

ONDAS

DEFINICIÓN: PERTURBACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE EQUILIBRIO DE UN MEDIO MATERIAL O NO, QUE SE PROPAGA POR ESTE CON O SIN DISTORSIÓN TRANSPORTANDO ENERGÍA Y MOMENTO. LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN O ECUACIÓN DE ONDA PUEDE SER LINEAL O NO LINEAL.

$$\psi(\vec{r}, t)$$

TIPOS DE ONDAS

LINEALES : SATISFACEN UNA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN LINEAL $\Rightarrow$ SUPERPOSICIÓN

NO LINEALES : LA ECUACIÓN DE ONDA ES NO LINEAL $\Rightarrow$ SOLITONES

DISPERSIVAS : SE DISTORSIONAN AL PROPAGARSE

NO DISPERSIVAS : MANTIENEN LA FORMA AL PROPAGARSE

PROGRESIVAS : $\psi(x, t) = \psi(x \pm vt)$
 $\swarrow$ VELOCIDAD DE LA PERTURBACION
FASE

ESTACIONARIAS : $\psi(x, t) = f(x) \cdot g(t)$

SIMPLES : $\psi_k(x, t) = A_k \cos(kx \pm \omega(k) \cdot t)$ ONDA ARMONICA

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

COMPUESTAS : $\psi(x, t) = \sum_k \psi_k(x, t)$
PAQUETE DE ONDAS (SOLO PARA ONDAS LIN.)

ONDAS ARMONICAS Y PAQUETES DE ONDAS

LAS ONDAS ARMONICAS $\psi_k(x,t) = A_k \cos(kx \pm \omega(k)t)$ SON SOLUCIONES BÁSICAS DE ECUACIONES DE ONDA LINEALES

PROPIEDADES:

- 1) PERIÓDICA EN x CON PERÍODO $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (LONG. DE ONDA)
- 2) PERIÓDICA EN t CON PERÍODO $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ($\frac{1}{T}$ ES LA FRECUEN.)
- 3) UNA DIFERENCIA EN LA FASE $kx \pm \omega(k)t + \Delta\varphi$ PUEDE INTERPRETARSE COMO DEFASAJE ESPACIAL $\Delta x = \Delta\varphi/k$ O COMO DEFASAJE TEMPORAL $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$

- 4) FORMA COMPLEJA: $\psi_k(x,t) = A_k e^{j(kx \pm \omega(k)t)}$
- $\uparrow$ $\uparrow$
 $\in \phi$ $k \cdot v(k)$

5) SE LLAMA LEY DE DISPERSIÓN A: $\omega(k)$

LOS PAQUETES DE ONDAS SON SUPERPOSICIÓN DE ONDAS SIMPLES (GENERALMENTE ARMONICAS)

• DISCRETO: $\psi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kx \pm \omega(k)t)$

• CONTINUO: $\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cdot e^{j(kx \pm \omega(k)t)} dk$

AHORA HAY DOS VELOCIDADES DIFERENTES:

- VELOCIDAD DE FASE: $v_f = \frac{\omega(k)}{k}$ (PUEDE DEPENDER DE k)
- VELOCIDAD DE GRUPO: $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$

1- ONDAS NO DISPERSIVAS (EN MEDIOS HOMOGENEOS)

A LA ECUACION DE PROPAGACION LE PEDIREMOS :

- QUE SEA LINEAL (PODEMOS HACER SUPERPOSICION)
- QUE ADMITA SOLUCIONES ARMONICAS (HACER PAQUETES)
- LA LEY DE DISPERSION SEA LINEAL EN k : $\omega(k) = v_\phi \cdot k$
CTE.

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v_\phi^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

$\psi(x, t_0)$, $\dot{\psi}(x, t_0)$ ← CONDICIONES INI

$\psi(x_a, t)$, $\psi(x_b, t)$ ← COND. CONTORNO

PROPIEDADES :

1- LINEALIDAD: ψ_1 y ψ_2 SOLUCIONES $\Rightarrow \psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2$
SOLUCIÓN

2 - SEA $\{\psi_k\}_k$ UN CONJUNTO COMPLETO DE SOLUCIONES
PARTICULARES: LA SOLUCIÓN GENERAL SE
PUEDE PONER COMO:

$$\psi(x,t) = \sum_k a_k \cdot \psi_k(x,t)$$

- * UN CONJUNTO DE FUNCIONES ES COMPLETO SI
- a) SON L.INDEPENDIENTES (EN SENTIDO FUNCIONAL)
 - b) FORMAN BASE DEL ESPACIO FUNCIONAL

3) TODA FUNCION DE LA FORMA $f(x \pm v_{\phi} \cdot t)$ ES SOLUCIÓN
ADEMAS, COMO $f(x+v_{\phi}t)$ Y $f(x-v_{\phi}t)$ SON L.INDEP.

$$\psi(x,t) = a f(x+v_{\phi}t) + b f(x-v_{\phi}t)$$

SOLUCION
DE
D'ALEMBERT

4) Si $\psi(x,t) \in \mathcal{C}$ ES SOLUCIÓN $\Rightarrow \psi^*$ ES SOLUCIÓN
TAMBIEN Y ADEMAS L.INDEP.

CONSECUENCIA: LA E.O. ADMITE SIEMPRE
SOLUCIONES REALES Y EN
GENERAL SE TIENE QUE

$$\psi(x,t) = a \psi(x+v_{\phi}t) + b \psi^*(x+v_{\phi}t) + c \psi(x-v_{\phi}t) + d \psi^*(x-v_{\phi}t)$$

COMO SOLUCIÓN MAS GENERAL

5) SOLUCIONES ESTACIONARIAS (SON SOL.PARTICULARES)

$$\psi(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

$$\psi_k(x,t) = (Ae^{jkx} + Be^{-jkx}) \cdot (ce^{j\omega t} + de^{-j\omega t})$$

- DEPENDEN DE UN PARAMETRO: k
- LAS CONSTANTES A, B, C, D SE DETERMINAN POR LAS C.I. Y LAS C.C.
- YA QUE PODEMOS TENER SOLUCIONES REALES, LAS ONDAS ESTACIONARIAS TAMBIEN SE EXPRESAN:

$$\psi_k(x,t) = (a \sin kx + b \cos kx) \cdot (c \sin \omega t + d \cos \omega t)$$

- CUALQUIER ONDA PUEDE PONERSE COMO SUPERPOSICIÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS

EJEMPLO: ONDAS EN UNA CUERDA DE LONGITUD L CON EXTREMOS FIJOS

LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS:

$$\psi_k(x,t) = (a \sin kx + b \cos kx) \cdot (c \sin kut + d \cos kut)$$

DEBEN CUMPLIR

$$\psi_k(0,t) = \psi_k(L,t) = 0$$

$$\begin{cases} \psi_k(0,t) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \psi_k(L,t) = 0 \Rightarrow k \cdot L = m\pi \\ \quad \downarrow \\ \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\boxed{k = \frac{m\pi}{L}}$$

NO TODOS LOS VALORES DE k SON PERMITIDOS

DEFINICIÓN DE MODO NORMAL:

$$\psi_m(x,t) = \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot \left(c \sin \frac{m\pi v}{L} t + d \cos \frac{m\pi v}{L} t \right)$$

c y d CONSTANTES A DETERMINAR

LA SOLUCIÓN GENERAL ES UNA SUPERPOSICIÓN DE MODOS

$$\psi(x,t) = \sum_m \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot \left(c_m \sin \frac{m\pi v}{L} t + d_m \cos \frac{m\pi v}{L} t \right)$$

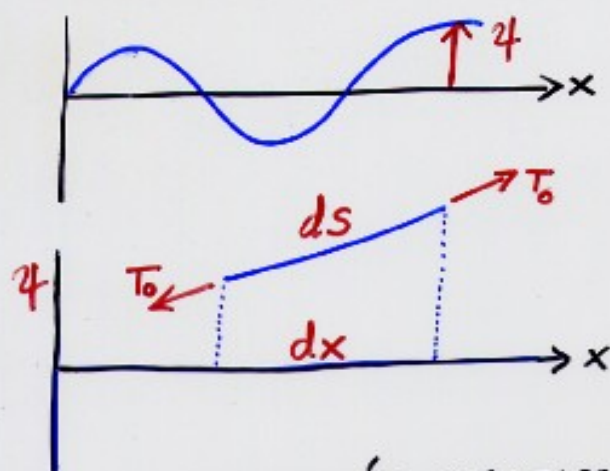
DONDE LOS VALORES DE c_m y d_m SE DETERMINAN POR C.I.

$$\psi(x,0) = \sum_m d_m \sin \frac{m\pi}{L} x \Rightarrow d_m = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x,0) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$\dot{\psi}(x,0) = \sum_m \frac{m\pi v}{L} c_m \sin \frac{m\pi x}{L} \Rightarrow c_m = \frac{2}{L} \frac{L}{m\pi v} \int_0^L \dot{\psi}(x,0) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$\text{Si } \dot{\psi}(x,0) = 0 \Rightarrow c_m = 0$$

ENERGÍA Y MOMENTO TRANSPORTADO (ONDAS EN CUERDAS) ⁶



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \left(v^2 = \frac{T_0}{\rho} \right)$$

$T_0 \equiv$ tensión en cada porción de cuerda estática

→ ENERGÍA CINÉTICA: $T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \dot{y}^2 dx$

→ ENERGÍA POTENCIAL: $V = \int_0^L T_0 (ds - dx) \approx \int_0^L \frac{1}{2} T_0 y'^2 dx$

● ENERGÍA TRANSPORTADA:

$$E = T + V = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (\dot{y}^2 + v^2 y'^2) dx$$

● MOMENTO TRANSPORTADO

$$P = \pm \int dx \rho \dot{y} y'$$

● RELACIÓN ENTRE ENERGÍA Y MOMENTO:

$$E = v \cdot P$$

ENERGÍA TRANSPORTADA POR UN MODO NORMAL

$$y_m(x,t) = A \sin \frac{m\pi}{L} x \cdot \cos \left(\frac{m\pi v}{L} t + \phi \right)$$

$$E = \frac{m^2 \pi^2 v^2 \rho}{4L} \cdot A^2$$

PARA SUPERPOSICIÓN DE MODOS $E = \frac{\pi^2 v^2 \rho}{4L} \cdot \sum_m m^2 A_m^2$

ONDAS ESTACIONARIAS EN DIMENSION 2 (MEMBRANAS)

$$\ddot{\varphi}(x, y, t) = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(x, y, t)$$

SUPONEMOS SOLUCIONES $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y) \cdot \phi(t)$
 $\hookrightarrow \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$

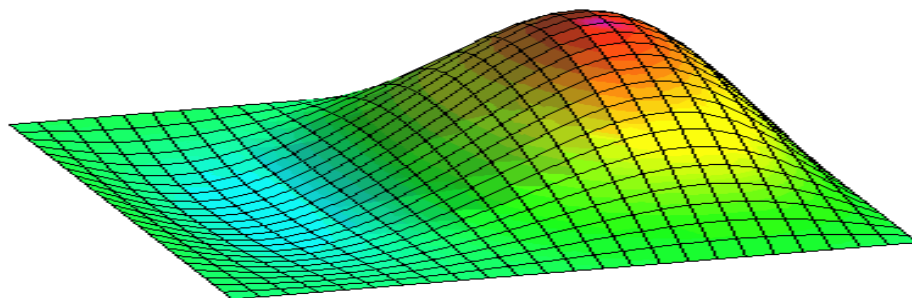
SI IMPONEMOS QUE EN LOS CONTORNOS DE LA MEMBRANA

$$\varphi(x, y, t) \Big|_C = 0 \quad \begin{aligned} \psi_1(0) = \psi_1(L_1) = 0 &\Rightarrow k_1 = \frac{u_1 \pi}{L_1} \\ \psi_2(0) = \psi_2(L_2) = 0 &\Rightarrow k_2 = \frac{u_2 \pi}{L_2} \end{aligned}$$

$$\varphi_{m, n}(x, y, t) = A \sin \frac{u_1 \pi}{L_1} x \sin \frac{u_2 \pi}{L_2} y \cdot \cos(kvt + \delta)$$

$$\text{con } k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

A y δ A DETERMINAR POR PERFIL Y VELOCIDAD INICIALES



2- ECUACIONES DE ONDAS DISPERSIVAS

ES NECESARIO CONOCER LA LEY DE DISPERSION $\omega = \omega(k)$

- LA VELOCIDAD DE GRUPO YA NO COINCIDE CON LA DE FASE

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

- LOS PAQUETES DE ONDAS SE DISTORSIONAN CON LA PROPAGACIÓN

$$\psi(x,t) = \int a(k) \cdot e^{j(kx \pm \omega(k)t)} dk$$

EJEMPLOS:

- VIBRACIÓN DE UNA CUERDA DE PIANO REAL

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\rho_0} k^2 + \alpha k^4$$

$$\ddot{\psi} = \frac{T_0}{\rho_0} \psi'' - \alpha \psi^{(4)}$$

2) ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER (E.S.)

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{U}{\hbar}$$

$$j\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + U\psi$$

VEAMOS ALGUNAS PROPIEDADES:

- Si $\psi \in \psi$ es solución $\Rightarrow \psi^*$ NO ES SOLUCIÓN

$\Rightarrow$ CONSECUENCIA INMEDIATA: ψ NO PUEDE SER REAL

LA E.S. SOLO ADMITE SOLUCIONES COMPLEJAS

- AL SER DE PRIMER ORDEN EN t SOLO NECESITAMOS $\psi(x, t_0)$ COMO DATO INICIAL.

(ADEMAS DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO PARA PRECISAR LA PARTE ESPACIAL)

- ¿COMO SON LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS?

$$j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x) \cdot \psi$$

SUPONEMOS $\psi(x, t) = \psi(x) \cdot \phi(t)$ CON LO QUE

$$\underbrace{j\hbar \frac{\dot{\phi}}{\phi}}_E = \underbrace{\frac{1}{\psi} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi}_E$$

- PARTE TEMPORAL: $\phi(t) = c e^{-j \frac{E}{\hbar} t}$

- PARTE ESPACIAL: SOLUCION DE

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi}_{\text{OPERADOR HAMILTONIANO } H} = E \psi$$

→ ECUACION DE AUTOVALORES DE H
(ESPECTRO DE H)

EL ESPECTRO DE H PUEDE SER DISCRETO Y/O CONTINUO. LAS AUTOFUNCIONES FORMAN UN CONJUNTO COMPLETO $\{\psi_E\}_E$ Y POR TANTO

$$\psi(x, t) = \sum_E A_E \psi_E(x) \cdot e^{-j \frac{E}{\hbar} t}$$

TEMAS COMPLEMENTARIOS SOBRE ONDAS

- ONDAS CON DISIPACIÓN EN MEDIOS HOMÓGENEOS
- PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS NO HOMÓGENEOS
- ONDAS NO LINEALES

1- ONDAS CON DISIPACIÓN

LA ECUACION DE PROPAGACION CONTIENE TERMINOS DISIPATIVOS LINEALES EN $\dot{\psi}$

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\psi(x,t)$ ES DE LA FORMA $\psi(x,t) = u(x,t) e^{-\frac{rt}{2}}$ CON u

$$v^2 u'' = \ddot{u} - \frac{r^2}{4} u \approx \ddot{u} \text{ (si } r \text{ PEQUEÑO)}$$

CON LO QUE EN REALIDAD $u(x,t)$ ES UNA ONDA PROGRESIVA

$$\psi(x,t) = u(x \pm vt) \cdot e^{-\frac{rt}{2}}$$

2- PROPAGACION EN MEDIOS NO HOMÓGENEOS

LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DEPENDE DEL MEDIO

$$v^2(x) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

- NO ADMITE SOLUCIONES ARMÓNICAS SIMPLES
- LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS CONDUCE A RESOLVER ECUACIONES EN LA VARIABLE x SIMILARES A LA DE SCHRÖDINGER

$$f''(x) + k^2(x)f(x) = 0 \quad \frac{\omega^2}{v^2(x)} = k^2(x)$$

3) ONDAS NO LINEALES (SOLITONES)

EJEMPLO: ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE-VRIES

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \underbrace{6\psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{TERMINO NO LINEAL}} = 0$$

SOLUCIONES: ADMITE SOLUCIONES QUE MANTIENEN SU FORMA EN LA PROPAGACION

$$\psi(x,t) = \frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - a) \right]}$$

SOLITÓN
KdV

CON c y a CONSTANTES A DETERMINAR

OTRO EJEMPLO: LA ECUACIÓN DE SCHRODINGER NO LINEAL

$$j \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa |\psi|^2 \psi$$

