

INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA

1

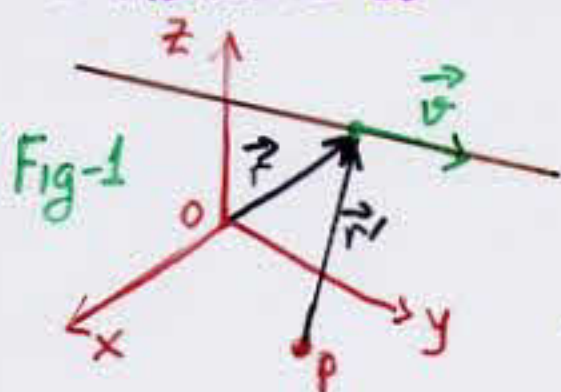
1- CONCEPTOS PRELIMINARES

- VECTOR LIBRE $\left\{ \begin{array}{l} \text{MODULO} \\ \text{DIRECCIÓN (RECTA DE APLICAC.)} \\ \text{SENTIDO} \end{array} \right.$

PARA ENCONTRAR LA RECTA DE APLICACION SOLO HACE FALTA

- PUNTO PERTENECIENTE A LA RECTA
- VECTOR DE DIRECCIÓN (UNITARIO)

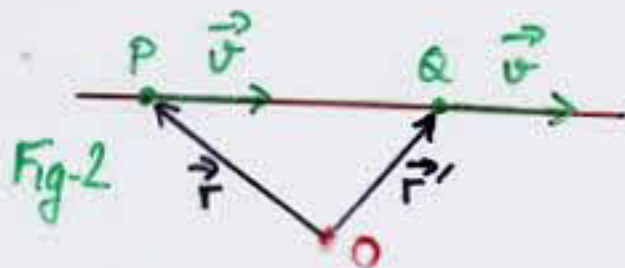
- MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO



$$M_O \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (M_P \vec{v} = \vec{r}' \times \vec{v})$$

PROPIEDADES :

1- SI $\vec{v}$ SE DESPLAZA A LO LARGO DE SU LINEA A APLICACION, EL MOMENTO NO CAMBIA (Fig-2)



$$\begin{aligned} M_O \vec{v} /_P &= \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r}' - \vec{PQ}) \times \vec{v} = \\ &= \vec{r}' \times \vec{v} - \vec{PQ} \times \vec{v} = M_O \vec{v} /_Q \end{aligned}$$

2- RELACIÓN ENTRE LOS MOMENTOS RESPECTO A DOS PUNTOS DISTINTOS DE UN MISMO VECTOR (Fig-1)

$$\begin{aligned} M_O \vec{v} &= \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{OP} + \vec{r}') \times \vec{v} = \vec{OP} \times \vec{v} + \vec{r}' \times \vec{v} = \\ &= \vec{OP} \times \vec{v} + M_P \vec{v} \end{aligned}$$

2 - EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE VECTORES

2

- SISTEMA DE VECTORES

$$S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N \}$$

CARACTERIZACIÓN DE S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_S = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad \text{RESULTANTE} \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^N M_A \vec{v}_i \quad \text{MOMENTO PARA TODA} \end{array} \right.$$

(CAMPO DE MOMENTOS)

- EQUIVALENCIA EN UN PUNTO A

$$S_1 = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N \}$$

$$S_2 = \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_M \}$$

① TIENEN LA MISMA RESULTANTE

② TIENEN EL MISMO MOMENTO EN EL PUNTO A

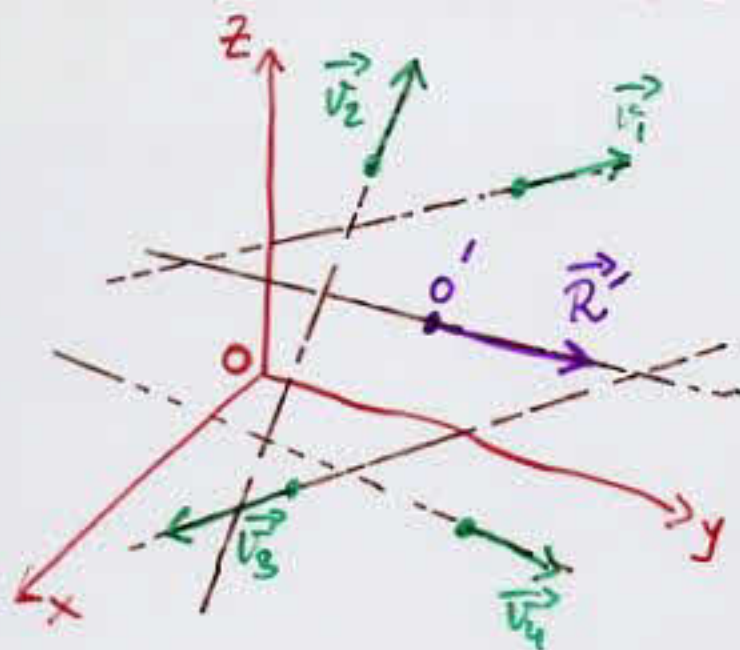
$$\left. \begin{array}{l} S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1} = \sum_i \vec{v}_i \\ \vec{M}_A = \sum_i M_A \vec{v}_i \end{array} \right. \\ S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_2} = \sum_i \vec{w}_i \\ \vec{M}_A' = \sum_i M_A \vec{w}_i \end{array} \right. \end{array} \right\} S_1 \sim S_2 \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1} = \vec{R}_{S_2} \\ \vec{M}_A = \vec{M}_A' \end{array} \right.$$

TEOREMA : Si dos sistemas de vectores S_1 y S_2 son equivalentes en un punto A, también serán equivalentes en cualquier otro punto del espacio.

3- REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE VECTORES

3

REDUCIR UN SISTEMA DE VECTORES ES ENCONTRAR UN SISTEMA MAS SENCILLO EQUIVALENTE.



$$S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$S_2 = \{\vec{R}'\}$$

$$S_1 \equiv \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{v}_i \\ \vec{M}_O = \sum_i M_O \vec{v}_i \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}} \right\} S_1 \sim S_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}' \\ \vec{M}_O = \vec{M}'_O \end{cases}$$

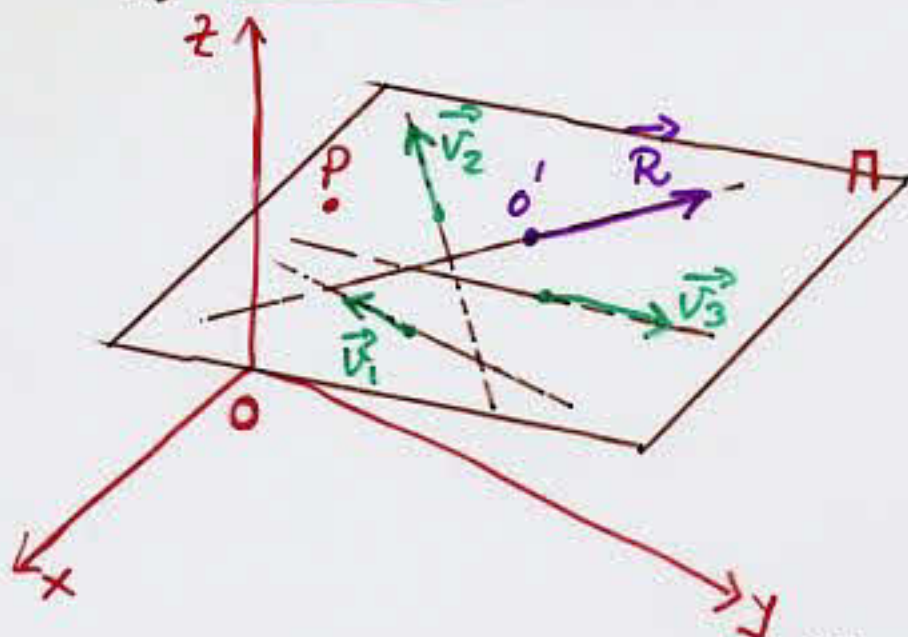
$$S_2 \equiv \begin{cases} \vec{R}' \\ \vec{M}'_O = \vec{OO}' \times \vec{R}' \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = \vec{OO}' \times \vec{R}} \quad (\vec{M}_O \perp \vec{R})$$

LA CONDICION PARA QUE UN SISTEMA DE VECTORES SEA EQUIVALENTE A SU RESULTANTE APLICADA EN UN CIERTO PUNTO ES QUE LA RESULTANTE Y EL MOMENTO DE DICHO SISTEMA SEAN ORTOGONALES

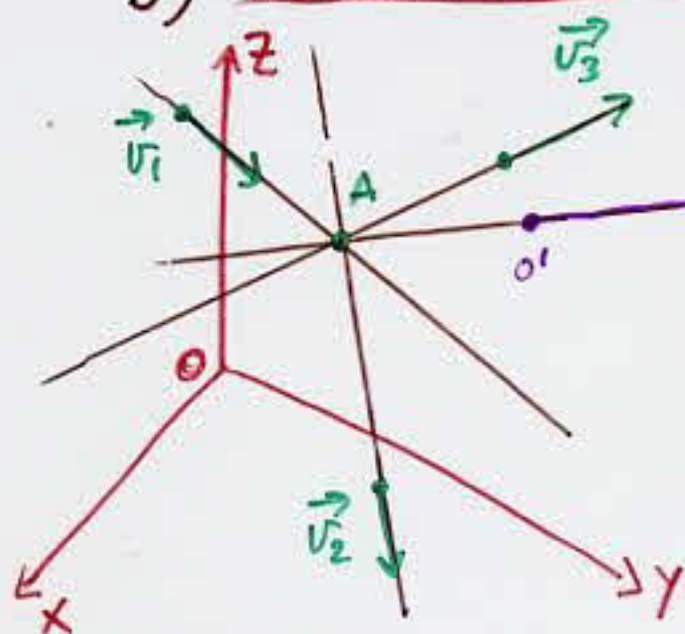
CASO-1) SISTEMAS PARA LOS QUE $\vec{M}_O \perp \vec{R}$

a) SISTEMA DE VECTORES COPLANARIOS



$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \sum_L \vec{r}_L \times \vec{v}_L = \sum_L (\vec{OP} + \vec{r}'_L) \times \vec{v}_L = \sum_L \vec{OP} \times \vec{v}_L + \sum_L \vec{r}'_L \times \vec{v}_L \\ &= \vec{OP} \times \sum_L \vec{v}_L + \sum_L \vec{r}'_L \times \vec{v}_L = \underbrace{\vec{OP} \times \vec{R}}_{\perp \vec{R}} + \underbrace{\sum_L \vec{r}'_L \times \vec{v}_L}_{\perp \text{ AL PLANO } \Pi}\end{aligned}$$

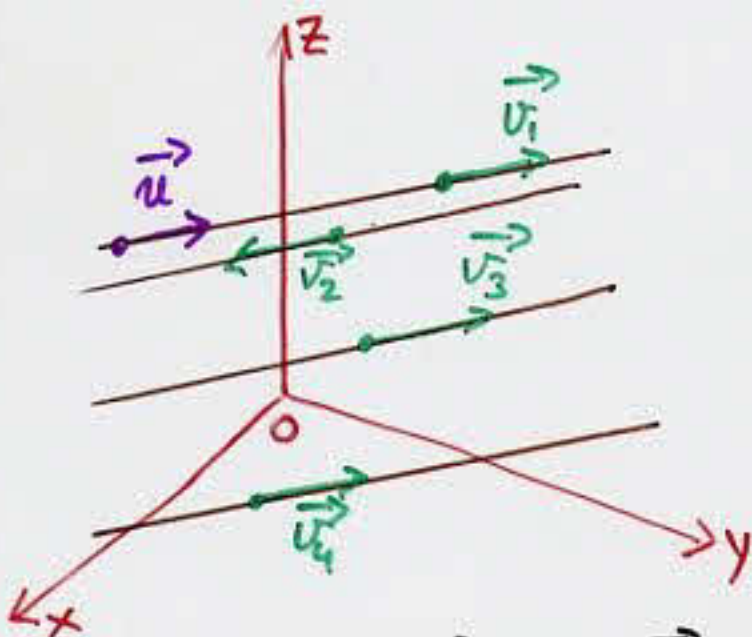
b) SISTEMA DE VECTORES CONCURRENTES



Traslado todas los vectores a A

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \sum_L \vec{r}_L \times \vec{v}_L = \sum_L \vec{OA} \times \vec{v}_L = \\ &= \vec{OA} \times \vec{R} \quad (\vec{M}_O \perp \vec{R})\end{aligned}$$

C) SISTEMA DE VECTORES PARALELOS



$\vec{u} \equiv$ VECTOR UNITARIO A LO LARGO DE LAS LINEAS DE APLICACION

$$\vec{v}_i = a_i \cdot \vec{u}$$

$$\begin{cases} \vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times a_i \vec{u} = \left(\sum_i a_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} \\ \vec{R} = \sum_i \vec{v}_i = \vec{u} \cdot \sum_i a_i \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i a_i \vec{r}_i \times \frac{\vec{R}}{\sum_i a_i} = \underbrace{\frac{\sum_i a_i \vec{r}_i}{\sum_i a_i}}_{\vec{r}_c} \times \vec{R} \quad (\vec{M}_O \perp \vec{R})$$

UN SISTEMA DE VECTORES PARALELOS EQUIVALE A SU RESULTANTE SI SE APLICA EN EL PUNTO $\vec{r}_c$ DEFINIDO POR

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i a_i \vec{r}_i}{\sum_i a_i}$$

APLICACIÓN: CENTRO DE GRAVEDAD

CASO-2) SISTEMAS PARA LOS QUE $\vec{M}_0 \not\perp \vec{R}$

6

EN GENERAL SE TIENE QUE :

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i (\vec{OO}' + \vec{r}_i') \times \vec{v}_i = \underbrace{\vec{OO}' \times \vec{R}}_{\perp \vec{R}} + \vec{M}_0'$$

(HAY QUE AÑADIR UN MOMENTO $\vec{M}_0'$ PARA LA EQUIVALENCIA)

a) INVARIANTES DE UN SISTEMA DE VECTORES

- RESULTANTE $\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i$

- PROYECCIÓN DE $\vec{M}_0$ SOBRE $\vec{R}$

$$\vec{M}_0' \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R}$$

- MOMENTO MÍNIMO

$$m = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} = \vec{M}_0 \cdot \vec{u}_R = \vec{M}_0' \cdot \vec{u}_R = |\vec{M}_0'| \cdot \cos \varphi$$

(el valor mínimo se alcanza cuando $\vec{M}_0' \parallel \vec{R}$)

b) EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE VECTORES

ES EL CONJUNTO DE PUNTOS O' PARA LOS CUALES $\vec{M}_0'$ ES PARALELO A LA $\vec{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M}_0' = \vec{M}_0 - \vec{OO}' \times \vec{R} \\ \vec{M}_0' \parallel \vec{R} \end{array} \right\} \frac{M_{0x} - (\vec{OO}' \times \vec{R})_x}{R_x} = \frac{M_{0y} - (\vec{OO}' \times \vec{R})_y}{R_y} = \dots$$

PROPIEDAD: EL EJE CENTRAL ES PARALELO A $\vec{R}$

CONCLUSION :

PARA REDUCIR EL SISTEMA S

- SE SITUA $\vec{R}$ SOBRE EL EJE CENTRAL
- SE AÑADE UN MOMENTO $\vec{M}_O$, PARALELO AL EJE CENTRAL EN FORMA DE PAR DE FUERZAS (NO CONTRIBUYE A $\vec{R}$)

$$\{ \vec{R}, \vec{F}, -\vec{F} \} \approx S \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_i \vec{U}_i \\ \vec{M}_O = \underbrace{\vec{OO}' + \vec{R}}_{\perp \vec{R}} + \underbrace{\vec{M}_{PAR}}_{\parallel \vec{R}} \end{array} \right.$$

SOBRE EL EJE CENTRAL

4- EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE VECTORES

EQUILIBRIO:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_{O'} = 0 \quad \forall O' \end{array}}$$