y también que la placa superior está a un potencial *V* con relación a la inferior.
- 6.4 Se conoce que la intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación entre dos dieléctricos es E_1 = 10 V/m y forma un ángulo θ = 30° con la normal (Fig. P6.4). Si ε₂ = ε₁/2, calcule E.



Figura P6.4

6.5 Sea *S* una superficie que separa un medio 1 de un medio 2 y $\hat{\mathbf{n}}$ la normal unitaria apuntando desde el medio 1 hacia el medio 2 (Fig. P6.5). Demuestre que la conservación de la carga requiere que

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \nabla \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

donde J_1 y J_2 son densidades de corriente de volumen, K es la densidad de corriente superficial y ρ_s es la densidad de carga superficial.



Figura P6.5

- **6.6** Se usa un electrón de prueba en una región del espacio libre para medir los campos presentes. Se realizan tres pruebas:
 - (a) El electrón es colocado en reposo en la región del campo y recibe una aceleración $a_1 \hat{a}_2$.
 - (b) El electrón es inyectado con una velocidad constante $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ y recibe una aceleración $a_2 \hat{\mathbf{a}}_y + a_3 \hat{\mathbf{a}}_z$.
 - (c) El electrón es inyectado con una velocidad constante $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ y se observa que no recibe aceleración en la dirección *z*.

¿Cuáles son los vectores del campo E y E?

6.7 Escriba la relación de la conservación de carga cuando la corriente I(z, t) fluye a lo largo del eje z y $\lambda(z, t)$ es la carga por unidad de longitud del eje. Si en coordenadas polares, las únicas componentes diferentes de cero de **E** y **B** son E_r y H_{θ} , demuestre a partir de la forma integral de las ecuaciones de Maxwell que

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad E_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

y que λ e *I* satisfacen la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

- **6.8** Deduzca la ecuación de ondas para el vector potencial **A** y el potencial escalar Φ , y la condición de Lorentz para un medio conductor.
- 6.9 Demuestre que para un campo magnético estático **B** con potencial vectorial **A**,

$$\int_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I}$$

donde *S* es la superficie con frontera *C*. Halle un potencial vectorial solenoidal (div $\mathbf{A} = 0$) para el campo uniforme $\mathbf{B} = \langle 0, 0, B \rangle$ confinado al cilindro *r* < *a*, donde *r* es la distancia hasta el eje *z*.

6.10 Demuestre que la ecuación de continuidad puede derivarse a partir de la condición de Lorentz. Deduzca la ecuación de continuidad para un medio conductor partiendo de la condición de Lorentz para un medio conductor

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \sigma \Phi + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

6.11 Una función potencial utilizada con frecuencia en teoría electromagnética es la especificada por el vector potencial de Hertz, Π definido de tal forma que los campos eléctrico y magnético se derivan de él. En un medio homogéneo, en la forma siguiente:

$$\mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{\Pi})$$

290

donde

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

 $\mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}$

y **P**, el "vector de polarización" asociado con las fuentes, se define de modo que $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ y $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ Demuestre que los vectores **E** y **H** derivados de esta forma son consistentes con las ecuaciones de Maxwell.

6.12 Una línea coaxial alimenta una carga con corriente directa I_0 y un voltaje V_0 . En cualquier punto de la línea, el campo eléctrico es radial y dado por

$$E = \frac{V_0}{r\ln\left(b/a\right)}$$

en donde *a* y *b* son los radios interno y externo, respectivamente. El campo magnético es circunferencial y dado por

$$H = \frac{I_0}{2\pi r}$$

Demuestre que el teorema de Poynting predice correctamente el flujo de potencia.

Ondas Electromagnéticas Planas

La propagación de ondas electromagnéticas (EM) trata de la transferencia de energía o información de un punto (un transmisor) a otro (un receptor) a través de medios tales como el espacio, líneas de transmisión y guías de ondas. Se puede describir usando modelos tanto teóricos como prácticos basados en resultados empíricos. En este capítulo se describe el modelo de propagación en el espacio libre y modelos de pérdidas en las trayectorias. Antes de presentar estos modelos, primero se analizarán las bases teóricas y las características de las ondas electromagnéticas que se propagan en medios materiales.

7.1 Ecuaciones de Ondas y Sus Características

El punto de arranque para el estudio de las ondas electromagnéticas está, por supuesto, en las ecuaciones de Maxwell. La teoría de propagación de ondas EM puede describirse mediante las ecuaciones de Maxwell (Capítulo 6):

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$
(7.1)

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$$
(7.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\rho}_{v}(\mathbf{r}, t) \tag{7.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{7.4}$$

En las ecuaciones anteriores, las cantidades del campo **E** y **H** representan los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, y **D** y **B** los desplazamientos eléctricos y magnéticos. J y ρ_v representan las fuentes (corrientes y cargas). Este conjunto de ecuaciones diferenciales relaciona las tasas de cambio en el tiempo y en el espacio de las diferentes cantidades del campo en un punto en el espacio y en el tiempo. Adicionalmente, el vector de posición **r** define una ubicación particular en el espacio (*x*, *y*, *z*) en la cual se mide el campo.

Una relación auxiliar entre las densidades de corriente y de carga, **J** y ρ_v , denominada la *ecuación de continuidad*, es dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_v(\mathbf{r}, t)$$
(7.5)

Las relaciones constitutivas entre las cantidades del campo y los desplazamientos eléctricos y magnéticos proporcionan restricciones adicionales para resolver las Ecs. (7.1) y (7.2). Estas ecuaciones caracterizan un material isótropo determinado a nivel macroscópico en términos de dos cantidades escalares como

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} = \boldsymbol{\mu}_0 \boldsymbol{\mu}_r \mathbf{H} \tag{7.6}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \tag{7.7}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del espacio libre y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre. También, ϵ_r y μ_r , respectivamente, caracterizan los efectos de los dipolos atómicos y moleculares en el material y los momentos dipolares magnéticos de los átomos constitutivos del medio.

7.2 Ecuaciones de Ondas y Sus Soluciones

En este punto ya conocemos la parte esencial de la estructura fundamental de la teoría electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell dan una descripción completa de la relación entre los campos electromagnéticos y las distribuciones de cargas y corrientes. Sus soluciones proporcionan las respuestas a todos los problemas electromagnéticos, aunque en algunos casos las soluciones son difíciles de obtener. Se pueden diseñar técnicas analíticas y numéricas para asistir en el procedimiento de solución; pero no agregan o refinan la estructura fundamental.

Para distribuciones de cargas y corrientes dadas, ρ_v y J, primero se resuelven las ecuaciones de onda no homogéneas, Ecs. (6.121) y (6.123),

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$
$$\nabla^2 V - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

para obtener los potenciales **A** y *V*. Luego de determinar éstos, **E** y **B** pueden hallarse por diferenciación a partir de las fórmulas respectivas. Observe que estas ecuaciones son independientes del sistema de coordenadas escogido.

7.2.1 Solución de las Ecuaciones de Ondas para los Potenciales

Ahora se considerará la solución de la ecuación de ondas no homogénea para el potencial escalar *V*. Esto se puede hacer si se determina primero la solución para una carga puntual elemental en el instante *t*, $\rho_v(t)\Delta v'$, ubicada en el origen de coordenadas y sumando después los efectos de todas las cargas elementales en una región dada. Para una carga puntual en el origen, es más conveniente usar coordenadas esféricas. Debido a la simetría esférica, *V* depende solamente de *r* y *t* (no de θ o ϕ). Excepto en el origen, *V* satisface la siguiente ecuación homogénea:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$
(7.8)

Ahora se introduce una nueva variable

$$V(r, t) = \frac{1}{r}U(r, t)$$
(7.9)

la cual convierte la Ec. (7.8) en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{7.10}$$

La Ec. (7.10) es una ecuación de ondas homogénea unidimensional. Por sustitución directa, se puede verificar que *cualquier* función dos veces diferenciable de $(t - r\sqrt{\mu\epsilon})$ o de $(t + r\sqrt{\mu\epsilon})$ es una solución de la Ec. (7.10). Más adelante en esta sección se verá que una función de $(t + r\sqrt{\mu\epsilon})$ no corresponde a una solución físicamente útil. Por tanto, se tiene como solución que

$$U(r,t) = f(t - r\sqrt{\mu\varepsilon}) \tag{7.11}$$

La Ec. (7.11) representa una onda que se desplaza en la dirección positiva de *R* con una velocidad igual a $1/\sqrt{\mu\epsilon}$. La función en $r + \Delta r$ en un instante posterior $t + \Delta t$ es

$$U(r + \Delta t, t + \Delta t) = f\left[t + \Delta t - (r + \Delta)\sqrt{\mu\varepsilon}\right] = f\left(t - r\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

De manera que la función retiene su forma si $\Delta t = \Delta r \sqrt{\mu \epsilon} = \Delta r / u$ m donde $u = 1 / \sqrt{\mu \epsilon}$ es la *velocidad de propagación*, una característica del medio. De la Ec. (7.9), se obtiene que

$$V(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/u)$$
(7.12)

Para determinar cuál función específica debe ser f(t-r/u), observamos que para una carga puntual estática especificada por $\rho_n(t)\Delta v'$ en el origen,

$$\Delta V(r) = \frac{\rho_v(t)\Delta v'}{4\pi\varepsilon r}$$
(7.13)

Al comparar las Ecs. (7.12) y (7.13), se obtiene que

$$\Delta f(t-r/u) = \frac{\rho_v(t-r/u)\Delta v'}{4\pi\varepsilon}$$

El potencial debido a una distribución de carga en un volumen v' es entonces

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v'} \frac{\rho_v \left(t - r/u\right)}{r} dv' \qquad (V)$$
(7.14)

La Ec. (7.14) indica que el potencial escalar a una distancia r de la fuente en el instante t depende del valor de la densidad de carga en un tiempo *anterior* (t - r/u). Se necesita cierto tiempo r/u para que el efecto de ρ se sienta a una distancia r. Por esta razón, al potencial V(r, t) en la Ec. (7.14) se le denomina el *potencial escalar retardado*. Ahora debe quedar claro por qué una función de (t + r/u) no puede ser una solución físicamente útil, ya que conducirá a la situación imposible de que el efecto de ρ se sentiría en un punto lejano antes de que ocurra en la fuente.

La solución de la ecuación de ondas no homogénea para el potencial magnético vectorial **A** puede proceder en exactamente la misma forma que para *V*. La ecuación vectorial para **A** puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, cada una semejante a la ecuación para *V*. El *potencial vectorial retardado* es entonces dado por

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}(t-r/u)}{r} dv' \quad (Wb/m)$$
(7.15)

Los campos eléctricos y magnéticos obtenidos a partir de **A** y *V* por diferenciación serán obviamente funciones de (t-r/u) y, por tanto, retrasados en el tiempo. A las ondas electromagnéticas les lleva tiempo para desplazarse y para que los efectos de cargas y corrientes variables en el tiempo se sientan en puntos lejanos. En la aproximación cuasi estática, se ignora el efecto del retardo temporal y se supone una respuesta inmediata. Esta suposición está implícita al tratar problemas de circuitos. También se debe señalar que el medio no se propaga. Sólo la perturbación (la onda electromagnética) se propaga y lo hace con una velocidad definida determinada por las propiedades del medio. Luego de que la onda pasa, el medio *regresa* a su estado original. El medio no es afectado por el paso de la onda

7.2.2 Ecuaciones de Ondas Libres de Fuentes

En problemas de propagación de ondas, estamos interesados en la conducta de una onda electromagnética en una región libre de fuentes donde ρ_v y J son ambas cero. En otras palabras, con frecuencia estamos interesados no tanto en cómo se origina una onda electromagnética, sino en cómo se propaga. Si la onda está en un medio no conductor simple (lineal, isótropo y homogéneo) caracterizado por los parámetros ε y μ (σ = 0), las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{7.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{7.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{7.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{7.19}$$

Las Ecs. (7.16) a (7.19) son ecuaciones diferenciales de primer orden en las dos variables $E ext{ y } H$. Pueden combinarse para obtener una ecuación de segundo orden en E solamente. Para hacer esto, tomamos el rotacional de la Ec. (7.16) y usamos la Ec. (7.20):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ahora bien, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ por la Ec. (7.18). Por tanto, tenemos que

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{7.21}$$

o, puesto que $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{7.22}$$

En la misma forma también se puede obtener una ecuación para H:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$
(7.23)

Las Ecs. (7.22) y (7.23) son las ecuaciones de ondas vectoriales homogéneas.

Se puede ver que en coordenadas cartesianas, las Ec. (7.22) y (7.23) pueden descomponerse cada una en tres ecuaciones de ondas escalares, homogéneas en tres dimensiones. Cada componente de **E** y **H** satisfará una ecuación exactamente como la Ec. (7.10), cuyas soluciones representan ondas. En los próximos capítulos se analizará extensivamente el comportamiento de ondas en diferentes ambientes.

7.3 Campos Armónicos en el Tiempo

Las ecuaciones de Maxwell y todas las ecuaciones que se han derivado de ellas en este capítulo son válidas para cantidades electromagnéticas con una dependencia del tiempo arbitraria. El tipo real de funciones del tiempo que asumen las cantidades del campo depende de las funciones fuente ρ_v y J. La mayoría de las fuentes de los campos electromagnéticos tienen una variación sinusoidal en el tiempo; ésta es la razón por la cual las funciones del tiempo pueden expandirse en series de Fourier de componentes armónicas sinusoidales; y las funciones transitorias no periódicas pueden expresase como integrales de Fourier. Puesto que las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales *lineales*, las variaciones de tiempo sinusoidales de las funciones fuente de una frecuencia dada producirán variaciones sinusoidales de E y H con la *misma frecuencia* en el régimen estacionario. Para funciones fuente con una dependencia arbitraria del tiempo, los campos electrodinámicos pueden determinarse en términos de aquellos producidos por las diferentes componentes de frecuencia de las funciones fuente. La aplicación del principio de superposición dará los campos totales. En esta sección se examinan las relaciones de los campos armónicos en el tiempo (estado estacionario sinusoidal).

7.3.1 Electromagnetismo Armónico en el Tiempo

Los vectores del campo que varían con las coordenadas espaciales y son funciones sinusoidales del tiempo pueden representarse mediante fasores que dependen de las coordenadas espaciales pero no del tiempo. Como un ejemplo, es posible escribir un campo E armónico en el tiempo con $\cos \omega t$ como referencia en la forma

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}\right]$$
(7.24)

donde $\mathbf{E}(x, y, z)$ es un *fasor* o *representación fasorial* que contiene información sobre la dirección, magnitud y fase. En general, los fasores son cantidades complejas, de modo que si $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ se va a representar mediante el fasor $\mathbf{E}(x, y, z)$, entonces $\partial \mathbf{E}(x, y, z, t)/\partial t$ y $\int \mathbf{E}(x, y, z, t) dt$ se representarían, respectivamente, por los fasores $j\omega \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{E}(x, y, z, t)/j\omega$; es decir, la derivada parcial con respecto al tiempo $\partial/\partial t$ es reemplazada por el factor de multiplicación $j\omega$. Las diferenciaciones e integraciones de orden superior con respecto a t se representarían, respectivamente, por multiplicaciones y divisiones del fasor $\mathbf{E}(x, y, z)$ por potencias superiores de $j\omega$.

Ahora se escribirán las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo en términos de los fasores del campo (**E**, **H**) y los fasores fuente (ρ_v , J) en un medio simple (lineal, isótropo y homogéneo) en la forma siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{7.25}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{7.26}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon \tag{7.27}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{7.28}$$

Se han omitido los argumentos en coordenadas espaciales por sencillez. El hecho de que se usen las mismas notaciones para los fasores que se usaron para sus correspondientes cantidades dependientes del tiempo no debe crear confusión, ya que trabajaremos casi exclusivamente con campos armónicos en el tiempo (y por tanto con fasores) en el resto de este texto. Cuando haya necesidad de distinguir una cantidad instantánea de una fasorial, la dependencia del tiempo de la cantidad instantánea se indicará explícitamente mediante la inclusión de una t en el argumento. Las cantidades fasoriales no son funciones de t. Es útil observar que cualquier cantidad que contenga j debe ser necesariamente un fasor.

Las ecuaciones de ondas armónicas en el tiempo para el potencial escalar V y el potencial vectorial **A** se convierten, respectivamente, en

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{7.29}$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{7.30}$$

en las cuales

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{u} \tag{7.31}$$

se denomina el *número de onda*. Las Ecs. (7.29) y (7.30) se conocen como las *ecuaciones de Helmhotz no homogéneas*. La condición de Lorentz para los potenciales es ahora

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\varepsilon V = 0 \tag{7.32}$$

Las soluciones fasoriales de las Ecs. (7.29) y (7.30) se obtienen a partir de las Ecs. (7.14) y (7.15), respectivamente:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v'} \frac{\rho e^{-jkR}}{r} dv' \quad (V)$$
(7.33)

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J} e^{-jkR}}{r} dv' \qquad (Wb/m)$$
(7.34)

Éstas son las expresiones para los potenciales escalar y vectorial retardados debidos a fuentes armónicas en el tiempo. Ahora la expansión en serie de Taylor para el factor exponencial e^{-jkr} es

$$e^{-jkr} = 1 - jkr + \frac{k^2r^2}{2} + \cdots$$

donde *k*, definida en la Ec. (7.31), puede expresarse en términos de la longitud de onda $\lambda = u/f$ en el medio. Tenemos que

$$k = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{7.35}$$

Entonces, si

$$kr = 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1 \tag{7.36}$$

o si la distancia *r* es pequeña comparada con la longitud de onda λ , e^{-jkr} puede ser aproximada por 1. Las Ecs. (7.33) y (7.34) se simplifican entonces y se convierten en las expresiones utilizadas para hallar campos cuasi estáticos.

El procedimiento formal para determinar los campos eléctricos y magnéticos debidos a distribuciones de cargas y corrientes armónicas en el tiempo es como sigue:

- **1.** Halle los fasores V(r) y $\mathbf{A}(r)$ a partir de las Ecs. (7.33) y (7.34).
- 2. Halle los fasores $\mathbf{E}(r) = -\nabla V j\omega \mathbf{A} + \mathbf{B}(r) = \nabla \times \mathbf{A}$.
- **3.** Determinar los campos instantáneos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right]$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right]$, utilizando una referencia coseno.

El grado de dificultad de un problema depende de lo difícil que sea realizar las integraciones en el Paso 1.

7.3.2 Campos Libres de Fuentes en Medios Simples

En un medio simple, no conductor y libres de fuentes caracterizado por $\rho_v = 0$, J = 0, $\sigma = 0$, las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo se convierten en

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{7.37}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{7.38}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{7.39}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{7.40}$$

Las Ecs. (7.37) a (7.40) pueden combinarse para producir ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en E y H. De las Ecs. (7.22) y (7.23), obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7.41}$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \tag{7.42}$$

que son las ecuaciones vectoriales de Helmholtz homogéneas.

Ejemplo 1. Demostrar que si (**E**, **H**) son soluciones de las ecuaciones de Maxwell libres de fuentes en un medio simple caracterizado por ε y μ , entonces (**E**', **B**') también lo son, donde

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\cos\alpha + \eta \mathbf{H}\sin\alpha \tag{7.43}$$

$$\mathbf{H}' = -\left(\frac{\mathbf{E}}{\eta}\right) \operatorname{sen} \alpha + \mathbf{H} \cos \alpha \tag{7.44}$$

En las Ecs. (7.43) y (7.44), α es un ángulo arbitrario y $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ se denomina la *impedancia intrínseca* del medio.

Solución: El enunciado se demuestra tomando el rotacional y la divergencia de \mathbf{E}' y \mathbf{H}' y usando las Ecs. (7.37) a (7.40):

$$\nabla \times \mathbf{E}' = (\nabla \times \mathbf{E}) \cos \alpha + \eta (\nabla \times \mathbf{H}) \operatorname{sen} \alpha$$

= $(-j\omega\mu\mathbf{H}) \cos \alpha + \eta (j\omega\epsilon\mathbf{E}) \operatorname{sen} \alpha$
= $-j\omega\mu \left(\mathbf{H} \cos \alpha - \frac{1}{\eta} \mathbf{E} \operatorname{sen} \alpha\right) = -j\omega\mu\mathbf{H}'$ (7.45)

$$\nabla \times \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta} (\nabla \times \mathbf{E}) \operatorname{sen} \alpha + (\nabla \times \mathbf{H}) \cos \alpha$$
$$= -\frac{1}{\eta} (-j\omega\mu\mathbf{H}) \operatorname{sen} \alpha + (j\omega\epsilon\mathbf{E}) \cos \alpha$$
$$= j\omega\epsilon (\eta\mathbf{H} \operatorname{sen} \alpha + \mathbf{E} \cos \alpha) = -j\omega\mu\mathbf{E}'$$
(7.46)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = (\nabla \cdot \mathbf{E}) \cos \alpha + \eta (\nabla \cdot \mathbf{H}) \sin \alpha = 0$$
(7.47)

$$\nabla \cdot \mathbf{H}' = -\frac{1}{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \operatorname{sen} \alpha + (\nabla \cdot \mathbf{H}) \cos \alpha = 0$$
(7.48)

Las Ecs. (7.45) a (7.48) son ecuaciones de Maxwell en E' y H'.

Este ejemplo muestra que las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre son invariantes bajo la transformación lineal especificada por las Ecs. (7.43) y (7.44). Un caso especial interesante ocurre para $\alpha = \pi/2$. En este caso, las Ecs. (7.43) y (7.44) se convierten en

$$\mathbf{E}' = \eta \mathbf{H} \tag{7.49}$$

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{E}}{-\eta} \tag{7.50}$$

Las Ecs. (7.49) y (7.50) muestran que *si* (**E**, **H**) *son soluciones de las ecuaciones de Maxwell libres de fuentes, entonces* ($\mathbf{E}' = \eta \mathbf{H}$, $\mathbf{H}' = -\mathbf{E}/\eta$) *también lo son.* Éste es un enunciado del **principio de dualidad**. Este principio es una consecuencia de la simetría de las ecuaciones de Maxwell libres de fuentes.

Si el medio simple es conductor ($\sigma \neq 0$), por él circulará una corriente J = σE y la Ec. (7.38) debe cambiarse a

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mathbf{E}$$

= $j\omega\varepsilon_c\mathbf{E}$ (7.51)

en la cual

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (F/m)$$
(7.52)

donde $\varepsilon' = \varepsilon$ y $\varepsilon'' = \sigma/\omega$. Las otras tres ecuaciones, Ecs. (7.37), (7.39) y (7.40) permanecen iguales. Por tanto, todas las ecuaciones anteriores para medios no conductores se aplicarán a medios conductores si ε es reemplazado por la *permitividad compleja* ε_c . El número de ondas real *k* en las ecuaciones de Helmholtz, Ecs. (7.41) y (7.42), ahora tiene que cambiarse a un número de ondas complejo $k_c = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} = \omega \sqrt{\mu (\varepsilon' - j \varepsilon'')}$ en un medio dieléctrico con pérdidas.

La razón $\varepsilon'/\varepsilon'$ mide la magnitud de la corriente de conducción en relación con la corriente de desplazamiento. Se denomina una *tangente de pérdidas* ya que es una medida de las pérdidas óhmicas en el medio:

$$\tan \delta_c = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$$
(7.53)

La cantidad δ en la Ec. (7.53) puede llamarse también el *ángulo de pérdidas*.

Con base en la Ec. (7.52), se dice que un medio es un *buen conductor* si $\sigma \gg \omega \varepsilon$ y un *buen aislante* si $\omega \varepsilon \gg \sigma$. De manera que un material puede ser un buen conductor a bajas frecuencias, pero puede tener las propiedades de un dieléctrico con pérdidas para frecuencias muy altas. Por ejemplo, un suelo húmedo tiene una constante dieléctrica ε_r y una conductividad σ que están, respectivamente, en las cercanías de 10 y 10^{-2} (S/m). La tangente de pérdidas $\sigma/\omega\varepsilon$ del suelo húmedo es entonces igual a 1.8×10^4 a 1 kHz, lo que lo hace un conductor relativamente bueno. A 10 GHz, $\sigma/\omega\varepsilon$ se hace igual a 1.8×10^{-3} , y el suelo húmedo se comporta como un aislante.

7.4 Ondas Planas

Se buscan soluciones simples para las Ecs. (7.37) y (7.38) en una región del espacio que no contiene fuentes e inicialmente tiene una conductividad igual a cero. Se buscan soluciones que sean dependientes de una sola variable espacial, la cual tomamos como z. Estas soluciones deben ser las mismas en cualquier plano en el cual z sea constante y por eso se aplica el término *ondas planas*.

En coordenadas cartesianas rectangulares,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \hat{\mathbf{a}}_z$$

Puesto que E depende sólo de z, esta relación se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \,\hat{\mathbf{a}}_x + -\frac{\partial E_x}{\partial z} \,\hat{\mathbf{a}}_y$$

y, en la misma forma,

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \,\hat{\mathbf{a}}_x + -\frac{\partial H_x}{\partial z} \,\hat{\mathbf{a}}_y$$

Al sustituir estas relaciones en las Ecs. (7.37) y (7.38), se obtiene

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \tag{7.54}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \tag{7.55}$$

$$0 = -j\omega\mu H_z \tag{7.56}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x \tag{7.57}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_y \tag{7.58}$$

$$0 = j\omega\varepsilon E_z \tag{7.59}$$

De las Ecs. (7.56) y (7.59) se deduce que para estas soluciones, las componentes E_z y H_z se hacen cero. Además, las Ecs. (7.54) y (7.58) se relacionan solamente con E_y y H_x , y las Ecs. (7.55) y (7.57) se relacionan solamente con E_x y H_y . Considérese primero el último par de ecuaciones. Eliminando H_y , se obtiene

 $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -j\omega\mu \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\mu \cdot j\omega\mu E_x$ $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon E_x = 0$ (7.60)

Por tanto,

Esta ecuación tiene dos soluciones independientes:

$$E_x = Ae^{-jkz} \tag{7.61}$$

у

$$E_r = Be^{jkz} \tag{7.62}$$

donde *A* y *B* son constantes y $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$.

Cuando la Ec. (7.61) da E_x , entonces, de (7.55), se obtiene

$$H_y = -B\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{-jkz}$$
(7.63)

y para E_x en la Ec. (7.62), la Ec. (7.55) da

$$H_y = A \frac{\beta}{\omega \mu} e^{-jkz} = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{-jkz}$$
(7.64)

Aparte del signo, se observa que la razón de E_x a H_y es una constante para el medio. Esta constante, $\sqrt{\mu/\epsilon}$, tiene las dimensiones de impedancia, se denotará por el símbolo η y se denomina la *impedancia de onda*:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{7.65}$$

Para entender el significado de estas ecuaciones, debemos regresar a los campos físicos. Las Ecs. (7.61) y (7.64) producen, suponiendo que *A* es una constante real,

$$E_x(z, t) = A\cos(\omega t - kz)$$

$$H_y(z, t) = \frac{1}{\eta}A\cos(\omega t - kz)$$
(7.66)

En cualquier punto con coordenada *z*, los campos eléctricos y magnéticos varían sinusoidalmente con el tiempo; está en fase entre sí y son mutuamente perpendiculares. Su disposición en el instante t = 0 se muestra en la Fig. 7.1. Es posible considerar el termino $\cos(\omega t - kz)$ como la representación de una onda propagándose en la dirección positiva de *z*: un observador experimenta un valor constante del campo eléctrico (o del campo magnético) si se mueve de modo que $\omega t - kz$ es constante. En un intervalo de tiempo Δt , tiene que moverse de manera que kz se incremente en ωt para mantener a $\cos(\omega t - kz)$ en el mismo valor, esto es, se mueve una distancia

$$\Delta z = \frac{\omega \Delta t}{\beta}$$



Figura 7.1 Variación espacial de los campos eléctricos y magnéticos.

Esto se ilustra en la Fig. 7.2. La velocidad requerida es

$$u = \frac{\omega}{k} \tag{7.67}$$

que se denomina la *velocidad de fase*, ya que es la velocidad con la cual se desplazan las superficies de fase constante. Utilizando la relación para *k*, en este caso

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{7.68}$$



Figura 7.2. El cambio en la distribución espacial de *E*_x con el tiempo.

Aquí *u* es una constante del medio, aunque en otros casos la velocidad definida en la Ec. (7.67) puede depender de la frecuencia. De manera que la velocidad de la onda es *menor* que en el espacio libre y el *índice de refracción* es

$$n = \frac{c}{u} \tag{7.69}$$

donde *c* es la velocidad de la luz en el espacio libre. En un medio no magnético, $\mu = \mu_0$ y $n = \sqrt{\epsilon_r}$. De manera que la relación entre el índice de refracción y el coeficiente de permitividad es sencilla para un conductor no magnético.

Usando la definición de *u*, el término $\cos(\omega t - kz)$ puede reescribirse como $\cos\omega(t - z/u)$. Una señal de frecuencia angular ω sufre un retardo de z/u al desplazarse una distancia *z*. Este retardo es el mismo para todas las frecuencias, por lo que esta propagación se denomina *no dispersiva*. Si la velocidad de fase depende de ω , se dice que la propagación es *dispersiva*.

La periodicidad en la coordenada z la da

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{u}{f} \tag{7.70}$$

donde *f* es la frecuencia igual a $\omega/2\pi$. La cantidad λ es la *longitud de onda*.

Los campos descritos por las Ecs. (7.61) y (7.64) o la Ec. (7.66) representan una *onda plana monocromática* (una sola frecuencia) en la dirección directa (dirección de *z* positiva) y también se dice que la onda es de *polarización plana*, lo que significa que el campo eléctrico está todo el tiempo paralelo al mismo plano, en este caso el plano *xz*, y también es perpendicular a la dirección de propagación. Se debe observar que E_x , H_y y Oz forman un conjunto derecho de vectores: el producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ apunta en la dirección de propagación.

Las Ecs. (7.62) y (7.63) producen un factor $\cos \omega (t + z/u)$ en vez de $\cos \omega (t - z/u)$. Evidentemente se refieren a una onda inversa, en la dirección negativa de *z*. E_x , H_y y la dirección de propagación todavía forman un conjunto derecho, ya que se han invertido tanto H_y como la dirección de propagación. Se debe recordar que la selección de la dirección *z* como la dirección de propagación fue arbitraria. Los resultados muestran que en un medio ilimitado, ondas planas puede viajar en cualquier dirección de forma independiente.

7.5 El Teorema de Poynting Complejo

Como se estudió en el Capítulo 6, el vector de Poynting

 $\mathcal{P} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

es el vector de la densidad del flujo de potencia instantáneo. Se desea obtener la forma del vector de Poynting apropiada para usarla con la representación fasorial en el estado estacionario sinusoidal.

Se sabe que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{E}^{*}(\mathbf{r})e^{-j\omega t}\right]$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r})e^{-j\omega t}\right]$$

son los valores instantáneos de $E(\mathbf{r}, t)$ y $H(\mathbf{r}, t)$. En la misma forma se puede escribir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{G}} &= \frac{1}{2} \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{E}^{*}(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \Big] \times \frac{1}{2} \Big[\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \Big] \\ &= \frac{1}{4} \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \Big] + \frac{1}{4} \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t} + \mathbf{E}^{*}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r}) e^{-j2\omega t} \Big] \end{aligned}$$

Puesto que

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)^* = \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}, \qquad (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^* = \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*$$

se obtiene que

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t} \right]$$
(7.71)

Obsérvese que el primer término es independiente del tiempo y que el segundo término tiene una magnitud de

$$\frac{1}{2} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \cos(2\omega t + \phi)$$

Los términos, en general, tienen amplitudes diferentes. El segundo término tiene una dependencia respecto del tiempo igual al doble de la frecuencia de la onda y su valor promedio en el tiempo es cero.

En muchos problemas, el promedio en el tiempo de la densidad del flujo de potencia es la única parte del flujo de potencia que interesa. Esto sugiere que se debe definir un *vector de Poynting complejo*

$$\mathbf{S}_{c} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*} \right) \tag{7.72}$$

el cual se puede usar para calcular el promedio en el tiempo de la densidad de flujo de potencia directamente a partir de los vectores complejos del campo sin recurrir a las formas instantáneas. La densidad de potencia promedio es entonces

$$\left(\mathbf{S}_{c}\right)_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^{*}(z)\right]$$
(7.73)

En realidad, la motivación para definir un vector de Poynting complejo es obtener e interpretar un teorema de Poynting complejo. Esto se puede lograr a partir si se considera la forma compleja de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$$

Primero, se multiplica escalarmente la primera ecuación por H* y el conjugado de la segunda ecuación por E:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* - j\omega\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*$$

Ahora, se resta la primera ecuación de la segunda, para obtener

$$-\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* + j\omega (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*)$$

Finalmente, se transforma el lado izquierdo de esta ecuación usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ y multiplicando ambos lados por ½. Así se obtiene

$$-\nabla \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + j \omega \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right)$$

El lado izquierdo es obviamente igual a $-\nabla \cdot \mathbf{S}_c$. Por tanto,

$$-\nabla \cdot \mathbf{S}_{c} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{*} + j\omega\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{*} - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^{*}\right)$$
(7.74)

Ésta es la forma diferencial del teorema de Poynting complejo. La forma integral del teorema se deduce de inmediato:

$$-\oint_{S} \mathbf{S}_{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{V} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{*} dv + j \omega \int_{V} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{*} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^{*} \right) dv$$
(7.75)

Esta relación muestra que el segundo término en la derecha es puramente imaginario. Sin embargo, el primer término podría tener una parte imaginaria y una parte real. En general, el vector de la densidad de corriente J consiste de una componente de conducción y una componente de fuente:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_f = \mathbf{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{J}_f \tag{7.76}$$

de manera que

$$\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}E^2 + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f^* \tag{7.77}$$

Aunque el primer término en el lado derecho de la Ec. (7.77) es puramente real, el segundo término es generalmente complejo debido a la relación arbitraria de fases entre el vector **E** y la componente de la fuente de **J**. En vista de esto, se tiene entonces que

$$\left\langle P_{d}\right\rangle = \int_{V} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{c}^{*} dv = \int_{V} \frac{1}{2} \sigma E^{2} dv$$
(7.78)

representa la disipación de potencia en el volumen *V promediada* durante un ciclo completo de la onda. El símbolo $\langle \rangle$ se usa para denotar el promedio en el tiempo de una cantidad. En forma similar,

$$\langle P_s \rangle = \operatorname{Re}\left(\int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f^* dv\right)$$
 (7.79)

у

$$j\langle Q_s \rangle = j \operatorname{Im}\left(\int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f^* dv\right)$$
(7.80)

denotan las componentes real e imaginaria de la potencia promedio intercambiada entre el campo y las fuentes en *V*.

Ahora vemos que

$$\left\langle W_{m}\right\rangle = \int_{V} \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv \tag{7.81}$$

$$\left\langle W_{e}\right\rangle = \int_{V} \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv \tag{7.82}$$

son los términos de las energías magnética y eléctrica almacenadas promediadas para un ciclo completo de la onda. Por tanto, el flujo de potencia complejo total a través de la superficie *S* puede ahora escribirse

$$-\oint_{S} \mathbf{S}_{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \left(\langle P_{d} \rangle + \langle P_{f} \rangle \right) + j \left[2\omega \left(\langle W_{m} \rangle - \langle W_{e} \rangle \right) + \langle Q_{f} \rangle \right]$$
(7.83)

la cual muestra una clara identificación del vector de Poynting complejo con las partes real e imaginaria de la potencia transmitida a través de la superficie *S*.

Para concluir, observe que la relación $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{y} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ permite escribir la Ec. (7.74) en la forma equivalente

$$-\oint_{S} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \int_{V} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{*} \, dv + j\omega \int_{V} \left(\frac{1}{2} \mu H^{2} - \frac{1}{2} \varepsilon D^{2} \right) dv \tag{7.84}$$

Ejemplo 2. El campo lejano de un elemento corto de corriente vertical $Id\ell$ ubicado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas en el espacio libre es

$$\mathbf{E}(r,\,\theta) = \hat{\mathbf{a}}_{\theta} E_{\theta}(r,\,\theta) = \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \left(\frac{60\pi I\,d\ell}{\lambda r} \operatorname{sen} \theta\right) e^{-jkr}$$

у

$$\mathbf{H}(r, \theta) = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \frac{E_{\theta}(r, \theta)}{\eta_0} = \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \left(j \frac{I \, d\ell}{2\lambda r} \operatorname{sen} \theta \right) e^{-jkr}$$

donde $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda.

(a) Escribir la expresión para el vector de Poynting instantáneo.

(b) Hallar la potencia promedio total irradiada por el elemento de corriente.

Solución:

(a) Observe que $E_{\theta}/H_{\phi} = \eta_0 = 120\pi (\Omega)$. El Vector de Poynting instantáneo es

$$\mathbf{S}(r, \theta; t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{E}(r, \theta)e^{j\omega t}\right] \times \operatorname{Re}\left[\mathbf{H}(r, \theta)e^{j\omega t}\right]$$
$$= \left(\hat{\mathbf{a}}_{\theta} \times \hat{\mathbf{a}}_{\phi}\right) 30\pi \left(\frac{Id\ell}{\lambda r}\right)^{2} \operatorname{sen}^{2} \theta \operatorname{sen}^{2} (\omega t - kr)$$
$$= \hat{\mathbf{a}}_{r} 15\pi \left(\frac{Id\ell}{\lambda r}\right)^{2} \operatorname{sen}^{2} \theta [1 - \cos 2(\omega t - kr)]$$

(b) El vector de la densidad de potencia promedio es, por la Ec. (7.73),

$$\mathbf{S}_{\text{prom}}(r, \theta) = \hat{\mathbf{a}}_r 15\pi \left(\frac{I \, d\ell}{\lambda r}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

que es igual al valor promedio de **S**(*r*, *θ*; *t*) dado en la parte (a). La potencia total radiada se obtiene integrando **S**_{prom}(*r*, *θ*) en la superficie de la esfera de radio *r*:

$$P_{\text{prom}}(\text{total}) = \oint_{S} \mathbf{S}_{\text{prom}}(r, \theta) \cdot d\mathbf{s} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[15\pi \left(\frac{I\,d\ell}{\lambda r}\right)^{2} \sin^{2}\theta \right] r^{2} \sin\theta \,d\theta \,d\phi$$
$$= 40\pi^{2} \left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^{2} I^{2}$$

donde es la amplitud ($\sqrt{2}$ veces el valor efectivo) de la corriente sinusoidal en $d\ell$.

7.6 Polarización

La polarización de una onda plana uniforme es un término que describe la conducta del vector del campo eléctrico instantáneo en un punto dado en el espacio (puesto que el vector del campo magnético es perpendicular al del campo eléctrico, no es necesario describirlo por separado).

En algunos casos, la dirección de E de una onda plana en un punto dado puede cambiar con el tiempo. Aquí la polarización se describe mejor mediante ejemplos específicos. Considere la onda plana uniforme cuya descripción total es dada por

$$\mathbf{E}(z, t) = \operatorname{Re}\left[\left(E_{x}^{+}e^{-jkz}\right)e^{j\omega t}\right]\hat{\mathbf{a}}_{x} = E_{x0}\cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{x}\right)\hat{\mathbf{a}}_{x}$$
$$\mathbf{H}(z, t) = \operatorname{Re}\left[\left(\frac{E_{x}^{+}}{\eta}e^{-jkz}\right)e^{j\omega t}\right]\hat{\mathbf{a}}_{y} = \frac{E_{x0}}{\eta}\cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{x}\right)\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.85)

Observe que el vector del campo eléctrico instantáneo está siempre en la dirección de *x*. En este caso se dice que la onda está *polarizada linealmente en la dirección de x* o, alternativamente, el plano *x* es el *plano de polarización*, o la onda está *polarizada en x*. Observe también que estas descripciones son incompletas en que no se especifica la dirección de propagación y los campos instantáneos facilita la visualización de los campos. La forma compleja de los vectores

$$\mathbf{E} = E_x^+ e^{-jkz} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_x^+}{\eta} e^{-jkz} \hat{\mathbf{a}}_y$$
(7.86)

es realmente una descripción completa de la onda.

Como un segundo ejemplo, considere el campo dado por

$$\mathbf{E} = E_x^- e^{jkz} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_x^-}{\eta} e^{jkz} \hat{\mathbf{a}}_y$$
(7.87)

Éste también está polarizado en la dirección de *x*. Es claro que la polarización de una onda no especifica su dirección de propagación. Por ejemplo, el campo dado por

$$\mathbf{E} = \left(E_x^+ e^{-jkz} + E_x^- e^{jkz}\right) \hat{\mathbf{a}}_x$$
$$\mathbf{H} = \left(\frac{E_x^+}{\eta} e^{-jkz} - \frac{E_x^-}{\eta} e^{jkz}\right) \hat{\mathbf{a}}_y$$
(7.88)

está formado claramente por una onda polarizada en x que se desplaza en la dirección de +z más una onda polarizada en x que se desplaza en la dirección de –z, donde ambas ondas están polarizadas linealmente en la dirección de x.

Considérese ahora el caso de una onda plana uniforme que se desplaza en la dirección de +z. Sea

$$\mathbf{E} = E_x^+ e^{-jkz} \hat{\mathbf{a}}_x + E_y^+ e^{-jkz+j\phi} \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_x^+}{\eta} e^{-jkz} \hat{\mathbf{a}}_x - \frac{E_y^+}{\eta} e^{-jkz+j\phi} \hat{\mathbf{a}}_y$$
(7.89)

donde E_x^+ y E_y^+ son amplitudes complejas arbitrarias. Obviamente, el campo es la suma de ondas planas uniformes, ortogonales y polarizadas linealmente con magnitudes y fases relativas todavía no especificadas. Ambas se desplazan en la dirección +*z*. Visualizar el campo resultante no es sencillo. Si escribimos el campo $\mathbf{E}(z, t)$ instantáneo, se obtiene

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}^{+} \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{a}}_{x} + E_{y0}^{+} \cos(\omega t - kz + \phi) \hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.90)

en la cual ϕ es la fase relativa de la componente *y* de **E**(*z*, *t*) con respecto a la componente en *x*.

Examinemos el campo E(z, t) en z = 0 (el análisis aplica a cualquier otro plano z =constante). Se tiene que

$$\mathbf{E}(0, t) = E_{x0}^{+} \cos \omega t \,\hat{\mathbf{a}}_{x} + E_{y0}^{+} \cos (\omega t + \phi) \,\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.91)

En la Fig. 7.3 se muestra una gráfica de este campo instantáneo en el plano *xy*. Un análisis de la figura muestra que

$$\left| \mathbf{E}(0, t) \right|^{2} = \left(E_{x0}^{+} \right)^{2} \cos^{2} \omega t + \left(E_{y0}^{2} \right) \cos^{2} \left(\omega t + \phi \right)$$
(7.92)

y que **E**(0, *t*) forma un ángulo θ con respecto al eje *x*, dado por

$$\tan \theta = \frac{E_{y0}^+ \cos(\omega t + \phi)}{E_{x0}^+ \cos\omega t}$$
(7.93)

Las consecuencias de estas ecuaciones se aclararán si ahora se da una definición más precisa de polarización.



Figura 7.3 El valor instantáneo de **E**(0, *t*).

La polarización de una onda electromagnética se especifica mediante la curva plana, cuya ecuación paramétrica es definida por los valores instantáneos de las componentes del campo eléctrico en un punto fijo en el espacio. Una segunda definición afirma que la polarización es la curva trazada por la punto de la flecha que representa a E(0, t) en la Fig. 7.3. Las dos definiciones son idénticas. Esto es particularmente evidente si usamos E_x y E_y como las coordenadas rectangulares de la curva plana. Desde este punto de vista, a partir de la Ec. (7.91) se obtienen las ecuaciones

$$E_x = E_{x0}^+ \cos \omega t \tag{7.94}$$

$$E_{\nu} = E_{\nu 0}^{+} \cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{7.95}$$

que generalmente representan una elipse. Por esta razón se dice que la onda está *elípticamnte polarizada*, y la curva se denomina la *elipse de polarización*.

A continuación se dan como ejemplos algunos casos especiales de polarización son de interés:

Caso 1

$$\phi = 0 \tag{7.96}$$

$$E_x = E_{x0}^+ \cos \omega t, \quad E_y = E_{y0}^+ \cos \omega t$$

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{y0}^+}{E_{x0}^+}$$

El lugar geométrico es una línea recta. El campo está *polarizado linealmente* en la dirección de θ (Fig. 7.4*a*).

Caso 2

$$E_{x0}^{+} = E_{y0}^{+} = E \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$E_{x} = E \cos \omega t$$

$$E_{y} = E \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = E \sin \omega t$$
(7.97)

$$\tan \theta = \frac{E \sec \omega t}{E \cos \omega t} = \tan \omega t \tag{7.98}$$
$$\theta = \omega t$$

El campo eléctrico es constante en magnitud y gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. En este caso se dice que el campo está *polarizado circularmente* en la dirección *horaria* (de mano derecha), mirando a lo largo (no en contra) de la dirección de propagación.

Caso 3
$$E_{x0}^+ = E_{y0}^+ = E \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$
 (7.99)

Es sencillo verificar que este campo está polarizado circularmente en la dirección antihoraria (izquierda).

Caso 4

$$E_{x0}^{+} \neq E_{y0}^{+} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$E_{x} = E_{x0}^{+} \cos \omega t, \qquad E_{y} = E_{y0}^{+} \sin \omega t$$

$$\tan \theta = \frac{E_{y0}^{+}}{E_{x0}^{+}} \tan \omega t$$
(7.100)

Estas ecuaciones representan una elipse cuyos ejes mayor y menor están a lo largo de los ejes x y y y θ no es igual a ωt . La onda está *polarizada elípticamente*. El campo eléctrico gira en la dirección horaria. El *periodo* de su frecuencia de rotación lo da ω , pero su velocidad angular de rotación *no* es constante.

Caso 5
$$E_{x0}^+ \neq E_{y0}^+ \quad \varepsilon \neq \pm \frac{\pi}{2}$$
 (7.101)

Éste es el caso general de polarización elíptica (Fig. 7.4*c*). La construcción del lugar geométrico y su examen mostrará que el eje mayor de la elipse está inclinado y forma un ángulo con respecto al eje *x*; este ángulo dependerá de E_{u0}^+/E_{x0}^+ y de ϕ . De hecho, el lugar geométrico trazado por la punta del vector **E** es

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}^+}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x E_y}{E_{x0}^+ E_{y0}^+}\right) \cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{y0}^+}\right) = \sin^2\phi$$
(7.102)

una expresión que se obtiene al eliminar la variable componente ωt .

Ejemplo 3. La onda representada por

$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)$$

está polarizada linealmente en la dirección de x. En forma similar, la onda representada por

$$E_{\nu} = 4\cos(\omega t - kz)$$

está polarizada linealmente en la dirección de y. Por otra parte, la onda denotada por

$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = 4\cos(\omega t - kz)$$

también está polarizada linealmente pero en una dirección determinada por tan $\theta = 2$ (Fig. 7.4*a*).

La onda descrita por

$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = 2\cos(\omega t - kz - 90^\circ)$$

tiene polarización circular con rotación en sentido horario, en tanto que

$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = 2\cos(\omega t - kz + 90^\circ)$$

también está polarizada circularmente, pero con rotación en sentido antihorario. La última afirmación también se aplica al caso de la onda representada por

$$E_x = 2\cos(\omega t + kz)$$
$$E_y = 2\cos(\omega t + kz - 90^\circ)$$
$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = 4\cos(\omega t - kz + 60^\circ)$$

Finalmente,

es una onda polarizada elípticamente que gira en sentido antihorario. La ecuación de la elipse es



Figura 7.4 Polarización lineal, circular y elíptica para ondas que se desplazan en la dirección positiva de *z*.

7.7 Ondas Planas en Medios con Pérdidas

La ecuación de ondas libre de fuentes para el espacio libre es una ecuación vectorial de Helmholtz homogénea dada por

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7.103}$$

en la cual k₀ es el número de onda en el espacio libre

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{7.104}$$

En coordenadas cartesianas, la Ec. (7.103) es equivalente a tres ecuaciones de Helmholtz escalares, una para cada componente E_x , E_y y E_z . La ecuación correspondiente para la componente E_z es

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 E_x = 0$$
(7.105)

Para concretar, considérese una onda plana uniforme caracterizada por un campo E_x de magnitud y fase constantes en superficies planas perpendiculares a *z* (la onda es uniforme en el plano *xy*): es decir,

$$E_z = 0$$
 $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0$

Bajo estas condiciones, la Ec. (7.105) se simplifica a

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 E_x = 0 \tag{7.106}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria que depende solamente de z.

Se puede verificar fácilmente por sustitución directa, que la solución de la Ec. (7.106) tiene la forma

$$E_{x}(z) = E_{x}^{+}(z) + E_{x}^{-}(x)$$

$$= E_{0}^{+}e^{-jk_{0}z} + E_{0}^{-}e^{jk_{0}z}$$
(7.107)

en la cual E_0^+ y E_0^- son constantes arbitrarias y generalmente complejas que se deben determinar a partir de las condiciones de frontera. Observe que como la Ec. (7.106) es una ecuación de segundo orden, su solución general en la Ec. (7.107) contiene dos constantes de integración.

Usando a $\cos \omega t$ como la referencia y suponiendo que E_0^+ es una constante real (fase de referencia igual a cero en z = 0), el primer término fasorial en la Ec. (7.107) se convierte en el tiempo en

$$E_x^+(z, t) = \operatorname{Re}\left[E_x^+(z)e^{j\omega t}\right]$$

= $\operatorname{Re}\left[E_0^+e^{j(\omega t - k_0 z)}\right]$
= $E_0^+\cos(\omega t - k_0 z)$ (7.108)

La Ec. (7.108) se grafica en la Fig. 7.5 para varios valores de *t*. En t = 0, $E_x^+(z, 0) = E_0^+ \cos k_0 z$ es una curva coseno de amplitud E_0^+ . En instantes sucesivos, la curva efectivamente se desplaza en la dirección positiva de *z* y tenemos, entonces, una *onda viajera*. Si estudiamos dos puntos *P* y *P'*, donde la amplitud y la pendiente de las curvas son iguales, vemos que $\cos(\omega t - k_0 z) = \text{constante para } t = 0$, $\pi/2\omega$; esto es, los puntos *P* y *P'* son *puntos de fase constante* y se definen por

$$\omega t - k_0 z =$$
Una fase constante

y de aquí se obtiene la velocidad de fase como



Figura 7.5 Onda viajera en la dirección positiva de *z* para varios valores de *t*.

$$u_p = \frac{dz}{dt}\Big|_{\omega t - k_0 z = \text{const.}} = \frac{\omega}{k_0} = c$$
(7.109)

Esta velocidad se conoce como la *velocidad de fase* de la onda; en el espacio libre es igual a la velocidad de la luz, que es aproximadamente 3×10^8 m/s en el espacio libre.

A partir de la Fig. 7.5 se puede determinar otro parámetro descriptivo de la onda. Por la Ec. (7.104), $k_0 = 2\pi/c$ o

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{7.110}$$

la cual mide el número de longitudes de onda en un ciclo completo; esto es, los puntos separados por $k_0\Delta z = 2\pi$ se corresponden con una *longitud de onda* λ_0 . Ésta es la longitud de onda en el espacio libre y es una constante para ondas planas uniformes. Es fácil demostrar que

$$u_p = \lambda_0 f \tag{7.111}$$

donde $f = \omega/2\pi$ es la frecuencia de la onda.

Se debe recalcar que la distancia λ_0 , en la cual la fase cambia por 2π , siempre se mide a lo largo de la dirección de propagación.

Es obvio que el segundo término fasorial en el lado derecho de la Ec. (7.107), $E_0^- e^{jk_0z}$, representa una onda que se desplaza en la dirección negativa del eje *z* con la misma velocidad *c*. En una región sin fronteras, sólo estamos interesados en las ondas que se alejan; por tanto, si la fuente está en la izquierda, la onda en la dirección de –*z* no existe y $E_0^- = 0$. Sin embargo, si hay discontinuidades en el medio, también se deben considerar ondas viajeras en la dirección opuesta, como se estudiará más adelante en este capítulo.

El campo magnético asociado puede hallarse a partir de la relación $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$; esto es,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \left(\hat{\mathbf{a}}_x H_x^+ + \hat{\mathbf{a}}_y H_y^+ + \hat{\mathbf{a}}_z H_z^+ \right)$$

de donde se obtiene que

$$H_x^+ = 0 (7.112)$$

$$H_y^+ = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z}$$
(7.113)

$$H_z^+ = 0 (7.114)$$

De manera que H_y^+ es la única componente de **H** diferente de cero y puesto que

$$\frac{\partial E_{x}^{+}(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(E_{0}^{+} e^{-jk_{0}z} \right) = -jk_{0}E_{x}^{+}(z)$$

$$H_{y}^{+}(z) = \frac{k_{0}}{\omega\mu_{0}}E_{x}^{+}(z) = \frac{1}{\eta_{0}}E_{x}^{+}(z)$$
(7.115)

la Ec. (7.113) da

donde la cantidad η_0 se define como

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\eta_0}} \cong 120\pi \cong 377 \ \Omega$$
 (7.116)

y se denomina la *impedancia intrínseca del espacio libre*. Como η_0 es un número real, se tiene entonces que $H^+_{\mu}(z)$ está en fase con $E^+_{x}(z)$ y la expresión instantánea para **H** se puede escribir como

$$\mathbf{H}(z, t) = \hat{\mathbf{a}}_{y} H_{y}^{+}(z, t) = \hat{\mathbf{a}}_{y} \operatorname{Re}\left[H_{y}^{+}(z)e^{j\omega t}\right]$$
$$= \hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{E_{0}^{+}}{\eta_{0}} \cos(\omega t - k_{0}z)$$
(7.117)

Por tanto, para una onda plana uniforme, la razón de las magnitudes de **E** y **H** es la impedancia intrínseca del medio. También se observa que **H** es perpendicular a **E** y que ambos son normales a la dirección de propagación. El hecho de que se especificó $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_x H_x$ no es tan restrictivo como parece, ya que tenemos libertad para designar la dirección de **E** como la dirección +*x*, la cual es normal a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{a}}_z$.

7.8 Ondas Planas Uniformes en Medios Conductores

En esta sección se examina la conducta de ondas planas uniformes en regiones sin fronteras, libres de cargas, lineales, homogéneas e isótropas cuya conductivitas es finita pero diferente de cero. La ecuación de Helmholtz que se debe resolver es

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7.118}$$

donde el número de onda $k_c = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ es un número complejo ya que la permitividad $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$ es compleja. Para estar de acuerdo con la notación convencional usada en la transmisión y propagación de ondas electromagnéticas, se define una constante de propagación γ tal que

$$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \tag{7.119}$$

Puesto que y es compleja, se escribe en la forma

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$
$$= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$
(7.120)

Para un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ y $\beta = k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$. α es la *constante de atenuación* y β es la *constante de desplazamiento de fase*. Usando esta notación, la ecuación de Helmholtz correspondiente es

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7.121}$$

Las soluciones para una onda plana uniforme en el plano xy tienen la forma

$$E = E_{x}^{+} e^{-\gamma z} + E_{x}^{-} e^{+\gamma z}$$
(7.122)

donde se tomó a la onda polarizada en la dirección de *x*. En términos de $\alpha + j\beta$, la Ec. (7.122) puede escribirse en la forma

$$E_{x} = E_{x}^{+} e^{-\alpha z - j\beta z} + E_{x}^{-} e^{+\alpha z + j\beta z}$$
(7.123)

En la Ec. (7.123) es obvio que la onda resultante está formada por dos componentes, una componente que se desplaza en la dirección positiva de *z* con una amplitud $E_x^+ e^{-\alpha z}$ y una componente que se desplaza en la dirección negativa de *z* con una amplitud $E_x^- e^{+\alpha z}$. Ambas componentes son atenuadas exponencialmente en la dirección de propagación, lo que nos dice que las pérdidas óhmicas en el medio conductor resultan en una atenuación exponencial de la amplitud de la onda.

Un análisis similar al que se hizo en la sección anterior produce los resultados siguientes para el campo H:

$$H_{y}^{+} = \frac{1}{\eta} E_{x}^{+}$$

$$H_{y}^{-} = -\frac{1}{\eta} E_{y}^{-}$$
(7.124)

donde la *impedancia intrínseca* η es dada por

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$
(7.125)

que son formalmente las mismas relaciones que las obtenidas para el caso sin pérdidas ($\sigma = 0$) y la única diferencia está en la definición de la impedancia intrínseca.

La naturaleza compleja de la impedancia intrínseca implica que, aunque los vectores de los campos eléctrico y magnético de una onda plana uniforme en medios conductores todavía son ortogonales entre sí y transversales a la dirección de propagación, ya no están en fase entre ellos.

Todavía necesitamos obtener expresiones explícitas para α y β . Haciendo

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

y luego expandiendo,

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$$

e igualando las partes real e imaginaria, se obtiene

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon$$
$$2\alpha\beta = \omega \mu \varepsilon$$

Este par puede resolverse simultáneamente para obtener

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)} - 1 \right] \right\}^{1/2}$$
(7.126)

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)} + 1 \right] \right\}^{1/2}$$
(7.127)

Aunque estas dos ecuaciones dan resultados exactos, su forma no proporciona una buena explicación sobre su significado. Como una cosa práctica, la mayoría de los materiales cae en una de dos amplias categorías, las cuales denominamos *buenos conductores* y *buenos dieléctricos*. A continuación se describe su conducta.

Clase 1. Buenos Conductores. Por convención, un buen conductor se define como el caso para el cual

La definición depende tanto de la frecuencia como de la conductividad. La mayoría de los conductores metálicos son buenos conductores a frecuencias inferiores a 10¹⁰ Hz. Por tanto, para buenos conductores, de las Ecs. (7.126) y (7.127) se deduce que

 $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \gg 1$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \gg \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^{\circ}$$
(7.128)

Esta relación implica que la onda es atenuada muy rápidamente, que su velocidad de fase

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$
(7.129)

es muy baja comparada con la velocidad de fase en medios sin pérdidas (por ejemplo, en el cobre, $u_p = 720$ m/s, muchos órdenes de magnitud menor que la velocidad de la luz en el aire), no disipativos, y que el vector del campo E adelanta a su vector del campo H asociado por 45°.

Para buenos conductores, se define una distancia denominada la profundidad pelicular o profundidad de *penetración*, δ , como la distancia en la cual la amplitud de la onda ha decaído a 1/e de su valor inicial (en la superficie). Si se considera el primer término en la derecha de la Ec. (7.123), se observa que

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{7.130}$$

Puesto que $\alpha = \beta$ para un buen conductor, δ también puede escribirse como

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \tag{7.131}$$

La profundidad de penetración δ es muy pequeña para buenos conductores a frecuencias altas. Típicamente, para el cobre, $\delta = 0.85$ cm a 60 Hz y $\delta = 0.007$ cm a 10^6 Hz. A frecuencias de microondas, la profundidad de penetración de un buen conductor es tan pequeña que, para todos los propósitos prácticos, se puede considerar que los campos y corrientes están confinados a una capa muy delgada de la superficie del conductor.

Clase 2. Buenos Dieléctricos. Un buen dieléctrico se define como el caso donde

$$\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \ll 1$$

Aquí es necesario usar la expansión binomial de las expresiones exactas para α y β . Reteniendo solamente los términos dominantes, se obtiene

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \cdots \right] \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$
(7.132)
(7.133)

(7.133)

y también

Se ve entonces que para buenos dieléctricos, la constante de atenuación es aproximadamente directamente proporcional a la conductividad σ y la onda es atenuada muy lentamente, también que la velocidad de fase tiene casi el mismo valor, tiene muy poca desviación del valor $\omega \sqrt{\mu \epsilon}$, como si el medio fuese no disipativo y el vector **E** y el vector de su campo **H** asociado están casi en fase.

7.9 Ondas Electromagnéticas Transversales (EMT)

Ahora se considerará el problema general de la propagación de ondas planas uniformes a lo largo de un eje especificado, orientado en una forma completamente arbitraria en relación con un sistema de coordenadas cartesianas. Para establecer referencias, se supone que una onda EMT se propaga en una dirección fijada por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ (Fig. 7.6), de modo que, en todo instante, los vectores **E** y **H** son constantes tanto en magnitud como en dirección en los planos definidos por

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \text{constante}$$
 (7.134)

donde

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z \tag{7.135}$$



Plano de fase

Figura 7.6 Orientación espacial de una onda EMT viajando en la dirección de \hat{n} .

Si se define un vector número de onda como

 $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{a}}_x + k_y \hat{\mathbf{a}}_y + k_z \hat{\mathbf{a}}_z \tag{7.136}$

donde

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$
 (7.137)

se puede demostrar que una solución admisible a la ecuación de Helmholtz homogénea es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-jk\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}$$
(7.138)

En una región libre de cargas, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y, por tanto

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \left(e^{-jk \,\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \right) = 0 \tag{7.139}$$

Pero

$$\nabla \left(e^{-jk\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}} \right) = \left(\hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$
$$= -\left(\hat{\mathbf{a}}_x k_x + \hat{\mathbf{a}}_y k_y + \hat{\mathbf{a}}_z k_z \right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$
$$= -jk\,\hat{\mathbf{n}}\,e^{-jk\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}$$

y la Ec. (7.139) puede escribirse como

$$-j(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})e^{-jk\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}} = 0$$

lo que requiere que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \tag{7.140}$$

De modo que la solución de ondas planas en la Ec. (7.138) implica que E_0 sea transversal a la dirección de propagación.

El campo magnético asociado con $E(\mathbf{r})$ en la Ec. (7.138) puede obtenerse a partir de la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ como

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$
(7.141)

donde

0

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$
(7.142)

es la *impedancia intrínseca* (o la *impedancia de la onda*) del medio. Sustituyendo ahora la Ec. (7.138) en la Ec. (7.141) produce el campo asociado

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0) e^{-jk\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}$$
(7.143)

y está claro que una onda plana uniforme que se propaga en una dirección \hat{n} arbitraria es una onda electromagnética transversal (EMT) con E perpendicular a H y ambos perpendiculares a la dirección de propagación \hat{n} .

Es relativamente sencillo demostrar que en términos de la constante de propagación compleja γ :

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + j \omega \mu \varepsilon \tag{7.144}$$

las ecuaciones anteriores para una onda electromagnética transversal pueden escribirse como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma \mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{-j\gamma}{\omega \mu} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0) e^{-\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}$$
(7.145)

Se debe señalar que también se cumple la condición expresada en la Ec. (7.140).

7.10 Velocidad de Grupo

Considérese la propagación de ondas planas en un medio en el cual ondas de frecuencias diferentes se desplazan con velocidades de fase diferentes. Puesto que toda la información se transmite en la forma de señales, las cuales están compuestas por componentes de diferentes frecuencias, está claro que a medida que una señal se desplaza por un medio así, ocurrirá un desplazamiento de fase relativo de las diferentes componentes de la señal, y la señal reconstruida en algún punto receptor lejano no será una réplica verdadera de la forma de onda transmitida. Se dice entonces que resulta *distorsión* debido a la naturaleza *dispersiva* del medio.

Una pregunta importante que debe responderse es precisamente lo que se entiende por velocidad de la onda cuando se tiene dispersión, que es más bien la regla y no la excepción. Estrictamente hablando, el concepto de velocidad de fase se aplica a una onda infinita de una sola frecuencia. Por tanto, cuando hablamos de la velocidad de una onda que contiene muchas componentes de frecuencia y desplazándose en un medio dispersivo, debemos pensar en la velocidad de alguna "forma" que todavía no se ha definido. Pero si la forma cambia en algo con la distancia, se pierde el punto de referencia. ¿Qué se entiende entonces por *velocidad*?

315

Para responder esta pregunta, se necesita introducir el concepto de *velocidad de grupo*. Al inicio de este capítulo vimos que la componente *x* o *y* de cualquier vector electromagnético asociado con una onda que se desplaza en la dirección *z* satisface una ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \gamma^2 \Psi = 0 \tag{7.146}$$

donde

$$\gamma^{2} = (\alpha + j\beta)^{2} = -\omega^{2}\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma \qquad (7.147)$$

En un medio no conductor (σ = 0), la Ec. (7.146) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \beta^2 \Psi = 0 \tag{7.148}$$

donde

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \tag{7.149}$$

y tiene una solución particular de la forma

$$\Psi(z,t) = Ae^{j(\omega t - \beta z)} + Be^{j(\omega t + \beta z)}$$
(7.150)

Aquí, tanto *A* como *B* son escalares o, como máximo, funciones complejas de la frecuencia. Para los objetivos del análisis, sólo se considerará la onda que viaja en la dirección positiva de *z*. Entonces

$$\Psi(z,t) = Ae^{j(\omega t - \beta z)} \tag{7.151}$$

Como la Ec. (7.146) es lineal, su solución general puede construirse como una superposición lineal de soluciones de la forma (7.151) para una gama de la frecuencia angular ω. Para ondas verdaderamente periódicas, la sumatoria se extenderá sobre un conjunto discreto de frecuencias. Para ondas no periódicas o para ondas periódicas de duración finita, la sumatoria se extenderá en forma continua sobre todo el espectro de frecuencias. En estos casos, una onda no periódica se representará por la integral

$$\Psi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega$$
(7.152)

Ahora bien, la Ec. (7.149) muestra una relación explícita entre β y ω . En un medio no dispersivo, esta relación es puramente lineal. Sin embargo, en un medio dispersivo, la relación entre β y ω es generalmente no lineal, como muestra la curva típica mostrada en la Fig. 7.7. Para permitir la posibilidad de dispersión, se considerará a ω como una función arbitraria de β , $\omega = \omega(\beta)$. Pero cualquiera sea la dependencia real, ya sea β u ω puede tomarse como la variable independiente cuando se consideran sumatorias de soluciones particulares de la forma de la Ec. (7.151). Entonces, en lugar de la Ec. (7.152), podemos escribir

$$\Psi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\beta) e^{j(\omega t - \beta z)} d\beta$$
(7.153)

donde, obviamente, $A(\beta)$ es una función diferente de $A(\omega)$ en la Ec. (7.152).

Supóngase ahora que la onda es casi periódica, de manera que la señal está *limitada en banda*; esto es, $A(\beta)$ es virtualmente cero en todas partes excepto en un pequeño intervalo $\beta_1 \le \beta \le \beta_2$. En este caso, los límites de integración pueden cambiarse para obtener

$$\Psi(z, t) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} A(\beta) e^{j(\omega t - \beta z)} d\beta$$
(7.154)

en tanto que la frecuencia angular ω puede representarse por los primeros dos términos de la expansión en serie de Taylor de $\omega(\beta)$ en torno a β_0 , donde $\beta_1 \le \beta_0 \le \beta_2$. Por tanto,


Figura 7.7 Gráficas de ω-β típicas para medios dispersivos y no dispersivos.

$$\omega(\beta) \approx \omega(\beta_0) + (\beta - \beta_0) \frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta}$$
(7.155)

y

$$\omega t - \beta z \approx (\omega_0 t - \beta_0 z) + (\beta - \beta_0) \left[\frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta} t - z \right]$$
(7.156)

Si se toma $\omega_0 = \omega(\beta_0)$ y si sumamos y restamos el término $\beta_0 z$ del lado derecho de la Ec. (7.156), se obtiene

$$\omega t - \beta z \approx (\omega_0 t - \beta_0 z) + (\beta - \beta_0) \left[\frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta} t - z \right]$$
(7.157)

La Ec. (7.154) se convierte entonces en

$$\Psi(z, t) = \Psi_0(z, t) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$
(7.158)

donde la amplitud

$$\Psi_{0}(z,t) = \int_{\beta_{1}}^{\beta_{2}} A(\beta) \exp\left\{j(\beta - \beta_{0}) \left[\frac{d\omega(\beta_{0})}{d\beta}t - z\right]\right\} d\beta$$
(7.159)

es sólo una función de *z* y *t*, una vez que se realiza la integración con respecto a β. Claramente, la magnitud de ψ_0 es constante en las superficies definidas por

$$\frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta}t - z = \text{constante}$$
(7.160)

de lo cual se concluye que la "forma" que se mencionó anteriormente, la cual se conoce como el *paquete de la onda*, o el *grupo*, se propaga con la *velocidad de grupo*

$$v_g = \frac{d\omega(\beta_0)}{d\beta} \tag{7.161}$$

Como muestra la Fig. 7.7, v_g es la pendiente del diagrama de ω - β evaluada en β_0 . En medios dispersivos, esta pendiente difiere de la razón ω_0/β_0 , que es la velocidad de fase para una frecuencia en particular. Sin embargo, en medios no dispersivos, la velocidad de grupo y la velocidad de fase son las mismas, ya que la pendiente de una línea recta [Ec. (7.149)] es precisamente la razón de la ordenada a la abscisa en cualquier a lo largo de la recta $(v_p = \omega/\beta = c \implies v_g = d\omega/d\beta = c)$. Las ondas de diferentes frecuencias se propagarán con diferentes velocidades de fase. Puesto que todas las señales portadoras de información están conformadas por una banda de frecuencias, las ondas de las frecuencias componentes se desplazan con diferentes velocidades de fase

produciendo distorsión en la forma de la onda. Este fenómeno de distorsión de la señal ocasionado por una velocidad de fase que depende de la frecuencia se denomina *dispersión*.

La señal portadora de información normalmente tiene una pequeña dispersión de las frecuencias alrededor de una frecuencia portadora. Una señal así está compuesta por un "grupo" de frecuencias y forma un paquete de ondas. Una *velocidad de grupo*, como ya se mencionó, es la velocidad de propagación de la envolvente de ese paquete. Esto se ilustra mejor mediante un ejemplo.

Ejemplo 5. Como un ejemplo, considérese el caso de una señal formada por dos ondas armónicas que sólo difieren ligeramente en ω y β . Se supondrá que las componentes de las dos señales son

$$\psi_1 = A \cos \left[(\omega + \Delta \omega) t - (\beta + \Delta \beta) z \right]$$

$$\psi_2 = A \cos \left[(\omega - \Delta \omega) t - (\beta - \Delta \beta) z \right]$$

donde A es una constante escalar. Entonces la señal obtenida por superposición de ψ_1 y ψ_2 es

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos(t\,\Delta\omega - z\,\Delta\beta)\cos(\omega t - \beta z)$$

la cual tiene una amplitud igual a

$$2A\cos(t\Delta\omega-z\Delta\beta)$$

que es una función de la distancia y el tiempo y, por tanto, representa una onda cuya frecuencia es muy pequeña en comparación con ω . En un instante determinado, una gráfica de ψ versus ω aparece como una serie de grupos repetidos periódicamente, como se muestra en la Fig. 7.8, que se desplazan rápidamente con la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta}$$

Por otra parte, la onda dentro de la envolvente representada por

$$\cos(\omega t - \beta z)$$

varía más rápidamente a lo largo del eje del tiempo y se mueve más lentamente a lo largo del eje espacial con la velocidad de fase

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

y aparece como si se deslizase a través de la envolvente de los grupos.



Figura 7.8 Un paquete de ondas sencillo.

7.11 Ondas en Medios Anisótropos

Hasta ahora hemos estado analizando el comportamiento de ondas en medios homogéneos e isótropos en los cuales **D** y **E** son vectores paralelos relacionados a través de la constante escalar ε . El hecho de que ε sea una cantidad escalar implica que cada componente de **D** está relacionada linealmente sólo con la componente respectiva de **E** y donde la constante de proporcionalidad es la misma para cada componente. En un medio anisótropo en el cual las propiedades son diferentes en diferentes direcciones, cada componente de **D** es en general una función de las otras tres componentes de **E**. Por tanto,

$$D_{x} = \varepsilon_{xx}D_{x} + \varepsilon_{xy}E_{y} + \varepsilon_{xz}E_{z}$$

$$D_{y} = \varepsilon_{yx}D_{x} + \varepsilon_{yy}E_{y} + \varepsilon_{yz}E_{z}$$

$$D_{z} = \varepsilon_{zx}D_{x} + \varepsilon_{zy}E_{y} + \varepsilon_{zz}E_{z}$$
(7.162)

en la cual los ε_{ij} son elementos de un tensor y sus valores dependen de la orientación del eje de referencia. Para cualquier conjunto de ejes, resulta que $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ y $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$; es decir, el tensor es simétrico. Lo que es todavía mejor, existe una opción de ejes para este tensor simétrico en el cual $\varepsilon_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Este conjunto de ejes siempre puede hallarse para un tensor simétrico sin una pérdida de generalidad. En este caso, la Ec. (7.162) se convierte en

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z \tag{7.163}$$

El análisis en estos casos es algo más complicado y no se tratará en este texto.

7.12 Propagación de Ondas en un Plasma

Aquí la palabra *plasma* denota un conjunto de partículas cargadas en las cuales el promedio en el tiempo de la densidad de carga es igual a cero. Es decir, el número de partículas negativas por unidad de volumen es igual al número de partículas por unidad de volumen si todas las partículas tienen la misma magnitud de carga. Así, un plasma se forma siempre que los átomos en un gas son ionizados para producir números iguales de iones y electrones, como por ejemplo en la ionosfera de la tierra o en ciertas regiones de un tubo de descarga. Si un plasma se perturba, se establecen poderosas fuerzas de restauración que tienden a que las partículas se muevan en forma oscilatoria en torno a sus posiciones de equilibrio.

El movimiento de un plasma más elemental es la oscilación de una lámina de plasma infinita. Supóngase que las partículas positivas y negativas están desplazadas de sus posiciones respectivas una pequeña distancia *x*, como se muestra en la Fig. 7.9. Si el espesor *d* es pequeño, el campo *E* variable en el tiempo en el interior de la lámina puede calcularse usando conceptos de electrostática. Las cargas en exceso a cada lado de la lámina constituyen hojas de carga y si la densidad de las partículas cargadas (ya sean positivas o negativas) es *N* entonces la densidad de carga superficial a cada lado de la lámina es

$$\rho_s = Nex (C/m^2)$$

en la cual *e* es positiva para la hoja del lado izquierdo y negativa para la hoja del lado derecho. Al aplicar la ley de Gauss se obtiene el campo en el interior de la lámina como

$$E = \frac{N |e|x}{\varepsilon_0} \tag{7.164}$$

la cual dice que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento, lo cual es la condición para el *movimiento armónico simple*.

+ + + + + + +	$\begin{array}{c} + + + + + + \\ + + + + + \\ + + + +$		
0 :	x i	d d	+x

Figura 7.9 Desplazamiento de las partículas positivas y negativas en una lámina de plasma.

En un plasma, las partículas positivas son normalmente iones y como su masa es mucho mayor que la de los electrones negativos, se puede considerar que se mantienen estacionarios. Entonces para los electrones, la ecuación de movimiento es de la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0}x\tag{7.165}$$

Esta ecuación es válida siempre y cuando las partículas cargadas no choquen entre sí o cualesquiera partículas cargadas que puedan estar presentes. Estas ecuaciones describen oscilaciones que ocurren con una frecuencia fija ω_p , denomina la *frecuencia angular de plasma*, una característica del medio ionizado, y la cual es dada por

$$\omega_{p} = \sqrt{\frac{Ne^{2}}{m\varepsilon_{0}}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_{p} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^{2}}{m\varepsilon_{0}}} \quad \text{Hz}$$
(7.166)

Esta última ecuación permite escribir la Ec. (7.165) en la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_p^2 x \tag{7.167}$$

la cual tiene la solución

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega_p t + C_2 \cos \omega_p t \tag{7.168}$$

Esta solución da el desplazamiento *x* para las oscilaciones *libres* de la lámina de plasma, las cuales solamente pueden existir a la frecuencia de plasma.

Si el campo *E* es armónico con una frecuencia angular ω , entonces para un electrón de carga –*e* y masa *m*, la Ec. (7.165) también puede escribirse como

$$-eE = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

Es decir, la separación x entre un electrón y un ión positivo es dada por

$$x = \frac{e}{m\omega^2}E\tag{7.169}$$

Este desplazamiento produce un dipolo de momento igual a p = -ex. Si se hay N electrones por unidad de volumen, se tiene entonces un vector de polarización de magnitud

$$P = Np = -\frac{Ne^2}{m\omega^2}E\tag{7.170}$$

El vector correspondiente al desplazamiento eléctrico D es entonces

$$\mathbf{D} = \mathbf{\varepsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{\varepsilon}_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2 \mathbf{\varepsilon}_0} \right) \mathbf{E}$$

= $\mathbf{\varepsilon}_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E}$ (7.171)

donde ω_p es la *frecuencia angular del plasma* dada por la Ec. (7.166). Por tanto, la permitividad equivalente del plasma es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \left(1 - \frac{\boldsymbol{\omega}_p^2}{\boldsymbol{\omega}^2} \right) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right)$$
(7.172)

Con base en la Ec. (7.172), la constante de propagación es

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \tag{7.173}$$

y la impedancia intrínseca es

$$\eta_p = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}} \tag{7.174}$$

Observe en la Ec. (7.172) el fenómeno de una permitividad ε que desaparece cuando *f* tiende a f_p . Cuando ε se hace cero, el desplazamiento eléctrico **D** (que dependen de las cargas libres) también se hace cero aun cuando la intensidad del campo eléctrico **E** no sea cero. En este caso sería posible que exista un campo **E** oscilatoria en el plasma en la ausencia de cargas libres, lo que conduce a una *oscilación del plasma*.

Cuando $f < f_p$, la constante de propagación γ se torna puramente real, lo que constituye una atenuación sin propagación; al mismo tiempo, η_p se vuelve imaginaria pura, lo que indica una carga reactiva sin transmisión de potencia. Por esta razón a f_p también se le conoce como la *frecuencia de corte*. Más adelante se analizará la reflexión y transmisión de ondas bajo diferentes condiciones. Cuando $f > f_p$, la constante de propagación es imaginaria pura y en el plasma se propagan ondas electromagnéticas con pérdidas despreciables.

7.13 Reflexión y Refracción de Ondas Planas

Físicamente, las ondas electromagnéticas con frecuencia encuentran obstáculos en sus trayectorias de propagación. En estos casos, la onda induce corrientes de conducción en el obstáculo, si el objeto es metálico, o corrientes de polarización si el objeto es un aislador. Estas corrientes, por supuesto, son fuentes de un campo electromagnético secundario. Este campo se conoce como el *campo disperso* y el proceso que crea se denomina *dispersión de ondas electromagnéticas*. Los objetos u obstáculos se denominan *dispersores*.

La determinación de los campos dispersos es en general un problema difícil de resolver hasta en los casos más sencillos. Sin embargo, hay una clase de problemas para los cuales la determinación del campo disperso es bastante sencilla. Cuando una onda electromagnética *plana* incide en una frontera *plana* entre dos medios *homogéneos*, las ondas dispersas también son ondas planas. Una de estas ondas es radiada de regreso hacia el semiespacio de la onda incidente: esta onda se conoce como la *onda reflejada*. También hay una onda el otro semiespacio (excepto en el caso de un conductor perfecto), la cual se propaga generalmente en una dirección diferente de la de la onda incidente; esta onda se conoce como la *onda refractada* o *transmitida*.

Por supuesto, la geometría utilizada para la descripción es idealizada. No obstante, los resultados que se obtienen son de mucha importancia ya que muchos problemas reales pueden resolverse en esta forma con precisión más que adecuada.

7.13.1. Incidencia Normal Sobre un Plano Conductor Perfecto

El caso más sencillo de la reflexión de ondas es cuando una onda plana uniforme choca normalmente con la interfaz plana entre un dieléctrico perfecto, de parámetros ε y μ , y un conductor perfecto. Supóngase que la interfaz está en z = 0 y que la onda tiene componentes E_x y H_y con frecuencia angular ω , como se indica en la Fig. 7.10. Se quiere determinar la onda resultante para $z \le 9$. Ya se sabe que no hay campo en el interior del conductor perfecto.



Figura 7.10 Incidencia normal de una onda plana en una internaza dieléctrico – conductor perfecto.

El proceso físico de la dispersión de la onda en este caso es bastante claro. La onda incidente induce corrientes y cargas solamente en la superficie del conductor perfecto. Puesto que en el interior del conductor no existe un campo, se puede considerar que esta capa de corrientes y cargas existe en un dieléctrico homogéneo de parámetros ε y μ . La distribución de estas fuentes debe ser tal que su campo cancela completamente el campo incidente en el interior del conductor (esto es, para z > 0). Por tanto, sabemos que el campo disperso para z > 0 tiene exactamente la misma amplitud que el campo incidente pero con un desfase de π radianes. La lámina de corriente obviamente produce un campo simétrico en el semiespacio z < 0, es decir, una onda plana que se propaga de regreso en la dirección negativa del eje z. Esta onda reradiada es la onda reflejada. Este razonamiento nos dice entonces que la onda reflejada tiene la misma amplitud que la onda incidente. En z = 0, su campo **E** es el mismo que el del campo incidente, pero en la dirección opuesta. Supóngase entonces que la onda incidente se representa por

$$\mathbf{E}_{i}(z) = E e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{a}}_{x} \qquad \mathbf{H}_{i}(z) = H e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.175)

donde $E/H = \eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ es la *impedancia intrínseca* del medio. La onda reflejada tiene entonces la forma

$$\mathbf{E}_{r}(z) = -Ee^{+j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{x} \qquad \mathbf{H}_{r}(z) = He^{+j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.176)

El vector de Poynting para la onda reflejada está orientado en la dirección -z, y esto determina el signo de $\mathbf{H}_r(z)$.

El campo total para z < 0 se obtiene como una superposición de las ondas en las Ecs. (7.175) y (7.176):

$$\mathbf{E}_{\text{tot}}(z) = \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = E\left(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}\right)\hat{\mathbf{a}}_x = -2jE \operatorname{sen}\beta z \,\hat{\mathbf{a}}_x \tag{7.177}$$

$$\mathbf{H}_{\text{tot}}(z) = \mathbf{H}_{i}(z) + \mathbf{H}_{r}(z) = H\left(e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}\right)\hat{\mathbf{a}}_{y} = 2E\cos\beta z\,\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.178)

Los valores instantáneos de los dos campos son entonces

$$\mathbf{E}_{\text{tot}}(z,t) = 2E\sqrt{2}\operatorname{sen}\beta z\cos(\omega t - \pi/2)\hat{\mathbf{a}}_{x} = 2E\sqrt{2}\operatorname{sen}\beta z\operatorname{sen}\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_{x}$$
(7.179)

$$\mathbf{H}_{\text{tot}}(z,t) = 2H\sqrt{2}\cos\beta z\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_{\nu} \tag{7.180}$$

Las ondas totales *no contienen* el factor $e^{\pm j\beta z}$. Por tanto, la onda total en el medio dieléctrico (z < 0) no es una onda viajera. Es una *onda estacionaria*, la cual resulta de la superposición de las dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Para un valor de *t* dado, tanto E_{tot} como H_{tot} varían sinusoidalmente con la distancia medida al plano de frontera. Las ondas estacionarias se muestran en la Fig. 7.11. Existen planos en los cuales $E_{tot}(z, t)$ es cero todo el tiempo. Estos planos se definen por $\beta z = -n\pi$, n = 0, 1, 2, ... En forma similar, el campo magnético es cero en todos los instantes en planos definidos por $\beta z = -(2n+1)\pi/2$, n = 0, 1, 2, ... Por tanto, la onda total en efecto permanece donde está, solamente pulsando en el tiempo de acuerdo con la ley seno (el campo *E*) o la ley coseno (el campo *H*. Las expresiones que describen una onda en la cual el tiempo y las coordenadas espaciales son como en las Ecs. (7.177) y (7.178) en notación compleja, o como en las Ecs. (7.179) y (7.180) en el dominio del tiempo, siempre representan ondas estacionarias.

Ejemplo 6. El resonador de Fabry-Perot. Considérese una vez más el caso de una onda plana reflejándose en un plano conductor perfecto, el cual se comporta como un espejo. Observe que según la Ec. (7.179), $E_{tot}(-n\lambda/2, t) = 0$ todo el tiempo en los planos $z = -n\lambda/2$, n = 1, 2, ... El vector del campo eléctrico es tangencial a estos planos. Por tanto, si se coloca una lámina perfectamente conductora en cualquiera de estos planos (es decir, para cualquier *n*), nada cambiará, ya que la condición de frontera en el plano para el vector **E** se satisface de forma automática. En esta forma, se obtiene una región semi infinita a la izquierda de la lámina con la onda estacionaria, y una región entre el espejo original y la lámina en la cual los *campos eléctrico y magnético oscilan* como en la Fig. 7.11. Cuando el campo eléctrico es máximo, el campo magnético es cero, y viceversa. Esto significa que en la región entre los dos espejos, la energía eléctricos resonantes. Se puede concluir que, desde un punto de vista de energía, justo como en un circuito *LC*, éste es un resonador, pero un *resonador espacial*. Este tipo particular de resonador se conoce como el *resonador de Fabry-Perot* y se usa extensivamente en óptica y en frecuencias de ondas milimétricas y microondas.



Figura 7.11 Onda estacionaria de E_{total} para un valor de ωt .

El resonador de Fabry-Perot tiene una propiedad muy útil. Observe que sólo existen pérdidas en el plano original y en la lámina, debido al efecto piel y a la conductividad finita del metal. Sin embargo, la energía electromagnética localizada en el resonador aumenta con el número n, es decir, con el número de medias longitudes de onda contenidas en la región entre los dos espejos. Para frecuencias altas (por ejemplo, en la región de microondas o en óptica), n puede hacerse muy grande con dimensiones razonables del resonador Por ejemplo, a 30 GHz, la longitud de onda es 1 cm, y un resonador de 10 cm de longitud tiene n = 20. Por tanto, el resonador de Fabry-Perot puede tener una razón grande entre la energía almacenada en el resonador y las pérdidas en un ciclo. Sabemos que esta razón es proporcional al factor de calidad del resonador (el factor Q). Por

tanto, el factor Q de un resonador de Fabry-Perot puede ser extremadamente grande (del orden de los diez miles) cuando se compara con el de un circuito resonando (el cual tiene un factor de aproximadamente cien). Por supuesto, debido al tamaño finito de las placas en la realidad, siempre habrá alguna fuga de energía electromagnética del resonador, la cual no se toma en cuenta en este análisis simplificado. También, normalmente se saca energía del resonador: por ejemplo, uno de los espejos puede ser parcialmente transparente de modo que no toda la energía es reflejada de regreso a la cavidad. Esto tampoco se toma en cuenta en este análisis simplificado.

7.13.2. Incidencia Normal Sobre una Superficie Plana Entre Dos Medios Dieléctricos

Considérense dos medios dieléctricos sin pérdidas de parámetros ε_1 y μ_1 y ε_2 y μ_2 , respectivamente, separados por una interfaz plana, como en la Fig. 7.12. Suponga que la onda incidente, con un campo eléctrico E_{1i} y de frecuencia angular ω , se propaga en el medio 1 hasta la interfaz, normal a ella y con el vector **E** paralelo al eje *x*.



Figura 7.12 Dos medios dieléctricos separados por una interfaz plana.

Una parte de la energía electromagnética incidente se reflejará en la interfaz y una parte se transmitirá hacia el medio 2. Suponga que las direcciones de referencia del campo *E* para las ondas reflejada y transmitida son como si indica. Las direcciones de referencia del campo *H* para las tres ondas son entonces como se muestra en la figura.

Se quiere determinar las intensidades relativas E_{1r} y E_2 en z = 0 del campo E para las ondas transmitida y reflejada. Para hacer esto, primero se necesitan las expresiones para los campos. Con las direcciones de referencia adoptadas para los vectores en la Fig. 7.12, las ondas tienen las formas

$$\mathbf{E}_{i}(z) = E_{1i}e^{-j\beta_{1}z}\hat{\mathbf{a}}_{x}, \qquad \mathbf{H}_{i}(z) = \frac{E_{1i}}{\eta_{1}}e^{-j\beta_{1}z}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.181)

$$\mathbf{E}_{r}(z) = E_{1r}e^{+j\beta_{1}z}\hat{\mathbf{a}}_{x}, \quad \mathbf{H}_{r}(z) = -\frac{E_{1r}}{\eta_{1}}e^{+j\beta_{1}z}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.182)

$$\mathbf{E}_{t}(z) = E_{2}e^{-j\beta_{2}z}\hat{\mathbf{a}}_{x}, \qquad \mathbf{H}_{t}(z) = \frac{E_{2}}{\eta_{2}}e^{-j\beta_{2}z}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
 (7.183)

Ahora se pueden escribir las condiciones de que las componentes tangenciales de los vectores totales E y H en ambos lados de la interfaz deben ser iguales:

$$E_{1i} + E_{1r} = E_2, \qquad \frac{E_{1i}}{\eta_1} - \frac{E_{1r}}{\eta_1} = \frac{E_2}{\eta_2}$$
 (7.184)

Resolviendo estas ecuaciones por E_{1r} y E_2 , se obtiene

$$E_{1r} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{1i}, \qquad E_2 = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{1i}$$
(7.185)

La razón E_{1r}/E_{1i} se conoce como el *coeficiente de reflexión* y la razón E_2/E_{1i} se denomina el *coeficiente de transmisión*:

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \text{(coeficiente de reflexión)} \tag{7.186}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \text{(coeficiente de transmisión)} \tag{7.187}$$

Observe que el coeficiente de reflexión ρ en la Ec. (7.186) puede ser positivo o negativo, dependiendo de si η_2 es mayor o menor que η_1 . Sin embargo, el coeficiente de transmisión τ siempre es positivo. Observe también que ρ y τ en la forma que se acaban de derivar se definen con respecto a las mismas direcciones de referencia de las tres componentes del *campo eléctrico* de las tres ondas.

Los coeficientes de reflexión y transmisión están relacionados por la ecuación

$$1 + \rho = \tau \tag{7.188}$$

Si el medio 2 es un conductor perfecto, $\eta_2 = 0$, y entonces $\rho = -1$ y $\tau = 0$. Por tanto, $E_{1r} = -E_{1i}$ y $E_2 = 0$. La onda incidente es reflejada completamente y se producirá una onda estacionaria en el medio 1.

En el medio 2 sólo hay la onda progresiva transmitida. Sin embargo, en el medio 1 tenemos la onda incidente y la reflejada, y el campo total es la suma de las dos:

$$\mathbf{E}_{1}(z) = \mathbf{E}_{i}(z) + \mathbf{E}_{r}(z) = E_{1i}e^{-j\beta_{1}z} \left(1 + \rho e^{+j2\beta_{1}z}\right) \hat{\mathbf{a}}_{x}$$
(7.189)

Para medios no disipativos (sin pérdidas), η_1 y η_2 son reales y ρ y τ también lo son. Sin embargo, como ya se mencionó, ρ puede ser positivo o negativo.

Si $\rho > 0$ (es decir, si $\eta_2 > \eta_1$), la expresión entre paréntesis en la Ec. (7.189) tiene su valor mayor, igual a $(1+\rho)$, en planos definidos por la ecuación

$$2\beta_1 z_{\text{máx}} = -2n\pi$$
 o $z_{\text{máx}} = \frac{-n\pi}{\beta_1} = -\frac{n\lambda_1}{2}, \quad n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots$ (7.190)

La expresión es mínima, igual a $(1-\rho)$, en planos definidos por

$$z_{\min} = -(2n+1)\frac{\lambda_1}{4}, \quad n = 0, 1, \dots$$
 (7.191)

Si $\rho < 0$ (es decir, $\eta_2 < \eta_1$), $z_{máx}$ y $z_{mín}$ simplemente intercambian sus sitios.

La onda resultante en el medio 1 puede visualizarse como una suma de una onda progresiva de valor efectivo (rms) igual a $(1-|\rho|)E_{1i}$ y una onda estacionaria de valor rms (en el máximo de la onda estacionaria) igual a $2|\rho|E_{1i}$. Esto se hace evidente si la Ec. (7.189) se reescribe en la forma

$$\mathbf{E}_{1}(z) = (1-\rho) E_{1i} e^{-j\beta_{1}z} \hat{\mathbf{a}}_{x} + 2\rho E_{1i} \cos\beta_{1}z \, \hat{\mathbf{a}}_{x} \quad (\rho > 0)$$
(7.192)

0

$$\mathbf{E}_{1}(z) = (1+\rho)E_{1i}e^{-j\beta_{1}z}\hat{\mathbf{a}}_{x} + 2j\rho E_{1i}\sin\beta_{1}z\,\hat{\mathbf{a}}_{x} \quad (\rho < 0)$$
(7.193)

La razón

$$ROE = \frac{|E_1(z)|_{máx}}{|E_1(z)|_{mín}} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$$
(7.194)

se conoce como la *razón de onda estacionaria* (ROE). Puesto que $|\rho| < 1$, la ROE aumenta cuando $|\rho|$ aumenta. Una relación inversa es

$$\left| \rho \right| = \frac{\text{ROE} - 1}{\text{ROE} + 1} \tag{7.195}$$

Mientras que el valor de ρ varía de -1 a +1, el valor de la ROE varía de 1 a ∞ . Por esta razón, se acostumbra expresar a la ROE en una escala logarítmica.

La intensidad del campo magnético en el medio 1 se obtiene combinado $\mathbf{H}_i(z)$ y $\mathbf{H}_r(z)$ en las Ecs. (7.181) y (7.182), respectivamente:

$$\mathbf{H}_{1}(z) = \frac{E_{1i}}{\eta_{1}} \left(e^{-j\beta_{1}z} - \rho e^{j\beta_{1}z} \right) \hat{\mathbf{a}}_{y}$$

$$= \frac{E_{1i}}{\eta_{1}} e^{-j\beta_{1}z} \left(1 - \rho e^{j2\beta_{1}z} \right) \hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.196)

En el medio 2, los campos E_2 y H_2 constituyen la onda transmitida que se propaga en la dirección de +*z*. De la Ec. (7.185) y de la relación entre E_2 y H_2 , se obtiene

$$\mathbf{E}_{2}(z) = \hat{\mathbf{a}}_{x} \tau E_{1i} e^{-j\beta_{2}z}$$
(7.197)

y

$$\mathbf{H}_{2}(z) = \hat{\mathbf{a}}_{y} \frac{\tau}{\eta_{2}} E_{1i} e^{-j\beta_{2}z}$$
(7.198)

Ejemplo 7. Una onda plana uniforme en un medio no disipativo con impedancia intrínseca η_1 , incide normalmente en otro medio no disipativo con impedancia intrínseca η_2 ; la frontera entre los medios es plana. Obtenga las expresiones para las densidades de la potencia promedio en ambos medios.

Solución:

La fórmula para calcular la densidad de potencia promedio o el promedio del vector del Poynting es

$$\mathbf{S}_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right)$$

En el medio 1, se utilizan las Ecs. (7.189) y (7.196):

$$(\mathbf{S}_{\text{prom}})_{1} = \frac{E_{1i}^{2}}{2\eta_{1}} \operatorname{Re} \left[(1 + \rho e^{j2\beta_{1}z}) (1 - \rho e^{-j2\beta_{1}z}) \right] \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$= \frac{E_{1i}^{2}}{2\eta_{1}} \operatorname{Re} \left[(1 - \rho^{2}) + \rho (e^{j2\beta_{1}z} - e^{-j2\beta_{1}z}) \right] \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$= \frac{E_{1i}^{2}}{2\eta_{1}} \operatorname{Re} \left[(1 - \rho^{2}) + j2\rho \operatorname{sen} 2\beta_{1}z \right] \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$= \frac{E_{1i}^{2}}{2\eta_{1}} (1 - \rho^{2}) \hat{\mathbf{a}}_{z}$$

$$(7.199)$$

en la cual ρ es un número real ya que ambos medios son no disipativos.

En el medio 2 se utilizan las Ecs. (7.197) y (7.198) para obtener

$$\left(\mathbf{S}_{\text{prom}}\right)_{2} = \frac{E_{1i}^{2}}{2\eta_{2}} \tau^{2} \,\hat{\mathbf{a}}_{z}$$
 (7.200)

Puesto que los dos medios no tienen pérdidas, la potencia que fluye en el medio 1 debe ser igual a la del medio 2; es decir,

$$(\mathbf{S}_{\text{prom}})_1 = (\mathbf{S}_{\text{prom}})_2$$

0

7.14 Incidencia Oblicua sobre un Plano Conductor Perfecto

Supóngase que una onda plana uniforme se propaga en un dieléctrico perfecto de parámetros ε y μ e incide oblicuamente sobre un plano conductor perfecto. Como en el caso de incidencia normal, el campo disperso debido a las corrientes y cargas inducidas en la frontera plana debe ser tal que cancele el campo incidente en el conductor perfecto. Por tanto, estas corrientes y cargas producirán una onda en el interior del conductor. Esta onda será exactamente igual a la onda incidente, propagándose en la misma dirección pero de fase opuesta. El mismo campo se producirá en el otro lado del plano, lo que resulta en una "onda reflejada", Por tanto, la dirección de propagación de la onda reflejada formará el mismo ángulo θ (con la normal al plano) que la onda incidente (Fig. 7.13). Esto se puede obtener fácilmente de la figura. Para la onda incidente, si θ_i es el ángulo con la normal, entonces $\zeta = y \operatorname{sen} \theta_i - z \cos \theta_i$, y para la onda reflejada, si θ_r es el ángulo con la normal, entonces da condiciones de frontera, los campos tangenciales deben ser iguales en z = 0, lo cual da como resultado que $\theta_i = \theta_r = \theta$.



Figura 7.13 La dirección de propagación de una onda reflejada en un plano conductor perfecto forma el mismo ángulo con la normal que la dirección de la onda incidente.

El plano que contiene al vector $\hat{\mathbf{n}}$ y las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada se conoce como el *plano de incidencia*. Cualquier onda plana incidente puede representarse como una superposición de dos ondas planas, una con el vector **E** normal al plano de incidencia y la otra con el vector **E** paralela a ese plano. Estos dos casos son los más sencillos de analizar. Por tanto, sólo se consideran estos dos casos especiales, con el conocimiento de que cualquier otro caso se puede obtener por superposición.

7.14.1. Campo E Normal al Plano de Incidencia

En este caso se dice que la onda tiene *polarización normal* u *horizontal*. El caso de una onda incidente con polarización horizontal se dibuja en la Fig. 7.13, con las direcciones de referencia adoptadas para los vectores **E** y **H**.

La onda se propaga a lo largo de un eje (el eje ζ en la Fig. 7.13), el cual no coincide con alguno de los ejes de coordenadas *x*, *y* o *z*. Para escribir la ecuación de la onda en términos de las coordenadas rectangulares, se necesita determinar la distancia de un punto *P* (Fig. 7.13) al origen del eje ζ ($\zeta = 0$) en términos de *x*, *y* y *z*. De la Fig. 7.13 se observa que para la onda incidente esta distancia es igual a $\zeta = y \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta$. Para el punto *P*, observe que *y* < 0 y *z* > 0 y que *P* está en la parte negativa del eje ζ . Por tanto, el factor $e^{-j\beta z}$, que es el factor

para la onda que se propaga en la dirección del eje ζ , se convierte en $e^{-j\beta(y \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta)}$. La expresión para el campo eléctrico complejo de la onda incidente es entonces

$$\mathbf{E}_{i}(y,z) = E e^{-j\beta(y \sin\theta - z\cos\theta)} \,\hat{\mathbf{a}}_{x}$$
(7.202)

En la misma forma se obtiene que el campo *E* de la onda reflejada es dado por

$$\mathbf{E}_{r}(y, z) = -E e^{-j\beta(y \sin\theta + z\cos\theta)} \hat{\mathbf{a}}_{x}$$
(7.203)

El signo menos proviene del requisito de que el campo eléctrico tangencial total es dado por

$$E_{\text{tot}}(y, z) = E_i(y, z) + E_r(y, z) = Ee^{-j\beta y \operatorname{sen}\theta} \left(e^{j\beta z \cos\theta} - e^{-j\beta z \cos\theta}\right)$$
$$= 2jE \operatorname{sen}(\beta z \cos\theta) e^{-j\beta y \operatorname{sen}\theta}$$
(7.204)

Se ve que el campo eléctrico total es una onda estacionaria en la dirección de *z* y una onda viajera en la dirección de *y*. La longitud de onda en la dirección de *z* es dada por

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta\cos\theta} = \frac{\lambda}{\cos\theta} \tag{7.205}$$

donde λ es la longitud de onda de la onda incidente (y de la reflejada). El vector **E** es cero en los planos en los cuales $\beta z \cos \theta = n\pi$, n = 0, 1, 2, ..., o

$$z_{E=0} = \frac{n\lambda_z}{2} = \frac{n\lambda}{2\cos\theta}, \quad n = 0, \ 1, 2, \ \dots$$
(7.206)

En la dirección del eje *y*, el campo total se comporta como una onda viajera, con una velocidad de fase a lo largo del eje *y* dada por

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{\beta_y} = \frac{\omega}{\beta \,\text{sen}\,\theta} = \frac{c}{\,\text{sen}\,\theta}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$
(7.207)

Observe que el coeficiente de fase con respecto al eje *y* es todo el factor de *jy* en el exponente, esto es, $\beta_y = \beta \operatorname{sen} \theta$. La longitud de onda a lo largo del eje *y* es

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{\beta_y} = \frac{\lambda}{\sin\theta} \tag{7.208}$$

Ejemplo 8. Determinación del campo H total. Con referencia a la Fig. 7.14, el campo H total tiene dos componentes: H_y y H_z . Las dos componentes del campo H total se obtienen como la suma de estas componentes para las ondas incidente y reflejada:

$$H_{\text{tot}}(y, z) = H_{iy}(y, z) + H_{ry}(y, z)$$
$$= -\frac{E}{\eta} e^{-j\beta(y \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta)} - \frac{E}{\eta} e^{-j\beta(y \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta)} \cos \theta$$

Al reacomodar esta ecuación, se obtiene

$$H_{\text{tot } y}(y, z) = -2\frac{E}{\eta}\cos\theta\cos(\beta z\cos\theta)e^{-j\beta y\sin\theta}$$

La componente H_z se obtiene en una forma similar y se deja como un ejercicio. El resultado es

$$H_{\text{tot}z}(y, z) = 2j\frac{E}{\eta} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} (\beta z \cos \theta) e^{-j\beta y \operatorname{sen} \theta}$$

Observe que H_z es cero en plano conductor perfecto, como debe ser (el campo magnético no puede tener componente normal a la superficie de un conductor perfecto).



Figura 7.14 Una onda plana con polarización horizontal reflejada en un plano conductor perfecto.

7.14.2. Campo E Paralelo al Plano de Incidencia

Suponga ahora que el vector \mathbf{E} es paralelo al plano de incidencia, como se ilustra en la Fig. 7.15. Como la componente tangencial (componente en *y*) en el plano debe ser igual a cero, de nuevo la onda reflejada tiene la misma amplitud. Las direcciones de los vectores de \mathbf{E} y \mathbf{H} indicados en la figura representan sus direcciones de referencia.



Figura 7.15 Reflexión de una onda plana con polarización vertical en un plano conductor perfecto.

Ahora tenemos dos componentes del campo eléctrico para las ondas incidente y reflejada, las componentes y y z. Ambas deben ser de la forma de las Ecs. (7.202) y (7.203):

$$E_{iy}(y, z) = E\cos\theta e^{-j\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)}$$
(7.209)

$$E_{iz}(y, z) = E \operatorname{sen} \theta e^{-j\beta(y \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta)}$$
(7.210)

у

$$E_{ry}(y,z) = -E\cos\theta e^{-yp(y\sin\theta+z\cos\theta)}$$
(7.211)

$$E_{rz}(y, z) = -E \operatorname{sen} \theta e^{-j\beta(y \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta)}$$
(7.212)

Las componentes totales son las sumas de éstas:

$$E_{\text{tot } y}(y, z) = E_{iy}(y, z) + E_{ry}(y, z) = 2jE\cos\theta \sin(\beta z\cos\theta)e^{-j\beta y\sin\theta}$$
(7.213)

$$E_{\text{tot}\,z}\left(y,\,z\right) = E_{iz}\left(y,\,z\right) + E_{rz}\left(y,\,z\right) = 2E\,\text{sen}\,\theta\cos\left(\beta z\cos\theta\right)e^{-j\beta y\,\text{sen}\,\theta}$$
(7.214)

Ejemplo 9. Determinar el Campo H Total. Con referencia a la Fig. 7.15, el campo **H** total en este caso tiene sólo la componente en *x*. Como se sabe que $H = E/\eta$, las expresiones para el campo **H** de las ondas incidente y reflejada son

$$H_{ix}(y, z) = \frac{E}{\eta} e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)} \quad y \quad H_{rx}(y, z) = \frac{E}{\eta} e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

El campo H total es entonces

$$H_{\text{tot}}(y, z) = 2 \frac{E}{\eta} \cos(\beta z \cos \theta) e^{-j\beta y \sin \theta}$$

7.15 Incidencia Oblicua en Frontera Entre Dos Medios Dieléctricos

Cuando una onda plana incide oblicuamente sobre una frontera plana entre dos medios, la formulación de las condiciones de frontera se vuelve más compleja que cuando la incidencia es normal. Por supuesto, de nuevo una parte de la energía incidente es reflejada de regreso al medio 1 (de parámetros ε_1 y μ_1) y una parte es transmitida al medio 2 (de parámetros ε_2 y μ_2). Se verá que la dirección de propagación de la onda reflejada forma el mismo ángulo con la normal a la interfaz que la onda incidente, igual que antes. Sin embargo, la onda transmitida es desviada con respecto a esta normal. Por tanto, la onda transmitida en este caso con frecuencia se conoce como la *onda refractada*.

Las amplitudes de las ondas reflejada y refractada dependen, entre otras cosas, de la polarización de la onda (esto es, si el vector del campo eléctrico es paralelo o normal al plano de incidencia). Sin embargo, los ángulos que la dirección de propagación de las ondas secundarias forma con la normal a la interfaz son los mismos para cualquier polarización.

La Fig. 7.16 muestra los planos de fase constante y las direcciones de propagación de las ondas incidente, reflejada y refractada. Estos planos en el medio 1 se mueven con una velocidad $u_1 = 1/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ y en el medio 2 con una velocidad $u_2 = 1/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$. En la figura se muestran algunos de estos planos de fase constante para las tres ondas. Suponga que se satisfacen las condiciones de frontera para el instante en que la figura es válida. Para que esas condiciones sigan manteniendo su validez para todo el tiempo, es necesario que las amplitudes y fases relativas de las tres ondas en la interfaz permanezcan constantes. Esto es posible sólo si las intersecciones de los planos de fase constante con la interfaz se mueven *a lo largo de la frontera* con la misma velocidad.



Figura 7.16 Planos de fase constantes y las direcciones de propagación de las ondas incidente, reflejada y refractada.

De la Fig. 7.16, se obtiene que las velocidades para la onda incidente y la reflejada son $u_1/\operatorname{sen} \theta_i$ y $u_1/\operatorname{sen} \theta_r$ y para la onda refractada $u_2/\operatorname{sen} \theta_2$, donde θ_i y θ_r son los ángulos de incidencia y reflexión, respectivamente. Para

José R. Morón

satisfacer esta condición se concluye que, en primer lugar, $\theta_i = \theta_r$. Este ángulo se denotará como θ_1 . En segundo lugar, también se debe cumplir que u_1 /sen $\theta_1 = u_2$ /sen θ_2 , de manera que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \qquad (ley \ de \ Snell) \tag{7.215}$$

Esta relación se conoce como la *ley de Snell*. La razón u_1/u_2 se denomina el *índice de refracción* para los medios 1 y 2 y con frecuencia se denota como n_{12} . Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ (que es el caso más frecuente), entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$
(7.216)

Sabemos que si $0 \le \beta < \alpha \le \pi/2$, entonces sen $\alpha > sen \beta$. Por tanto, la ley de Snell y la Ec. (7.216) nos dicen que para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $\theta_1 > \theta_2$. Esto significa que la onda es refractada hacia la normal y concluimos que la onda refractada existe para cualquier valor de θ_1 .

Sin embargo, si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, entonces $\theta_1 > \theta_2$. Esto significa que la dirección de propagación de la onda refractada forma un ángulo mayor con la normal que el de la onda incidente. De manera que para un cierto ángulo θ_1 , el ángulo θ_2 se hace igual a $\pi/2$ y no puede aumentar más. De la Ec. (7.216), este ángulo límite $\theta_1 = \theta_t$ se define por

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_t}{\operatorname{sen} (\pi/2)} = \operatorname{sen} \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \ \mu_1 = \mu_2)$$
(7.217)

Este ángulo particular $\theta_1 = \theta_t$ se conoce como el *ángulo crítico* o *ángulo de reflexión total*.

Para $\theta_1 > \theta_t$, el seno de θ_2 debe ser *mayor que uno* para que se satisfagan las condiciones de frontera. A primera vista, esto parece un error, puesto que el seno de un ángulo *real* no puede ser mayor que uno. Sin embargo, el seno de un ángulo complejo puede ser mayor que la unidad. Esto se entiende fácilmente si se hace $\theta_2 = \pi/2 - jx$ y recordamos la expresión para el seno en términos de la función exponencial:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - jx) = \frac{1}{2j} \left[e^{j(\pi/2 - jx)} - e^{-j(\pi/2 - jx)} \right] = \frac{1}{2j} \left(je^x + je^{-x} \right) = \cosh x$$

puesto que $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$. La función *coseno hiperbólico* de *x*, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ puede tener cualquier valor positivo entre uno e infinito.

¿Qué es lo que sucede si $\theta_1 > \theta_t$? Obviamente, no puede haber onda refractada en el medio 2, de modo que toda la energía de la onda incidente es reflejada de regreso al medio 1 y, en efecto, el coeficiente de reflexión es entonces igual a uno. Esto se conoce como *reflexión total*.

7.15.1 Coeficientes de Fresnel

La ley de Snell y el fenómeno de reflexión total tienen validez para cualquier polarización de la onda incidente. Los coeficientes de reflexión y transmisión, los cuales se definen en la misma forma que para incidencia normal, son diferentes para la polarización normal y la paralela. Ahora se deducirán los llamados *coeficientes de Fresnel*, los cuales son los coeficientes de reflexión y transmisión escritos en términos del ángulo de incidencia y las propiedades materiales de los dos medios.

7.15.2 Vector E Normal al Plano de Incidencia (Caso Eléctrico Transversal)

Suponga que las direcciones de referencia de los vectores del campo de las ondas incidente, reflejada y refractada con como en la Fig. 7.17. Sean E_{1i} , E_{1r} y E_2 y H_{1i} , H_{1r} y H_2 los valores rms complejos de los vectores de las tres ondas en la interfaz (z = 0). Las condiciones de frontera requieren que las componentes tangenciales del campo E total y el campo H total en los dos lados de la interfaz sean iguales. Esto resulta en las dos ecuaciones siguientes:



 $\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t$

Figura 7.17 Direcciones de referencia de los vectores del campo para una onda incidente con polarización normal.

Puesto que $H_{1i} = E_{1i}/\eta_1$, $H_{1r} = E_{1r}/\eta_1$ y $H_2 = E_2/\eta_2$, tenemos dos ecuaciones lineales en dos incógnitas, $E_{1r}y$ E_2 . Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene

$$\rho_n = \left(\frac{E_{1r}}{E_{1i}}\right)_n = \frac{\eta_2 \cos\theta_1 - \eta_1 \cos\theta_2}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2}$$
(7.219)

$$\tau_n = \left(\frac{E_2}{E_{1i}}\right)_n = \frac{2\eta_2 \cos\theta_1}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2}$$
(7.220)

Los coeficientes de reflexión y transmisión, ρ_n y τ_n se conocen como los *coeficientes de Fresnel para polarización normal*. Algunas veces también se les denomina los coeficientes de Fresnel *eléctricos transversos (ET)*. En estas expresiones, de acuerdo con la ley de Snell en la Ec. (7.216), el cos θ_2 se calcula como

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2} = \frac{u_2}{u_1} \sqrt{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1}$$
(7.221)

Las expresiones para los coeficientes ρ y τ son generales. Para dieléctricos perfectos con impedancias intrínsecas reales, tienen valores reales. Como una consecuencia, la onda reflejada en la interfaz está bien sea en fase (si $\rho > 0$) o en contrafase (si $\rho < 0$) con respecto a la onda incidente. Si cualquiera de los dos medios no es un dieléctrico perfecto, la impedancia intrínseca de ese medio es compleja, de modo que tanto ρ como τ también son complejos y la diferencia de fase entre los vectores del campo en la interfaz es diferente de π o cero.

7.15.3 Vector E Paralelo al Plano de Incidencia (Caso Magnético Transversal)

Suponga que las direcciones de referencia de los vectores del campo de las ondas incidente, reflejada y refractada en este caso son como en la Fig. 7.18. Una vez más, sean E_{1i} , E_{1r} y E_2 y H_{1i} , H_{1r} y H_2 los valores rms complejos de las tres ondas en la interfaz (z = 0). Las condiciones de frontera en este caso son

$$(E_{1i} - E_{1r})\cos\theta_1 = E_2\cos\theta, \qquad H_{1i} + H_{1r} = H_2$$
(7.222)



Figura 7.18 Direcciones de referencia de los vectores del campo de las ondas para una onda incidente normalmente polarizada.

Expresando las intensidades de los campos magnéticos como E/η con los subíndices apropiados, obtenemos de nuevos dos ecuaciones lineales en las incógnitas E_1 y E_2 . La solución de estas ecuaciones es directa y se encuentra que los coeficientes de reflexión y transmisión son

$$\rho_p = \left(\frac{E_{1r}}{E_{1i}}\right) = \frac{\eta_1 \cos \theta_1 - \eta_2 \cos \theta_2}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2}$$
(7.223)

$$\tau_p = \left(\frac{E_2}{E_{1i}}\right) = \frac{2\eta_2 \cos\theta_1}{\eta_1 \cos\theta_1 + \eta_2 \cos\theta_2}$$
(7.224)

Por supuesto, en estas dos expresiones también debe calcularse $\cos \theta_2$ como en la Ec. (7.221). Los coeficientes ρ_p y τ_p en las Ecs. (7.223) y (7.224) son los *coeficientes de Fresnel para polarización paralela*, también llamados algunas veces coeficientes de Fresnel *magnéticos transversales* (*TM*).

Ejemplo 10. En la práctica, el caso más común es el de dos medios dieléctricos perfectos que tienen permeabilidades iguales. En este caso especial, $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ y los coeficientes de reflexión y transmisión para la polarización normal en las Ecs. (7.219) y (7.220) se convierten en

$$\rho_n = \frac{\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_2}, \qquad \tau_n = \frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_2}$$
(7.225)

Para la polarización paralela, los coeficientes de reflexión y transmisión en este caso se convierten en

$$\rho_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2}, \qquad \tau_p = \frac{2\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2}$$
(7.226)

Aquí se pueden extraer algunas conclusiones sencillas:

- **1.** No es difícil ver que ρ_n nunca puede ser igual a cero. Esto requeriría que, en forma simultanea, sen θ_1 /sen $\theta_2 = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ (ley de Snell) y $\cos \theta_1 / \cos \theta_2 = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ (ecuación resultante de que $\rho_n = 0$), lo cual no es posible.
- 2. Si θ_1 es mayor que el ángulo crítico para reflexión total, sabemos que sen² $\theta_1 > \epsilon_2/\epsilon_1$, de modo que $\cos \theta_2$ es puramente imaginario. De la Ec. (7.225) vemos que ρ_n es igual a uno, es decir, que toda la energía de la onda incidente es reflejada de regreso hacia el medio 1. Se llega a la misma conclusión para ρ_p .

3. El coeficiente de reflexión en el caso de polarización paralela *puede* ser cero. Para que eso suceda, es necesario que $\cos\theta_1/\cos\theta_2 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$. Esto no está en contradicción con la ley de Snell, pero ambas ecuaciones deben satisfacerse en forma simultánea. Si se multiplican las dos ecuaciones, se obtiene que la onda reflejada no existe si

$$\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 = \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} 2\theta_1 = \operatorname{sen} 2\theta_2$$
 (7.227)

Esta ecuación se satisface si $2\theta_1 0(\pi - 2\theta_2)$, es decir, si $(\theta_1 + \theta_2) = \pi/2$. Pero para que dos ángulos sumen $\pi/2$, el seno de uno debe ser igual al coseno del otro, por tanto, por la ley de Snell,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_1} = \tan\theta_1 = n_{12} = \frac{u_1}{u_2}$$
(7.228)

Este ángulo particular de incidencia de una onda con polarización paralela para el cual la onda reflejada desaparece, se conoce como el ángulo de Brewster o el ángulo de polarización.

Ejemplo 11. Se sabe que una onda polarizada arbitrariamente puede representarse como una superposición de dos ondas polarizadas linealmente. Por tanto, si tenemos por ejemplo una onda polarizada elípticamente que incide con el ángulo de Brewster, la onda reflejada no contendrá la componente con polarización paralela, es decir, sólo tendrá solamente un campo eléctrico polarizado normalmente. En otras palabras, cualquier onda que incida sobre una interfaz plana de dos medios dieléctricos con el ángulo de Brewster será reflejada como una *onda polarizada linealmente*.

Ejemplo 12. Supóngase que en la trayectoria de la onda reflejada del Ejemplo 8, se introduce una lámina dieléctrica orientada de manera que la onda incida sobre ella con el ángulo de Brewster y que la polarización de la onda (recuerde que esto se define con respecto al plano de incidencia) es paralela. Entonces la onda reflejada va a desparecer completamente. Así es exactamente cómo Brewster descubrió el fenómeno experimentalmente, usando ondas electromagnéticas en la región de frecuencias de la luz visible.

7.16 Interfaces Múltiples

Considérese la situación mostrada en la Fig. 7.19, en la cual dos interfaces planas separan tres regiones en el espacio. Se tienen dos casos de interés: uno donde todas las tres regiones son no disipativas, y una donde una región disipativas separa dos dieléctricos no disipativos. Por sencillez, sólo se considerará el caso de incidencia normal y ondas planas con polarización lineal.

Considérese el caso de una placa plana e infinita de material dieléctrico de espesor d. La onda plana incidente E_i es reflejada parcialmente y parcialmente transmitida, como se indica en la Fig. 7.19. Suponga que las ondas están polarizadas en x. Entonces se pueden escribir los campos en las tres regiones:



Figura 7.19 Una placa dieléctrica en el espacio libre.

José R. Morón

$$\mathbf{E}_{1} = \mathbf{E}_{i} + \mathbf{E}_{r} = \left(E_{i}e^{-j\beta_{0}z} + E_{r}e^{+j\beta_{0}z}\right)\hat{\mathbf{a}}_{x}
\mathbf{H}_{1} = \mathbf{H}_{i} + \mathbf{H}_{r} = \left(\frac{E_{i}}{\eta_{0}}e^{-j\beta_{0}z} - \frac{E_{r}}{\eta_{0}}e^{+j\beta_{0}z}\right)\hat{\mathbf{a}}_{y}
\mathbf{E}_{2} = \mathbf{E}_{2}^{+} + \mathbf{E}_{2}^{-} = \left(E_{2}^{+}e^{-j\beta_{2}z} + E_{2}^{-}e^{+j\beta_{2}z}\right)\hat{\mathbf{a}}_{x}
\mathbf{H}_{2} = \mathbf{H}_{2}^{+} + \mathbf{H}_{2}^{-} = \left(\frac{E_{2}^{+}}{\eta_{2}}e^{-j\beta_{2}z} - \frac{E_{2}^{-}}{\eta_{2}}e^{+j\beta_{2}z}\right)\hat{\mathbf{a}}_{y}
\mathbf{E}_{3} = \mathbf{E}_{t} = E_{t}e^{-j\beta_{0}z}\hat{\mathbf{a}}_{x}
\mathbf{H}_{3} = \mathbf{H}_{t} = \frac{E_{t}}{\eta_{0}}e^{-j\beta_{0}z}\hat{\mathbf{a}}_{y}$$
(7.229)

Recuerde que cada una de las amplitudes en estas ecuaciones, en general, es compleja. Es decir, las amplitudes pueden contener un factor de fase relativo. Esto permite usar un cierto margen en la selección del origen de la coordenada *z*. En particular, podemos usar la interfaz izquierda como z = 0 para la región 1, la interfaz derecha como z = 0 para la región 3 y cualquiera de las interfaces como z = 0 para la región 3. Habiendo seleccionado el origen de coordenadas, se requiere la continuidad de $E_{tan}y H_{tan}$ en las interfaces y, a partir de la Ec. (7.229) se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones en las cuatro incógnitas (E_1 se presume conocido). A partir de éstas, se puede obtener $E_r y E_t y$, por tanto, la solución al problema.

Si se usa la interfaz en lado derecho para z = 0 en la región 2 (Fig. 7.19) y el origen para las otras dos regiones en sus interfaces respectivas, como se describe en las ecuaciones anteriores, las ecuaciones son

$$E_{i} + E_{r} = E_{2}^{+} e^{j\beta_{2}d} + E_{2}^{-} e^{-j\beta_{2}d}$$

$$\frac{E_{i}}{\eta_{0}} - \frac{E_{r}}{\eta_{0}} = \frac{E_{2}^{+}}{\eta_{2}} e^{j\beta_{2}d} - \frac{E_{2}^{-}}{\eta_{2}} e^{-j\beta_{2}d}$$

$$E_{2}^{+} + E_{2}^{-} = E_{t}$$

$$\frac{E_{2}^{+}}{\eta_{2}} - \frac{E_{2}^{-}}{\eta_{2}} = \frac{E_{t}}{\eta_{0}}$$
(7.230)

En vez de resolver estas ecuaciones por métodos ordinarios, resulta mejor ponerlas en una forma diferente, y al mismo tiempo definir algunos conceptos nuevos en el proceso.

Primero se escribe la razón de E_{tan} a H_{tan} en las dos interfaces. Ésta es precisamente la razón del primer par de las Ecs. (7.230) y la razón del segundo par de las Ecs. (7.230). Para el primer par se obtiene

$$\eta_0 \frac{E_i + E_r}{E_i - E_4} = \eta_2 \frac{E_2^+ e^{j\beta_2 d} + E_2^- e^{-j\beta_2 d}}{E_2^+ e^{j\beta_2 d} - E_2^- e^{-j\beta_2 d}}$$
(7.231)

o, factorizando E_i en el numerador y el denominador en lado izquierdo y $E_2^+ e^{j\beta_2 d}$ en el lado derecho y definiendo

$$\frac{E_r}{E_i} = \rho_1 \qquad \frac{E_2^-}{E_2^+} = \rho_2 \tag{7.232}$$

se obtiene

$$\eta_0 \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} = \eta_2 \frac{1+\rho_2 e^{-j2\beta_2 d}}{1-\rho_2 e^{-j2\beta_2 d}}$$
(7.233)

En forma similar, a partir de la razón del segundo par de ecuaciones en (7.230), se obtiene

$$\eta_2 \frac{1+\rho_2}{1-\rho_2} = \eta_0 \tag{7.234}$$

A partir de las definiciones se observa que los coeficientes ρ son las razones entre las magnitudes complejas de la onda viajera negativa y la onda viajera positiva a la distancia del origen seleccionado en la región particular. Obviamente, si se conocen los valores de los ρ , se resuelve el problema original.

Ejemplo 13. Considérese la transmisión a través de una placa que tiene una constante dieléctrica igual a 4 y un espesor *d*.

Para $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$, se tiene que

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{2}$$

y de la Ec. (7.234), $\rho_2 = \frac{1}{2}$. Introduciendo este valor y el de la impedancia $\eta_2 = \eta_0/2$ en la Ec. (7.233), se encuentra que

$$\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1}{2} \frac{1+\frac{1}{3}e^{-j\beta_2 d}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\beta_2 d}}$$

de donde es claro que ρ_1 es complejo a menos que $e^{-j\beta_2 d}$ sea real. Puesto que la solución para el caso complejo es realmente compleja, primero se examinará el caso real.

Observe que $e^{-j\beta_2 d}$ es real cuando $2\beta_2 d = n\pi$, y es igual a +1 cuando $2\beta_2 d = n\pi$, *n* par, e igual a -1 cuando $2\beta_2 d = n\pi$, *n* impar. Para *n* par se tiene que

$$\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1}{2} \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

y $\rho_1 = 0$. De manera que $E_r/E_i = \rho_1 = 0$ y por tanto $E_r = 0$; no hay reflexión cuando *n* es par. Puesto que $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$, vemos que $2\beta_2 d = n\pi$ da

$$d = n \frac{\lambda_2}{4}, \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

Así que se tiene un 100 por ciento de transmisión si la placa tiene un espesor igual a un número entero de medias longitudes de onda.

En forma similar, para *n* impar se obtiene

$$\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1}{2} \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

 $y \rho_1 = -\frac{3}{5}$.

Por el teorema de Poynting, la relación entre la potencia reflejada y la potencia incidente es

$$\frac{E_r^2}{E_i^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{2.5}$$
 o 36 por ciento

Se observa entonces que 36 por ciento de la potencia es reflejada y 64 por ciento es transmitida para *n* impar; esto significa que $d = n(\lambda_2/4)$, para *n* impar.

PROBLEMAS

- **7.1** Una onda plana con valor eficaz del vector del campo eléctrico E = 10 mV/m se propaga en un vacío e incide normalmente sobre una pantalla que absorbe totalmente la energía de la onda. Halle la energía absorbida por metro cuadrado de la pantalla en una hora.
- **7.2** Demuestre que una onda polarizada elípticamente puede representarse como una suma de dos ondas polarizadas circularmente.
- **7.3** Determine el promedio en el tiempo del vector de Poynting de una onda polarizada circularmente (a) comenzando con las expresiones para la onda en el dominio del tiempo, y (b) comenzando desde las expresiones fasoriales para la onda plana.
- **7.4** Dos ondas planas con frecuencia y fase iguales se propagan en la dirección +*z*. Ambas están polarizadas circularmente, pero en direcciones opuestas. Las amplitudes de la intensidad del campo eléctrico de las dos ondas son E_1 y E_2 . Halle la polarización resultante en términos de E_1 y E_2 , comenzado con las expresiones de las ondas en el dominio del tiempo.
- 7.5 Dos ondas sinusoidales polarizadas linealmente tienen la misma frecuencia y se propagan en la dirección +*z*. Los vectores del campo eléctrico de las dos ondas, $E_1y E_2$, están a lo largo de los ejes *x* y *y*, respectivamente. Grafique la figura trazada por el vector resultante $E = E_1 + E_2$ en *z* = 0, en función de la razón de las amplitudes E_1 y E_2 y sus fases relativas ϕ .
- **7.6** Una onda plana polarizada linealmente de intensidad de campo eléctrico *E* (valor rms) y frecuencia angular ω incide normalmente desde un vacío sobre una lámina plana, grande y conductora perfecta. Determine las cargas y corrientes superficiales inducidas en la lámina.
- 7.7 Observe que las corrientes superficiales inducidas en el Problema 7.6 están situadas en el campo magnético de la onda incidente. Determine el promedio en el tiempo de la fuerza por unidad de área sobre la lámina (ésta se conoce como la *presión de radiación*).
- 7.8 Repita los Problemas 7.7 y 7.7 suponiendo que la onda es de polarización circular.
- **7.9** Si la conductividad σ de la lámina en el Problema 7.6 es grande, pero finita, su permeabilidad es μ y la frecuencia de la onda es ω , calcule el promedio de las pérdidas en la lámina por unidad de área. Específicamente, determine estas pérdidas si *f* = 1 MHz, *E* = 1 V/m, σ = 56 ×10⁶ S/m (cobre) y μ = μ_0 .
- **7.10** Dado que la profundidad de penetración para el grafito a 100 MHz es igual a 0.16 mm, determínese (a) la conductividad del grafito y (b) la distancia que recorre una onda de 1 GHz en el grafito de modo que la intensidad de su campo se reduzca por 30 dB.
- 7.11 Suponiendo que la intensidad de campo eléctrico de radiación de un sistema de antenas es

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{a}}_{\theta} E_{\theta} + \hat{\mathbf{a}}_{\phi} E_{\phi}$$

halle una expresión para el flujo de potencia promedio por unidad de área que sale de la antena.

- 7.12 Una onda electromagnética plana y uniforme se propaga en la dirección +*z* (hacia abajo) y choca normalmente en *z* = 0 con la superficie del océano. Suponga que el campo magnético en *z* = 0 es $\mathbf{H}(0, t) = H_0 \cos(10^4 t) \hat{\mathbf{a}}_y$ A/m.
 - (a) Determinar la profundidad de penetración. Para el océano: Conductividad = σ , permeabilidad = μ_0 .
 - (b) Halle las expresiones para $H(z, t) \neq E(z, t)$.
- **7.13** Una onda plana incide normalmente en la interfaz entre aire y un dieléctrico que tiene una permeabilidad $\mu = \mu_0$ y una permitividad uniforme ε . La razón de onda estacionaria medida es 1.8. Determinar ε .

- **7.14** Supóngase que en la Fig. 7.11 los medios 1 y 2 son conductores y que $\sigma_1/\omega\epsilon_1 = \sqrt{3}$ con $\omega = 3 \times 10^8$ rad/s. Supóngase también que $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ y $\sigma_2 = 2\sigma_1$. Considere entonces una onda plana que se propaga a lo largo del eje *z* y determine la longitud y fase de la onda transmitida en *z* = 1, si en z = -1 la onda incidente es $100e^{j0} \mu$ V/m.
- **7.15** Una onda plana es reflejada en la interfaz entre dos dieléctricos cuyos índices de refracción son ligeramente diferentes. La onda se desplaza desde el medio 1 al medio 2 y $n_1/n_2 = 1 + a$. Demuestre que los coeficientes de reflexión para ondas polarizadas con sus vectores **E** en el plano de incidencia y normales a este plano son ambos dados por

$$\rho = \frac{1 - A}{1 + A}$$

donde $A^2 = 1 - 2a \tan \theta_i$ y θ_i es el ángulo de incidencia.

7.16 Determine la mínima permitividad relativa de un medio dieléctrico para el cual el ángulo crítico de reflexión total desde el dieléctrico hacia el aire es menor que 45 grados. ¿Es posible construir a partir de un dieléctrico así un prisma en la forma de un triángulo rectángulo isósceles que retorne la onda de luz como en la Fig. P7.16? ¿Hay reflexión cuando la onda luminosa entra al prisma?



7.17 Demuestre que la expresión

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \left(\hat{\mathbf{a}}_x + j \hat{\mathbf{a}}_y \right) e^{j(\omega t - \beta z)}$$

representa el campo eléctrico de una onda polarizada circularmente. Escriba las expresiones correspondientes para (a) el campo magnético de la onda, y (b) el campo eléctrico de la onda polarizada circularmente en sentido contrario.

7.18 Una onda plana con polarización circular derecha representada por el fasor

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \left(\hat{\mathbf{a}}_x - j \hat{\mathbf{a}}_y \right) e^{-j\beta z}$$

choca normalmente con una pared conductora perfecta en z = 0.

- (a) Determinar la polarización de la onda reflejada.
- (b) Halle la corriente inducida en la pared conductora.
- (c) Obtenga la expresión instantánea de la intensidad del campo eléctrico con base a una referencia coseno para el tiempo.
- **7.19** Se transmite una onda luminosa con incidencia normal desde un medio con índice de refracción *n* hasta otro con índice n + a. Exprese el coeficiente de transmisión τ como una serie de potencias en a/n y demuestre que los primeros dos términos dan un precisión de 1% para $(a/n) \le 1/3$, aproximadamente.

¿Cuál es el valor de τ para luz proveniente desde vidrio ordinario (n = 1.52) hacia el aire?

Los revestimientos reductores de las reflexiones, ¿mejoran significativamente la transmisión? ¿Por qué se usan?

- **7.20** Una onda plana uniforme con campo incidente $\mathbf{E}_i(z) = E_{i0}e^{-j\beta_0 z}$ en el aire se propaga normalmente a través de una lámina delgada de cobre de espesor *d*, como se muestra en la Fig. P7.20. Despreciando reflexiones múltiples en el interior de la lámina de cobre, determinar
 - (a) E_2^+ ; H_2^+ (b) E_2^- ; H_2^- (c) E_{30}/H_{30}



- **7.21** Una onda plana con polarización paralela incide con un ángulo de $\pi/4$ desde el aire sobre un dieléctrico perfecto con $\varepsilon_r = 4$ y $\mu = \mu_0$. Halle los coeficientes de Fresnel. ¿Qué fracción de la potencia incidente es reflejada y qué fracción es transmitida al dieléctrico? Grafique los coeficientes de Fresnel y la potencia reflejada y la transmitida como una función de ε_r , suponiendo que su valor está entre 1 y 50.
- 7.22 Repita el Problema 7.21 para una onda con polarización normal.
- **7.23** Una onda plana con polarización normal incide con un ángulo de 60° desde el aire sobre agua dulce con $\varepsilon_r = 81$, $\sigma = 0$. El valor eficaz del campo eléctrico incidente es 1 V/m. Determine el valor eficaz del campo reflejado y del campo transmitido.
- 7.24 Repita el Problema 7.23 para polarización paralela.
- **7.25** La conductividad del cobre, media a 24 GHz, es 3.05×10^7 S \cdot m⁻¹. Calcule el coeficiente de atenuación, el coeficiente de fase, la velocidad de fase y la longitud de onda de una onda plana uniforme que se propaga en el cobre con esta frecuencia. Demuestre que la profundidad de penetración es lo suficientemente pequeña para justificar el concepto de densidad de corriente de superficie.
- **7.26** Una onda plana incide normalmente sobre una placa dieléctrica respaldada por un conductor perfecto. ¿Bajo qué condiciones no habrá reflexiones múltiples?
- **7.27** Una onda plana incide normalmente sobre un par de placas dieléctricas, dispuestas como se indica en la Fig. P7.27. Determine una condición entre ε_1 , ε_2 , d_1 y d_2 para la cual se transmitirá toda la potencia incidente.



José R. Morón

7.28 Una onda plana incide con un ángulo θ_0 sobre una placa dieléctrica infinita en el espacio libre (Fig. P7.28).
Demuestre que en este caso las leyes de Snell son

 $\sin \theta_1 = \sin \theta_0$, $\gamma_2 \sin \theta_2 = \gamma_1 \sin \theta_0$, $\sin \theta_3 = \sin \theta_0$

Se requiere un desarrollo matemático completo.



José R. Morón

BIBLIOGRAFÍA

- 1. Arfken, George B., Weber, Hans J.: "*Mathematical Methods for Physicists*". (6ta. Ed.) Elsevier Academic Press, 2005.
- 2. Bohn, Erik.: "Introduction to Electromagnetic Fields and Waves". Addison-Wesley, Reading, 1968.
- 3. Eyges, Leonard: "The Classical Electromagnetic Field", Dover Publications, Inc., 1980.
- 4. Harrington, Roger F.: "Electromagnetic Engineering". Dover Publications, Inc., 2003.
- 5. Hayt, William H., Buck, John: "Teoría Electromagnética". (7ma. Ed.), McGraw-Hill Book Company, 2006.
- 6. Johnson, Curtis C.: "Field and Wave Electrodynamics". McGraw-Hill Book Company, 1965.
- 7. Landau, L. D., Lifshitz: E. M.: "Electrodynamics of Continuous Media". Pergamon Press, Oxford, 1960.
- 8. Marshall, S., DuBroff, R., Skitek, G.: "Electromagnetismo". (4ta. Ed.), Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.
- 9. Mason, M. y Weaver, W.: "The Electromagnetic Field". Dover Publications, Inc., 1929.
- **10.** Maxwell, J. C.: "A Treatise on Electricity and Magnetism". Dover Publications, Inc., 1954 (de la edición de 1891).
- 11. Paris, D., Hurd, F.: "Basic Electromagnetic Theory". McGraw Hill Book Company, 1969.
- **12.** Plonsey, R., Collin, R.: "*Principles and Applications of Electromagnetic Fields*". McGraw Hill Book Company, 1961.
- **13.** Ramo, S., Whinnery, J., Van Duzer, T.: *"Fields and Waves in Communication Electronics"*. (3ra. Ed.) John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- 14. Rojansky, V.: "Electromagnetic Fields and Waves". Dover, 1979.
- 15. Sadiku, M.: "Elementos de Electromagnetismo". (4ta. Ed.), Oxford University Press, 2007.
- **16.** Sander, K. F. y Reed, G.: *"Transmission and propagation of electromagnetic waves"*. (2da. Ed.), Cambridge University Press (1986).
- 17. Schey, H. M.: "Div, grad, curl and all that". (3ra. Ed.) W. W. Norton & Company, 1997.
- 18. Schwarz, W. M.: "Intermediate Electromagnetic Theory". John Wiley & Sons, 1964
- 19. Shadowitz, Albert: "The Electromagnetic Field". Dover Publications, Inc., 1988.
- 20. Stratton, J. S.: "Electromagnetic Theory". McGraw Hill Book Company, 1941.
- 21. Tai, Chen-To: "Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory". Intext Educational Publishers, 1971.
- 22. Ulaby, F. T. "Fundamentals of Applied Electromagnetics". (5ta. Ed.). Prentice Hall, 2006.

José R. Morón

Apéndice

Sistema de Unidades

A través de todo este capítulo se ha usado en forma implícita el sistema de unidades mksa (metro-kilogramosegundo-amperio), el cual es un subsistema del *Sistema Internacional de Unidades* (SI). Originalmente, el sistema de unidades más común usado para las cantidades eléctricas en la discusión de las leyes físicas era un sistema de unidades centímetro-gramo-segundo, conocido como el *sistema electrostático de unidades* (esu) y el cual todavía tiene bastante uso en la literatura de la física. Como es un sistema cgs, la unidad de fuerza es la dina, la unidad de distancia es el centímetro y el segundo es la unidad de tiempo.

En la teoría electromagnética hay una cierta arbitrariedad en lo referente a dimensiones, arbitrariedad que se introduce con los factores ε_0 y μ_0 , los cuales conectan a los vectores del campo **D** y **E**, y **H** y **B** respectivamente, en el espacio libre. Como una consecuencia directa de las ecuaciones del campo, la cantidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{0.1}$$

tiene las dimensiones de velocidad (para todos los efectos prácticos $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$), y toda selección arbitraria de ε_0 y μ_0 está sujeta a esta restricción. Originalmente, en el sistema cgs se seleccionó como cuarta unidad a μ_0 , arbitrariamente se le dio el valor de uno y se consideró adimensional. De esta manera, las dimensiones de ε_0 eran determinadas en forma única por la Ec. (0.1); entonces es posible demostrar que las unidades y dimensiones de cualquiera otra cantidad que entra en la teoría puede expresarse en términos de esas cuatro unidades básicas. Desgraciadamente, este sistema falló en la práctica puesto que las unidades de algunas cantidades resultaban demasiado pequeñas (resistencia y fuerza electromotriz, por ejemplo). Para remediar este defecto se introdujo un sistema práctico en el cual cada unidad tenía las dimensiones de la unidad electromagnética correspondiente y difería de ella por una potencia de diez, ésta, en algunos casos, era completamente arbitraria. Sin embargo, como las unidades del sistema práctico se definieron como múltiplos arbitrarios de unidades fundamentales, ellas no constituyen un sistema básico completo.

En 1901, Giorgi encontró una solución a esta dificultad y llamó la atención sobre el hecho de que el sistema práctico podía convertirse en uno básico mediante una selección apropiada de las unidades fundamentales. Esta selección fue tomar el **metro** internacional como la unidad de longitud, el **kilogramo** como la unidad de masa, el **segundo** para la unidad de tiempo y como cuarta unidad, cualquiera que perteneciese al sistema práctico, como el **culombio**, el **amperio** o el **ohmio**. A partir de las ecuaciones del campo es entonces posible deducir las unidades y dimensiones de las cuatro unidades fundamentales.

Es tradicional que se consideren como unidades básicas las de masa, longitud y tiempo. Sin embargo, para las cantidades eléctricas no existía una tradición que impusiera la necesidad. Considere, por ejemplo, la unidad de corriente. El **amperio internacional** (por mucho tiempo aceptado como la unidad práctica de corriente) se define en términos de la masa de plata depositada por unidad de tiempo mediante electrólisis en un voltámetro de plata estándar. A esta unidad se le considera apropiadamente como básica, independientemente de las unidades de masa, longitud y tiempo, puesto que la cantidad de corriente que sirve como unidad se encuentra a partir de un experimento que supuestamente se puede reproducir.

La unidad de corriente que se acepta actualmente, el **amperio absoluto**, se define como aquella corriente que al fluir por cada uno de dos alambres paralelos de longitud infinita y sección transversal de área despreciable, separados una distancia de 1 metro en el vacío, hace que entre los alambres actúe una fuerza transversal por unidad de longitud igual a 2×10⁻⁷ newton/metro. Esto significa que el amperio absoluto es una *unidad derivada*, puesto que su definición se hace en términos de la fuerza mecánica entre alambres.

En la discusión de las unidades y dimensiones en el electromagnetismo, se tomará como punto inicial la selección tradicional de longitud (**metro**), masa (**kilogramo**) y tiempo (**segundo**) como las dimensiones básicas y a la carga (**culombio**) como la unidad de electricidad básica.

La unidad de corriente en este sistema es el **amperio** y la unidad de resistencia es el **ohmio**. Estas cantidades son tales que una corriente de 1 amperio pasando por una resistencia de 1 ohmio, produce una cantidad de trabajo por segundo igual a 1 julio. Si *R* es la resistencia en ohmios de un conductor por el que pasa una corriente igual a *I* amperios, el trabajo disipado en calor en *t* segundos es

$$W = I^2 R t \tag{0.2}$$

El amperio se definirá con base en la ecuación de continuidad, Ec. (2-15), como la corriente que transporta 1 culombio en 1 segundo a través de cualquier superficie. Entonces, el ohmio es una unidad *derivada* cuya magnitud y dimensiones las determinan la Ec. (0.2):

$$1 \text{ ohm} = 1 \frac{\text{julio}}{(\text{ampere})^2 \text{segundo}} = 1 \frac{\text{vatio}}{(\text{ampere})^2}$$

$$= 1 \frac{\text{kilogramo(metro)}^2}{(\text{culombio})^2 \text{segundo}}$$
(0.3)

puesto que 1 vatio =1 julio/segundo.

El voltio se definirá sencillamente como 1 vatio/ampere, o

$$1 \text{ voltio} = 1 \frac{\text{vatio}}{\text{amperio}} = 1 \frac{\text{kilogramo(metro)}^2}{\text{culombio segundo}}$$
(0.4)

Como la unidad de la densidad de corriente es 1 ampere/(metro)², de la relación $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ se deduce que

1 unidad de
$$\mathbf{E} = 1 \frac{\text{newton}}{\text{culombio}} = 1 \frac{\text{kilogramo(metro)}^2}{\text{culombio segundo metro}}$$

= $1 \frac{\text{voltio}}{\text{metro}}$ (0.5)

De la relación J = σE , se deduce que la unidad de la conductividad σ es

1 unidad de conductividad =
$$1 \frac{\text{amperio}}{\text{voltio} \cdot \text{metro}}$$

$$= 1 \frac{1}{\text{ohmio metro}}$$
(0.6)

El nombre del recíproco del ohm, habitualmente llamado mho, es oficialmente el **siemens**. Por lo tanto, la unidad de conductividad es 1 siemens/metro.

El flujo del vector **B** se mide en **webers** y, por lo tanto, la densidad del campo **B** se mide en webers/(metro)² o **teslas**. Ahora bien, de acuerdo con la Ec. (6.439,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \frac{\text{webers}}{\text{segundo}}$$
(0.7)

La integral de línea

 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

o fuerza electromotriz (fem) se mide en voltios, así que la fem inducida en un contorno cerrado es igual a la tasa temporal de decrecimiento del flujo enlazado por el contorno, de manera que entre las unidades existe la relación

$$1 \text{ voltio} = 1 \frac{\text{weber}}{\text{segundo}}$$
(0.8)

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ voltio} \cdot \text{segundo}$$
$$= 1 \frac{\text{julio}}{\text{amperio}}$$
$$= 1 \frac{\text{kilogramo (metro)}^2}{\text{culombio} \cdot \text{segundo}}$$
(0.9)

Sólo faltan las dimensiones de **D** y **E**. Como **D** = ε **E**, y **H** = $\frac{1}{\mu}$ **B**, es necesario y suficiente que ε_0 y μ_0 satisfagan la Ec. (0.1) y que se mantenga la relación apropiada entre las unidades absolutas y las prácticas. La masa, longitud, tiempo y carga las representaremos por las letras M, L, T y Q, respectivamente, y el símbolo [A] significará "las dimensiones de A". Entonces, de la Ec. (6.31),

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \text{culombios} \tag{0.10}$$

y, por tanto,

$$[D] = \frac{\text{coulombio}}{(\text{metro})^2} = \frac{Q}{L^2}$$
(0.11)

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{D}{\kappa E}\right] = \frac{\text{culombio}}{\text{voltio-metro}} = \frac{Q^2 T^2}{ML^3}$$
(0.12)

El **faradio**, una unidad derivada para la capacitancia y se define como la capacidad de un cuerpo conductor cuyo potencial es aumentado en 1 voltio por una carga de 1 culombio. En otras palabras, es igual a 1 culombio/voltio. En el sistema mks, el parámetro ε_0 sí tiene dimensiones y se mide en faradios/metro.

Por analogía con el caso eléctrico, la integral de línea

$$\int_{a}^{b} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

evaluada en una trayectoria específica, comúnmente se denomina la **fuerza magnetomotriz** (fmm). En un campo magnético estacionario,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot dl = I \quad (\mathbf{A}) \tag{0.13}$$

De acuerdo con esta ecuación, la fuerza magnetomotriz tiene las dimensiones de corriente eléctrica. Sin embargo, en la práctica, la corriente frecuentemente fluye por las vueltas de una bobina la cual es enlazada por el contorno C. Si hay n vueltas, la corriente total enlazada por H es nI, y se acostumbra expresar la fuerza magnetomotriz en amperios-vuelta, aunque n es adimensional,

$$fmm = amperios \cdot vueltas$$
 (0.14)

y por tanto

$$[H] = \frac{\text{amperios} \cdot \text{vueltas}}{\text{metro}} = \frac{Q}{LT}$$
(0.15)

Para el parámetro μ_0 , encontramos

$$[\mu_0] = \left[\frac{B}{\kappa_m H}\right] = \frac{\text{voltio-segundo}}{\text{amperio-metro}} = \frac{ML}{Q^2}$$
(0.16)

Igual que en el caso de ε_0 , es conveniente expresar a μ_0 en términos de una unidad derivada, en este caso, el **henry**, definido como 1 voltio-segundo/amperio, y el parámetro μ_0 se mide en henrys/metro.