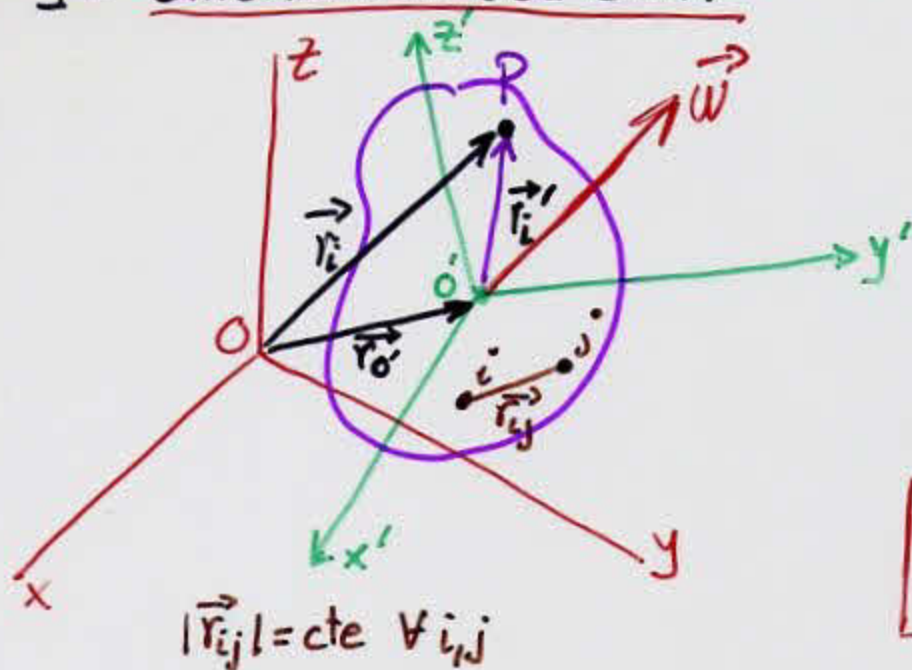


# EL SÓLIDO RÍGIDO 2-D

## 1- CINEMÁTICA DEL S.R.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_o + \vec{r}'_i$$

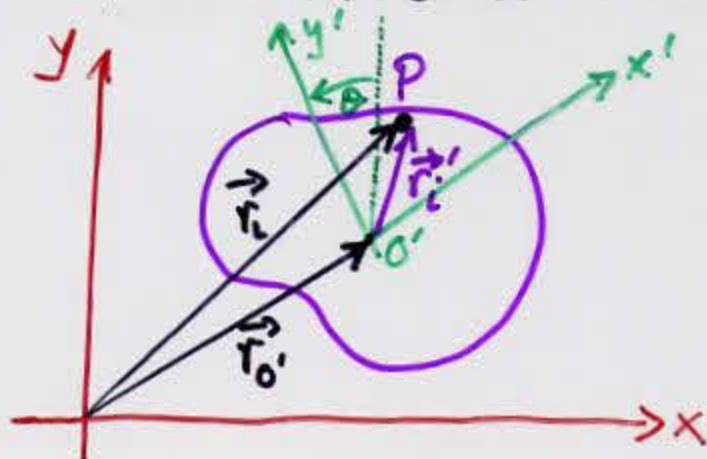
YA QUE EL SISTEMA LIGADO PUEDE ROTAR, ENTONCES

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{v}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

PERO ...  $\vec{v}'_i = 0$  (LIGADO)

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i}$$

SI NOS RESTRINGIMOS A MOVIMIENTOS EN EL PLANO (2-D)



$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

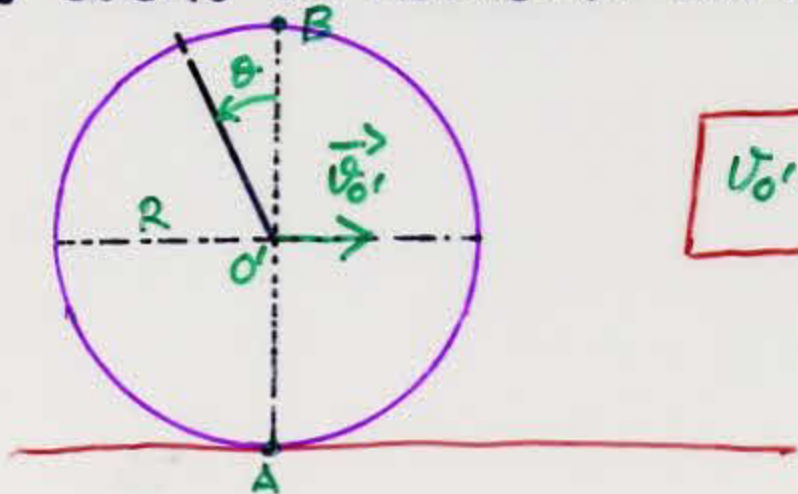
TRASLACIÓN      ROTACIÓN

- EL MOVIMIENTO GENERAL DE UN S.R. SE COMPONE DE UNA TRASLACIÓN RÍGIDA Y DE UNA ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE QUE PASE POR O' Y PERPENDICULAR AL PLANO DE MOVIMIENTO.
- TRASLACIÓN Y ROTACIÓN EN GENERAL SON INDEPENDIENTES. EN CASO CONTRARIO SE DICE QUE EXISTE UNA LIGADURA CINEMÁTICA (EJ. RODADURA SIN DESLIZAMIENTO)
- UN S.R. TIENE 6 GRADOS DE LIBERTAD EN 3-D Y SOLO 3 EN (2-D) COMO MÁXIMO.  $\boxed{x_o, y_o, \theta}$

... POR TANTO, PARA DESCRIBIR EL MOVIMIENTO DE UN S.R. EN 2-D HACE FALTA:

- 1- UNA ECUACIÓN DINÁMICA PARA  $(x_{o'}, y_{o'}) \equiv \vec{r}_{o'}$ , LA CUAL DESCRIBE LA TRASLACIÓN DEL S.R.
- 2- UNA ECUACIÓN DINÁMICA PARA EL ÁNGULO  $\theta$ , LA CUAL DESCRIBE LA ROTACIÓN ALREDEDOR DE  $O'$

ALGO MÁS SOBRE LA RODADURA SIN DESLIZAMIENTO



$$v_{O'} = \dot{\theta} \cdot R$$

OTRAS RELACIONES ÚTILES:

$$v_B = 2\dot{\theta} R$$

$$v_A = 0$$



## 2- MAGNITUDES DINAMICAS PARA UN S.R.

### 2-1) MOMENTO LINEAL

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i') = M \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_{M \vec{r}_{CM}}$$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$

$$= M \vec{v}_{O'} + M \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}'$$

$$\begin{cases} \text{Si } O' \equiv CM & \vec{P} = M \vec{v}_{CM} \\ \text{Si } O' \equiv \text{FIJO} & \vec{P} = M \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}' = M \cdot \vec{v}_{CM} \end{cases}$$

CONCLUSIÓN :  $\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$  SI O' ES P. FIJO O ES C.M.

### 2-2) MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_{O'} = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i') =$$

MEDIDAS  
EN L.A.B.

$$= \underbrace{M \vec{r}_{CM}' \times \vec{v}_{O'}}_{\text{SE ANULA SI O' ES P. FIJO O SI O' \equiv CM}} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')$$

SE ANULA SI O' ES P. FIJO O SI O'  $\equiv$  CM

$$\vec{L}_{O'} / \text{LAB} = \vec{L}_{O'} / \text{CM O FIJO}$$

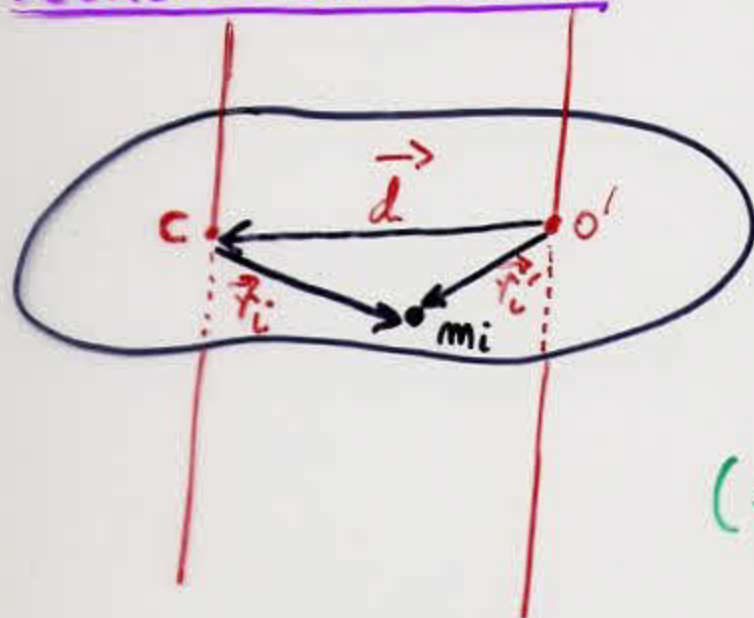
# CALCULO DEL MOMENTO ANGULAR EN EL SISTEMA LIGADO

$$\vec{L}_{O'} /_{CM} = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') = \sum_i m_i [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i') - \vec{r}_i' \cdot (\vec{r}_i' \cdot \vec{\omega})]$$

$$= \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i'^2 = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i'^2 = \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_{O'}$$

$\mathbb{I}_{O'}$  ES EL MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO A  $O'$

## TEOREMA DE STEINER



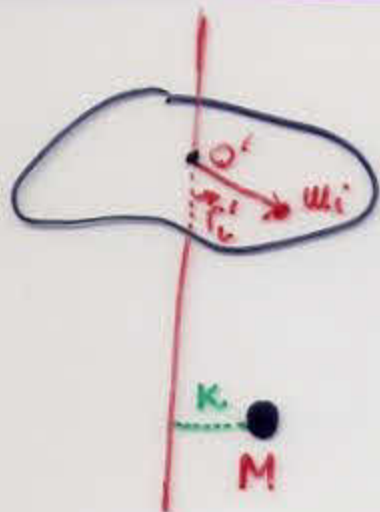
$$\mathbb{I}_{O'} = \sum_i m_i \vec{r}_i'^2 =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{d})^2 =$$

$$= M \vec{d}^2 + \mathbb{I}_C$$

(SI C ES EL C.M.)

## RADIO DE GIRO



$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = M K^2$$

( $M = \sum_i m_i$ )

$K \equiv$  radio de giro del S.R.



### 3 - ECUACIONES DINAMICAS DE UN S.R (2-D)

A) ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL C.M  $\rightarrow$  TRASLACION

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \rightarrow \boxed{M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i}$$

TRASLACIÓN

B) ECUACION PARA LA ROTACIÓN ALREDEDOR DEL PUNTO  $O'$  (C.M. O BIEN PUNTO FIJO)

$$\left. \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right|_{LAB} = \left. \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right|_{C.M} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{L}_{O'}}_{\vec{I}_{O'} \cdot \vec{\omega}} = \vec{M}_{O'}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{I}_{O'} \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}_{O'}}$$

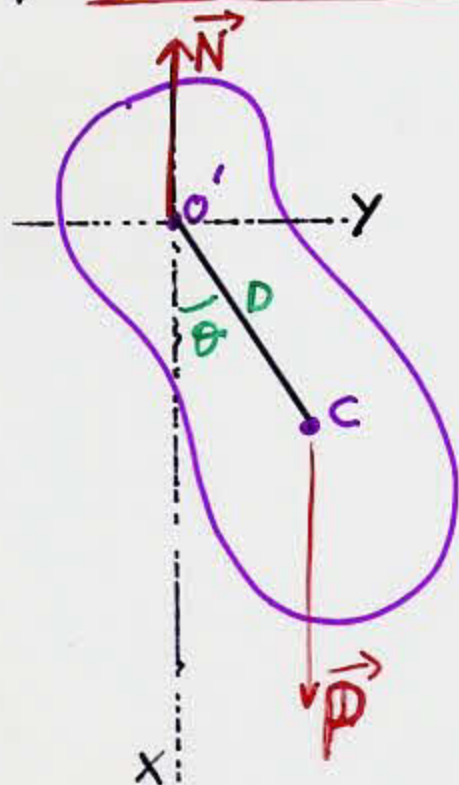
PARA SOLIDOS EN LOS QUE  $\vec{I}_{O'}$  SEA CONSTANTE...

$$\boxed{\vec{I}_{O'} \cdot \vec{a}_\alpha = \vec{M}_{O'}}$$

ROTACIÓN

CON  $\vec{a}_\alpha = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$   
AC. ANGULAR

#### 4- APLICACIÓN: EL PÉNDULO COMPUESTO



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'} \Rightarrow I_{O'} \vec{a}_\alpha = \vec{M}_{O'}$$

$$\vec{a}_\alpha = \ddot{\theta} \vec{k}'$$

$$\vec{M}_{O'} = M_{O'} \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ D \sin \theta & -D \cos \theta & 0 \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = -MgD \sin \theta \vec{k}'$$

$$I_{O'} \ddot{\theta} + MgD \sin \theta = 0$$

+ CONDICIONES INICIALES

SOLUCIÓN PARA ANGULOS PEQUEÑOS:  $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgD}{I_{O'}} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I_{O'}}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

PERÍODO:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{O'}}{MgD}} = \sqrt{\frac{I_C + MD^2}{MgD}} \cdot 2\pi =$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{K^2 + D^2}{gD}}$$

$I_C = MK^2$   
K = RADIO DE GIRO

Th. de Steiner