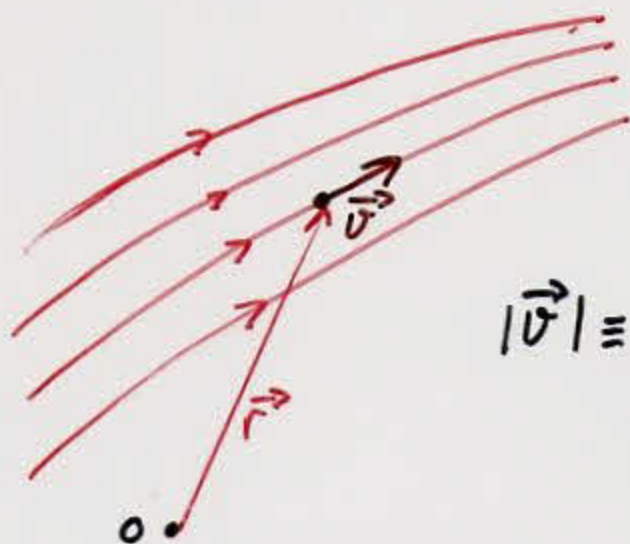


2- DINAMICA DE FLUIDOS

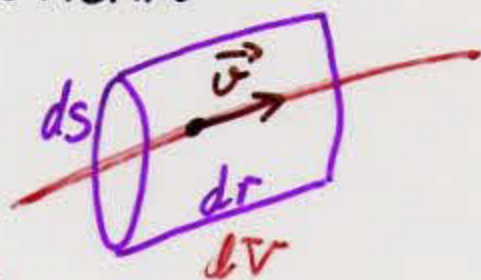
8

UN FLUIDO EN MOVIMIENTO UTENE CARACTERIZADO POR DOS MAGNITUDES : UN CAMPO ESCALAR DE PRESIONES $P(\vec{r}, t)$ QUE PODEE CAMBIAR CON EL TIEMPO, Y UN CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES $\vec{v}(\vec{r}, t)$ QUE INDICA EL ESTADO DINAMICO DE CUALQUIER ELEMENTO DEL FLUIDO dV



- LINEA DE CORRIENTE
- TUBO DE CORRIENTE
- FLUJOS ... } DEPENDEN DE t

$|\vec{v}| \equiv$ VOLUMEN DE FLUIDO QUE ATRAVIESA LA UNIDAD DE SUPERFICIE EN LA UNIDAD DE TIEMPO



$$dV = ds \cdot dr = ds \cdot v \cdot dt \Rightarrow v = \frac{dV}{ds dt}$$

CONOCIDO EL CAMPO $\vec{v}$ PODEMOS CALCULAR ...

1- CAUDAL $Q \equiv$ VOLUMEN DE FLUIDO QUE ATRAVIESA UNA SUPERFICIE S' POR UNIDAD DE TIEMPO

$$Q = \int_{S'} \vec{v} \cdot d\vec{S} = v \cdot S \quad (v \text{ UNIFORME EN } S')$$

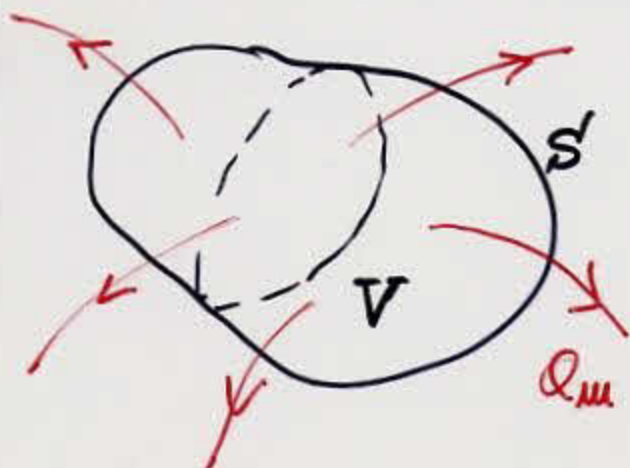
2- CAUDAL MASICO $Q_m \equiv$ MASA DE FLUIDO QUE ATRAVIESA UNA SUPERFICIE S' POR UNIDAD DE t .

$$Q_m = \int_{S'} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

9

¿QUÉ CONDICIÓN DEBE CUMPLIR UN CAMPO DE VELOCIDADES PARA QUE PUEDA CORRESPONDER A UN FLUIDO EN MOVIMIENTO?



$$Q_m = -\frac{dm}{dt}$$

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dv$$

$$\iiint_V \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) \cdot d\vec{v} = \iiint_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

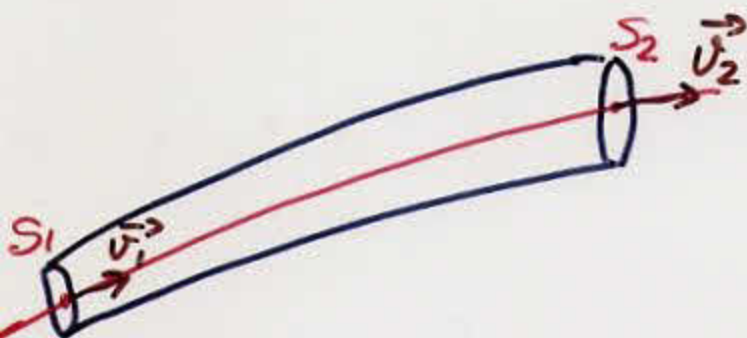
$$\boxed{\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD
(CONSERVACIÓN DE LA MASA)

FLUIDO ESTACIONARIO : SUS MAGNITUDES RELEVANTES NO DEPENDEN EXPLICITAMENTE DEL TIEMPO

$$\rho = \rho(\vec{r}), \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}), \rho = \rho(\vec{r})$$

PARA UN FLUIDO ESTACIONARIO: $\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$ Y SI
ADEMAS ES HOMÓGENEO ($\rho = \text{cte}$): $\vec{\nabla} \vec{v} = 0$



$$\underbrace{S_1 \cdot v_1}_{Q_{IN}} = \underbrace{S_2 \cdot v_2}_{Q_{OUT}}$$

ECUACIÓN DE LA DINÁMICA DE UN FLUIDO

10

PARA CUALQUIER ELEMENTO DE FLUIDO ...

$$\vec{p}_e - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2ª LEY DE NEWTON POR UN. DE MASA APLICADA A CUALQUIER dV

PERO SIENDO $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$, EL CÁLCULO VECTORIAL NOS DICE QUÉ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

SI SUPONEMOS QUE EL FLUJO ES ESTACIONARIO $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
Y TAMBIÉN IRROTACIONAL $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ENTONCES ...

Datos iniciales

$\vec{p}_e$
 $\vec{v}$
+ COND. INIC.

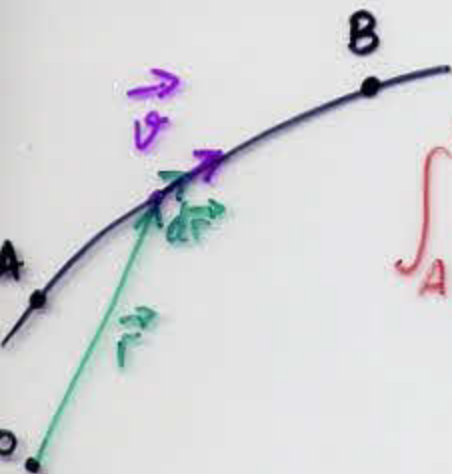
$$\vec{p}_e - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2$$
$$\vec{\nabla}(\rho v^2) = 0$$

SOLUCIONES

$P(\vec{r})$
 $\vec{v}(\vec{r})$

!! Muy DIFÍCIL !!

TEOREMA DE BERNOULLI (BALANCE DE ENERGÍA)



$$\int_A^B \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 \cdot d\vec{r}}_{d(\frac{1}{2} v^2)} = \underbrace{\int_A^B \vec{p}_e \cdot d\vec{r}}_{W_{A \rightarrow B}} - \int_A^B \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \cdot d\vec{r}$$
$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{1}{\rho} dP$$

TEOREMA DE BERNOUILLI

$$\left[\frac{1}{2} v^2 \right]_A^B = w_{A \rightarrow B}^e - \int_A^B \frac{1}{\rho} dP$$

VEAMOS ALGUNAS SITUACIONES DE ESPECIAL INTERÉS

1 - FLUIDO EN UN CAMPO GRAVITATORIO $\vec{f}_e = -\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$

$$w_{A \rightarrow B}^e = \int_A^B -\vec{\nabla}(gz) d\vec{r} = -gz \Big|_A^B = gz_A - gz_B$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2 = gz_A - gz_B - \int_A^B \frac{dP}{\rho}$$

QUEDA POR DECIDIR ACERCA DE ρ ...

a) FLUIDO INCOMPRESIBLE ($\rho = \text{cte}$)

$$\underbrace{\frac{1}{2} v_A^2}_T + \underbrace{gz_A}_U + \underbrace{\frac{1}{\rho} P_A}_V = \frac{1}{2} v_B^2 + gz_B + \frac{1}{\rho} P_B$$

LO QUE MUCHOS AUTORES LLAMAN "TEOREMA DE BERNOUILLI"

b) FLUIDO TIPO GAS IDEAL ($\rho = P/\kappa$)

$$\int_A^B \frac{dP}{\rho} = \int_A^B \kappa \frac{dP}{P} = \kappa \ln P \Big|_A^B = \kappa \ln P_B - \kappa \ln P_A$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 + gz_A + \kappa \ln P_A = \frac{1}{2} v_B^2 + gz_B + \kappa \ln P_B$$

TEOREMA DE BERNOUILLI PARA UN FLUIDO ESTAC. DE GAS IDEAL EN UN CAMPO GRAVITATORIO TIPO TERRESTRE,

2- FUERZAS EXTERIORES NO CONSERVATIVAS

12

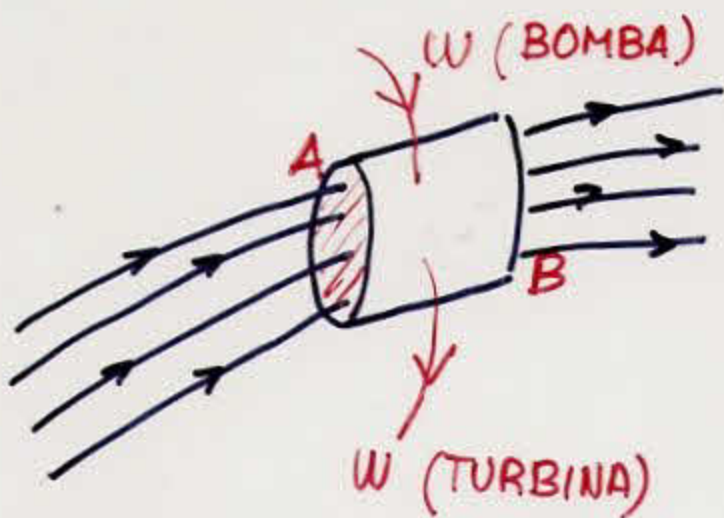
SUPONGASE QUE $\vec{p}_e = \vec{p}_e^c + \vec{p}_e^{nc}$ y QUE $\vec{p}_e^c = -\vec{g}$

$$W_{A \rightarrow B}^e = \int_A^B \vec{p}_e d\vec{r} = g z_A - g z_B + \underbrace{\int_A^B \vec{p}_e^{nc} d\vec{r}}_{W_{A \rightarrow B}^{nc}} = g(z_A - z_B) + W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} v_B^2 + g z_B + \frac{1}{\rho} p_B = \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A + \frac{1}{\rho} p_A + W_{A \rightarrow B}^{nc}} \geq 0$$

Si $W_{A \rightarrow B}^{nc} > 0$ TENEMOS MAS ENERGÍA $\rightarrow$ BOMBA

Si $W_{A \rightarrow B}^{nc} < 0$ TENEMOS MENOS ENERGÍA $\rightarrow$ TURBINA
 $\rightarrow$ VISCOSIDAD



!! IMPORTANTE !!

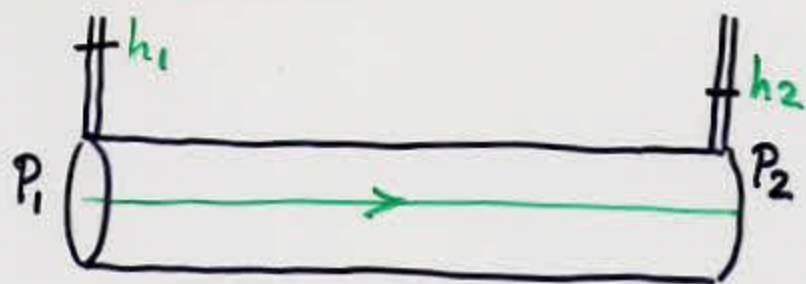
EN EL TRAYECTO
ENTRE A Y B EL
FLUJO NO COMPLE

$$S_A v_A = S_B v_B$$

DINAMICA DE FLUIDOS VISCOSOS

13

EN UNA TUBERIA HORIZONTAL CILINDRICA POR LA QUE FLUYE EN REGIMEN ESTACIONARIO UN FLUIDO, SE OBSERVA UNA CAIDA DE PRESIÓN.



$$\frac{1}{2} P_2 + g z_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{1}{2} P_1 + g z_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + W_{vis}$$

< 0

$$|W_{vis}| = \frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) = g(h_1 - h_2)$$

MODELO DE NAVIER (LAMINAR)



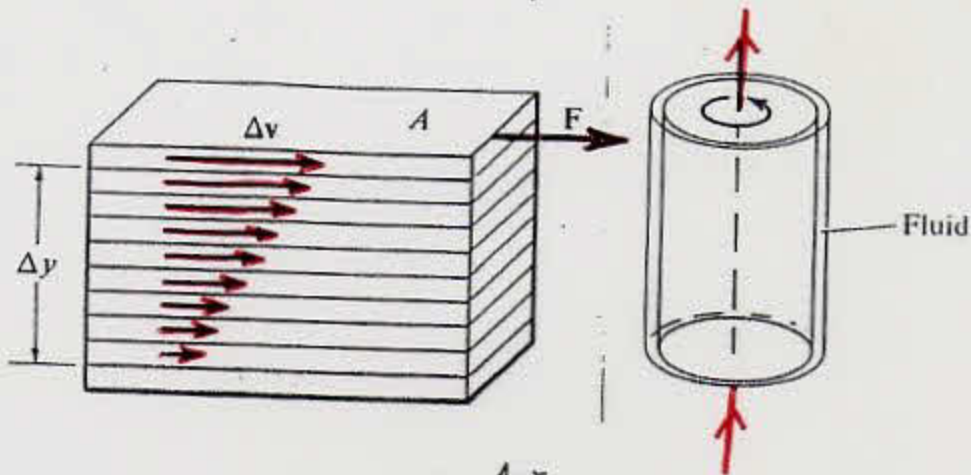
$$F_{vis} = \eta \cdot S \left| \frac{dv}{dr} \right|$$

PARA LA CONDUCCIÓN EN UNA TUBERIA CILINDRICA LAS CAPAS SON CILINDRICAS ALREDEDOR DEL EJE.

- LA VELOCIDAD DE LAS CAPAS DECRECE CON LA DISTANCIA AL EJE DE LA TUBERIA.
- EL CAUDAL DEPENDERA DEL GRADIENTE DE PRESIÓN A LO LARGO DE LA TUBERIA

VISCOSIDAD EN REGIMEN LAMINAR: MODELO DE NAVIER

$$Re = \frac{\rho \cdot D \cdot \bar{v}}{\eta} < 2300$$



$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

$$[\eta] = \left[\frac{F/A}{\Delta v / \Delta y} \right] = ML^{-1}T^{-1}$$

MODELO DE NAVIER APLICADO A UN TUBO CILINDRICO HORIZONTAL

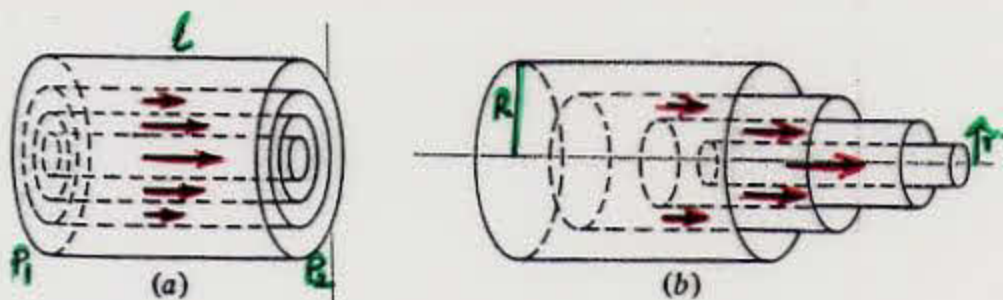


Figure 14.2. Laminar flow in a tube. The fluid in contact with the wall is at rest and successive thin cylindrical layers move with increasing speeds. The fluid at the center has the maximum velocity. If initially the fluid in the tube is as in (a), then a short time later the layers will have moved as in (b).

PERFIL DE
VELOCIDADES
EN SECCIÓN

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta P}{l} \frac{R^2}{8\eta}$$

VELOCIDAD
MEDIA

CAUDAL
(POISEVILLE)

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{l} R^4$$

$$\omega_{vis} = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{8\eta l}{\rho R^2} \bar{v}$$

ENERGIA POR
UNIDAD DE MASA