

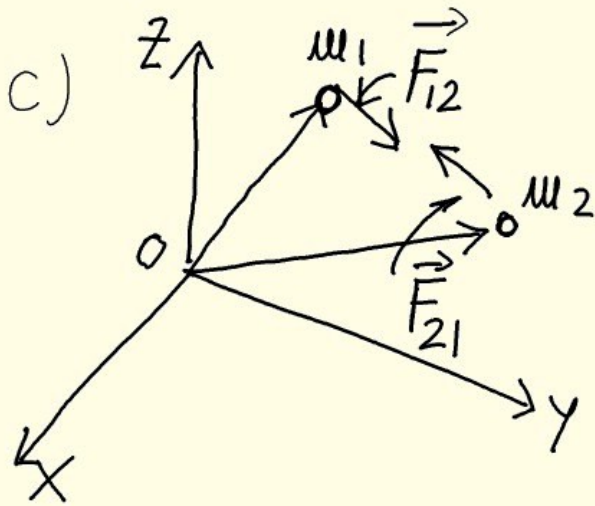
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA (NEWTON)

EN CUALQUIER SISTEMA INERCIAL

a) NO $\vec{F} \Rightarrow$ NO $\vec{a} \Rightarrow$ MOV. RECTIL. O REPOSO

b) SI $\vec{F} \Rightarrow \vec{a}$ TAL QUE $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

(m ES LA MASA INERCIAL)



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

LEY DE ACCIÓN - REACCIÓN

d) ¿QUÉ SUCEDE SI CAMBIAMOS DE REFERENCIAL?

1 - SI PASAMOS A OTRO INERCIAL $\{O'x'y'z'\}$

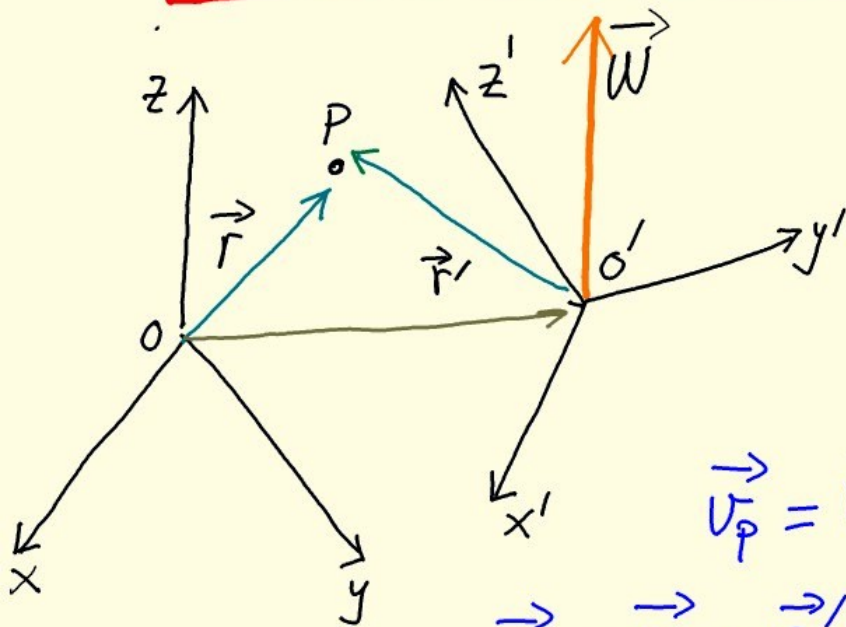
$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$$

2 - SI EL NUEVO SISTEMA NO ES INERCIAL ...

$$\vec{F}' + \vec{F}_{IN} = m \cdot \vec{a}'$$

CON $\vec{F}_{IN} \equiv$ FUERZAS INERCIALES

MECÁNICA EN SISTEMAS NO INERCIALES



$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$$

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DE P EN AMBOS SISTEMAS

$$\vec{v}_p = \vec{v}_d + \vec{v}_p' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_d + \vec{a}_p' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_p' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

ACELERACIÓN DE O'
 ACCELERACION RELATIVA
 ACCELERACION DE CORIOLIS
 ACCELERACION EJES MOVILES
 ACCELERACION CENTRÍPETA

POR TANTO SI EN $\{Oxyz\}$ SE CUMPLE $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_p$
 ENTONCES EN $\{O'x'y'z'\}$ SE CUMPLIRA QUE:

$$m \cdot \vec{a}_p' = \underbrace{m \cdot \vec{a}_p}_{\vec{F} \equiv \vec{F}'} - \underbrace{m \vec{a}_d + m \cdot 2\vec{\omega} \times \vec{v}_p' + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\vec{F}_{IN}}$$

POR TANTO...

$$\vec{F}' + \vec{F}_{IN} = m \cdot \vec{a}_p'$$

FORMULACIÓN MAS EXACTA DE LA 2ª LEY DE NEWTON

EN CUALQUIER INERCIAL:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

CON $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
(CANTIDAD DE MOVIMIENTO)

1- SI LA MASA DEL SISTEMA NO CAMBIA

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

2- SI LA MASA PUEDE CAMBIAR --- (SISTEMAS DE MASA VARIABLE)

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

EN GENERAL $\frac{dm}{dt} = f(t, \vec{v}, \dots)$, POR TANTO

LA ECUACION DEL MOVIMIENTO ES

$$\vec{F} + \vec{F}_m = m \cdot \vec{a}$$

↑

CON $\vec{F}_m = -\vec{v} \cdot \underbrace{f(t, \vec{v}, \dots)}_{dm/dt}$

FUERZA DEBIDA A
LA VARIACIÓN DE MASA

MAGNITUDES DINAMICAS Y PROPIEDADES

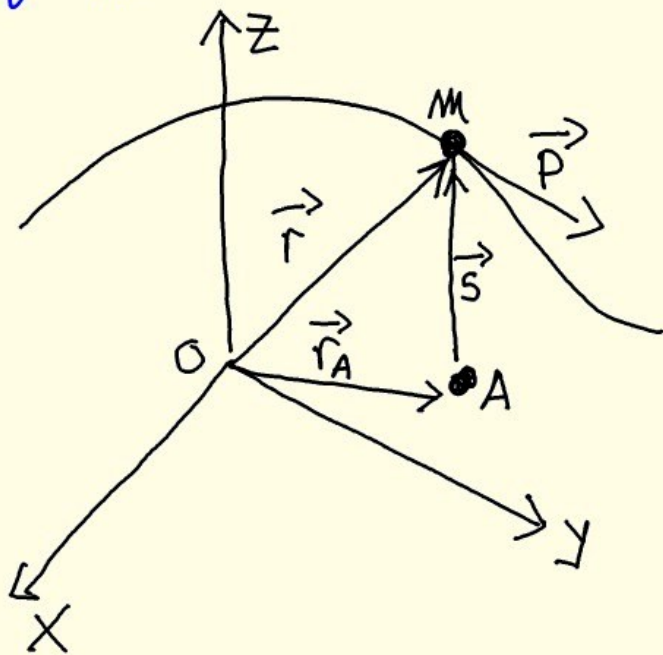
1-MOMENTO LINEAL $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

PROP: a) DEPENDE DEL SISTEMA DE REFERENCIA

b) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (2^a Ley de Newton) con $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$

c) Si $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} \equiv cte \Rightarrow m \cdot \vec{v} \equiv cte$

2-MOMENTO ANGULAR CON RESPECTO A UN PUNTO



$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L}_A = \vec{s} \times \vec{p}$$

PROP: a) DEPENDE DEL PUNTO RESPECTO AL CUAL SE CALCULA

b) DEPENDE DEL SISTEMA EN EL QUE SE CALCULA $\vec{p}$

c) $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$ (MOMENTO DE LAS FUERZAS)

d) Si $\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \equiv cte$
 $\swarrow$ EN DIRECCIÓN
 $\searrow$ EN MODULO

ALGO MAS SOBRE LA CONSTANCIA DEL MOMENTO ANGULAR

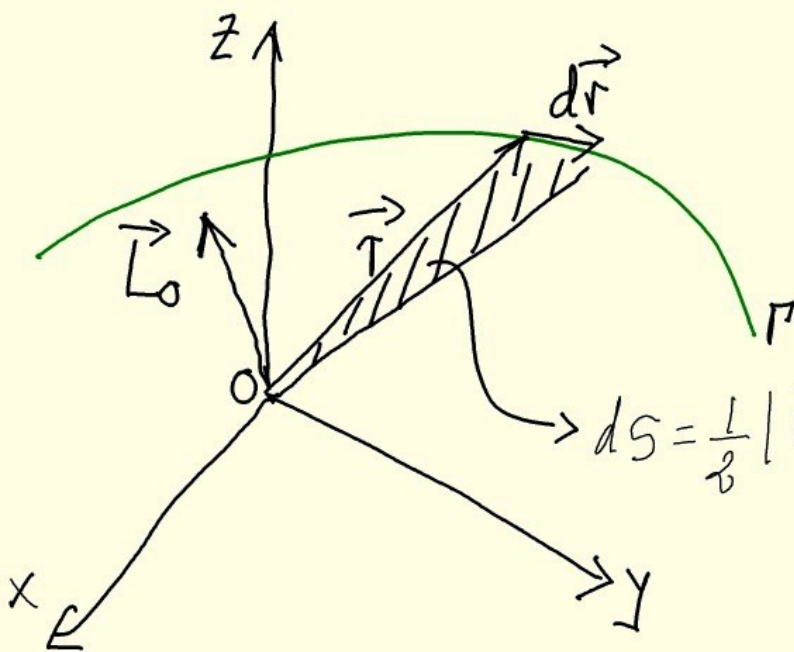
$$\vec{M}_O = 0 \begin{cases} \vec{F} = 0 & \text{AUSENCIA DE INTERACCIÓN} \\ \vec{r} \parallel \vec{F} & \text{FUERZA CENTRAL} \end{cases}$$

TANTO EN UN CASO COMO EN EL OTRO, $\vec{L}_O$ ES CONSTANTE
LO CUAL SIGNIFICA ...

1- CONSTANCIA EN DIRECCIÓN

$\vec{L}_O \perp$ PLANO DE $\vec{r}$ y $d\vec{r} \equiv$ ORBITA

LUEGO ... **LA ÓRBITA ES PLANA**



$$ds = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow v_A = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

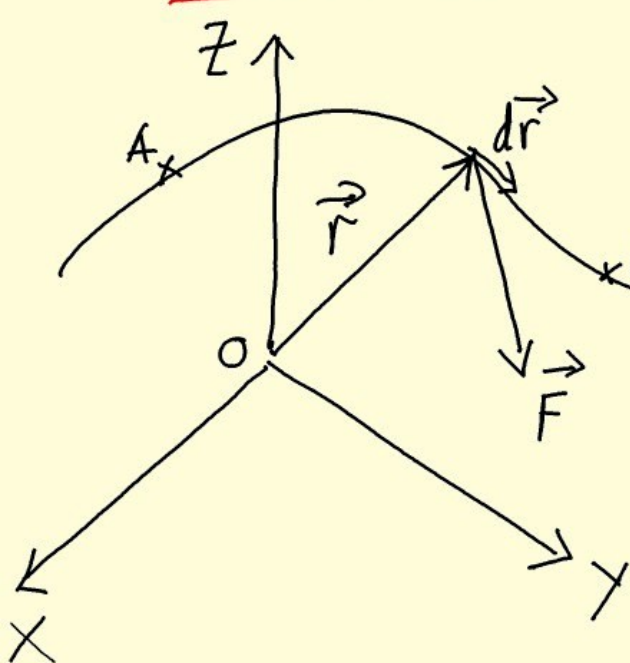
VELOCIDAD AREOLAR

2- CONSTANCIA EN MÓDULO

$$|\vec{L}_O| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m r^2 \dot{\theta} = 2m v_A$$

LA VELOCIDAD AREOLAR ES CONSTANTE

TRABAJO MECÁNICO



$$W_{A \rightarrow B}^{\Gamma} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_{\Gamma}$$

FUERZA $\vec{F}$

CURVA Γ

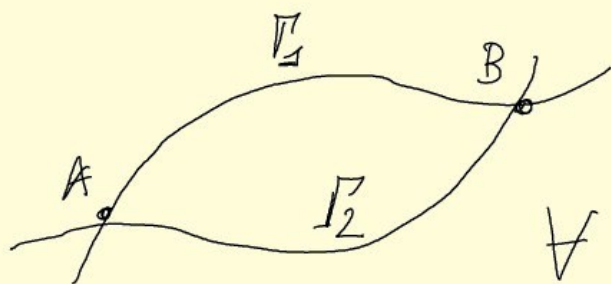
PUNTOS A y B

POTENCIA $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$

PARA CURVAS PARAMÉTRICAS $\Gamma \equiv \{x(t), y(t), z(t)\}$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z}) dt$$

DEFINICIÓN DE FUERZA CONSERVATIVA:



$$W_{A \rightarrow B}^{\Gamma_1} = W_{A \rightarrow B}^{\Gamma_2} = W_{A \rightarrow B}^{\Gamma}$$

$\forall$ TRAYECTORIA Γ QUE CONECTE
LOS PUNTOS A y B

FUERZAS Y TIPOS

LA FUERZA REPRESENTA LA INTERACCIÓN ENTRE LA PARTICULA Y LO QUE LA RODEA.

— MAGNITUD VECTORIAL

$\vec{F}$ (CON LEYES DE TRANSF. PRECISAS)

— DEPENDE EN GENERAL

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

TIPOS:

1) CONSERVATIVAS

EXISTE UNA FUNCIÓN ESCALAR $U = U(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$
TAL QUE

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{r}}} U$$

U SE LLAMA FUNCIÓN POTENCIAL DEL CAMPO $\vec{F}$

→ CASO SENCILLO: U NO DEPENDE DE $\dot{\vec{r}}$ (NI $\vec{F}$ TAMPOCO)

$$\vec{F} \text{ CONSERVATIVA} \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

* CRITERIO SIMPLE

$$\vec{F} \text{ CONSERVATIVA} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

ALGUNAS CONSECUENCIAS DE $\vec{F}$ CONSERVATIVA

$$1) W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dU = U(A) - U(B)$$

EL TRABAJO MECANICO SOLO DEPENDE DE A y B Y NO DEL TRAYECTO QUE LOS CONECTA

$$2) W_{\phi} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{TRABAJO NULO EN UN PROCESO CÍCLICO}$$

2- FUERZAS NO CONSERVATIVAS

a) QUE DESCRIBEN UNA INTERACCIÓN

Σ_j : ROZAMIENTO, FRICCIÓN, ... OTRAS N.C.

b) QUE DESCRIBEN RESTRICCIONES AL MOVIMIENTO LIBRE

* LIGADURAS (HOLÓNOMAS)

PROP: i) SON PERPENDICULARES A LAS SUPERFICIES
ii) NO REALIZAN NINGUN TRABAJO

BALANCE DE ENERGÍA DE UN PROCESO MECÁNICO

1- TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{v} =$$
$$= \left. \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right|_A^B = T(B) - T(A)$$

DONDE SE DEFINE LA **ENERGÍA CINÉTICA** T COMO

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \text{ (EN CARTES.)}$$

NOTA: DEPENDE DEL SISTEMA DE REFERENCIA A TRAVÉS DE $\vec{v}$

2- TEOREMA DE LA ENERGÍA POTENCIAL

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} =$$
$$= \int_A^B -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} + W_{A \rightarrow B}^{nc} = U(A) - U(B) + W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

U ES EL POTENCIAL DE $\vec{F}_c$ Y SE LLAMA **ENERGÍA POTENCIAL**

$W_{A \rightarrow B}^{nc} \gtrless 0$ ES EL TRABAJO DE LAS FUERZAS NO CONSERVAT.

3 - BALANCE DE ENERGÍA

COMBINANDO (1) Y (2) SE TIENE

$$\left. \begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= T(B) - T(A) \\ W_{A \rightarrow B} &= U(A) - U(B) + W_{A \rightarrow B}^{NC} \end{aligned} \right\} T(A) + U(A) + W_{A \rightarrow B}^{NC} = T(B) + U(B)$$

DEFINIMOS LA **ENERGÍA MECÁNICA**

$$E = T + U$$

$$E(A) + W_{A \rightarrow B}^{NC} = E(B)$$

CASO ESPECIAL: SI NO HAY FUERZAS N.C. $\Rightarrow W_{A \rightarrow B}^{NC} = 0$
Y ENTONCES ...

$$E(A) = E(B)$$

LA ENERGÍA MECÁNICA SE CONSERVA

OBSERVACIÓN: AÚN EN AUSENCIA DE FUERZAS N.C. PUEDE NO CONSERVARSE LA ENERGÍA MECÁNICA SI
 $U = U(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot 2 \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{v} \cdot \vec{F}} + \underbrace{\vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}}_{-\vec{F} \cdot \vec{v}} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0 \text{ EN GENERAL} \end{aligned}$$

ALGUNAS CUESTIONES DE INTERÉS PRÁCTICO

* LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA AYUDA A ENCONTRAR LA TRAYECTORIA:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{cte} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

Y POR TANTO ...

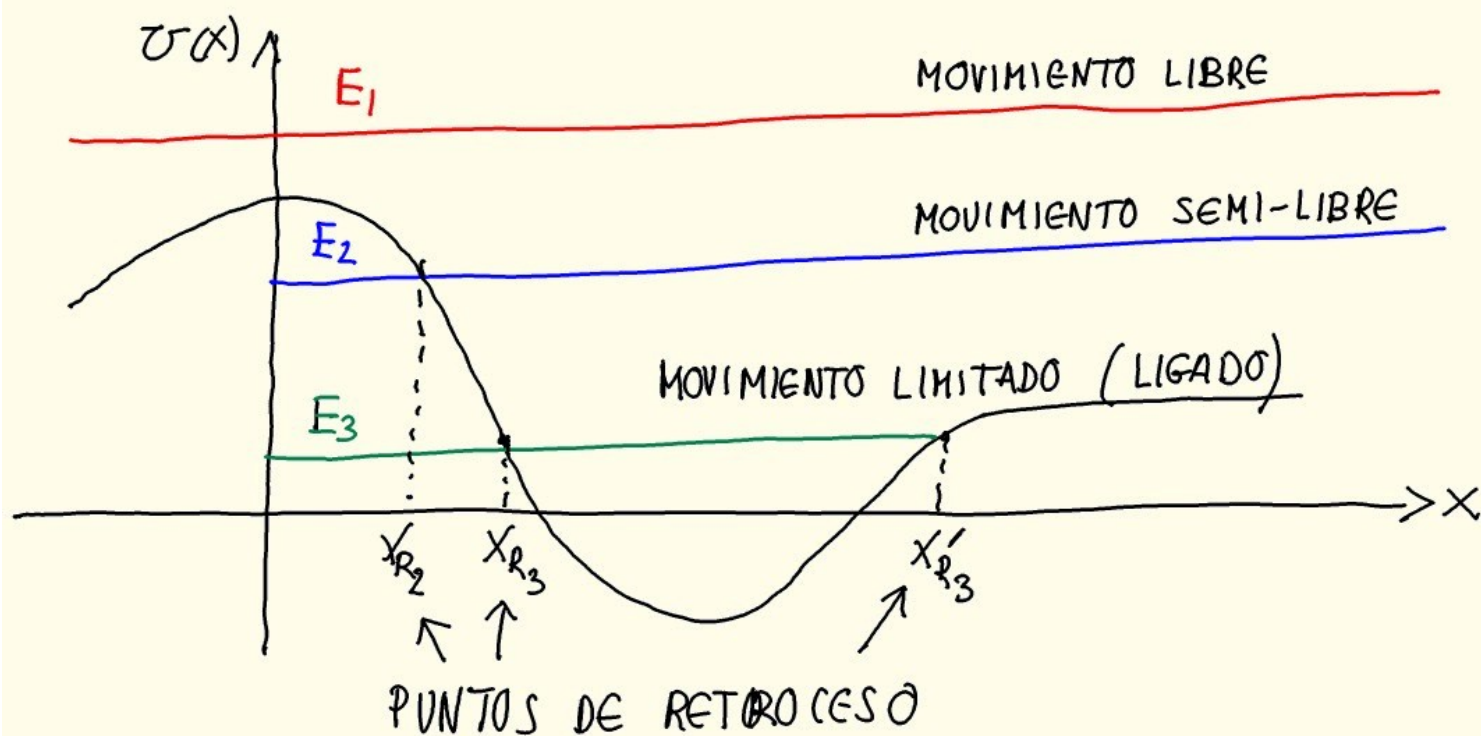
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_0^t dt$$

DE DONDE SE OBTIENE $t = t(x)$ Y AL TOMAR LA INVERSA

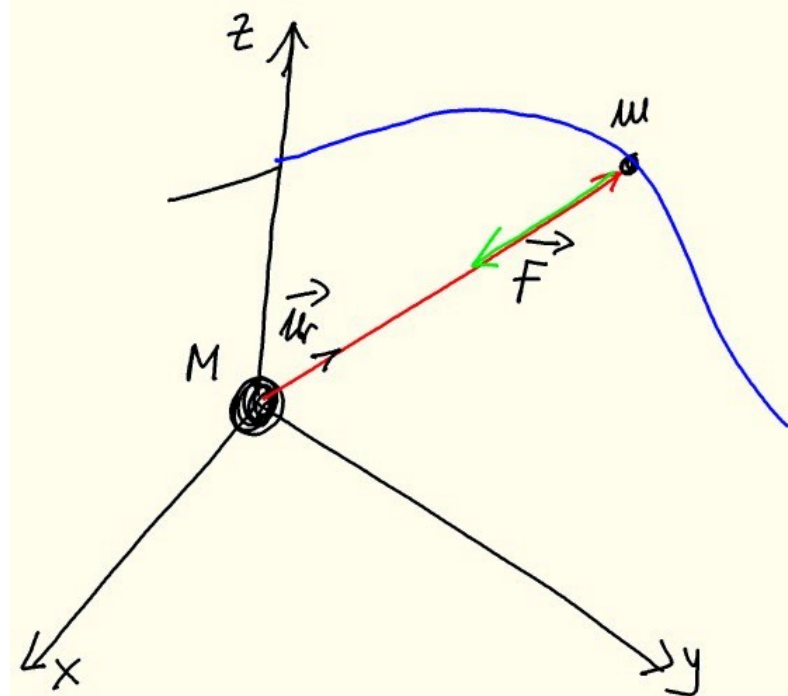
$$x = x(t) \text{ (TRAYECTORIA)}$$

LA CUAL DEPENDE DE LAS DOS CONSTANTES E Y $x(0)$

* PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS, EL CONOCIMIENTO DE $U(x)$ DA INFORMACIÓN CUALITATIVA SOBRE EL MOVIMIENTO.



APLICACIONES: MOVIMIENTO PLANETARIO



$$\vec{F} = - \frac{G m M}{r^2} \vec{u}_r \equiv F(r, \theta) \cdot \vec{u}_r$$

(LEY DE NEWTON)

PROPIEDADES :

- 1) ES UNA FUERZA CENTRAL ATRACTIVA $\Rightarrow M_O \vec{F} = 0$
 - 2) SE CONSERVA $\vec{L}_O \Rightarrow$ ORBITAS PLANAS RECORRIDAS CON VELOCIDAD AREOLAR CONSTANTE (1ª y 2ª L. de Kepler)
- $$v_A = \frac{|\vec{L}_O|}{2m} \quad \text{CON } L_O = m r^2 \dot{\theta}$$

CÁLCULO DE LAS ORBITAS : EN EL PLANO DE LA ORBITA EN POLARES

$$\left. \begin{aligned} m \cdot a_r &= F_r(r, \theta) \\ m a_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r(r, \theta) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0 \rightarrow \text{CONSTANCIA DE } v_A \end{aligned}$$

LA ECUACIÓN RADIAL QUEDA ...

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F_r(r, \theta) \quad \xRightarrow{L_O} \quad m\ddot{r} - \frac{L_O^2}{m r^3} = F_r(r, \theta)$$

AUNQUE EN REALIDAD $F_r(r, \theta) \equiv F_r(r)$

MOVIMIENTO PLANETARIO (CONT.)

DADO QUE LA FUERZA RADIAL ES CONSERVATIVA $F_r = -\frac{d}{dr} V(r)$
Y LA ECUACION RADIAL PUEDE ESCRIBIRSE...

$$m \frac{d\dot{r}}{dt} + \frac{d}{dr} \left(\frac{L_0^2}{2mr^2} \right) = -\frac{d}{dr} V(r)$$

COMO $\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow m \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$, POR LO CUAL...

$$\frac{d}{dr} \left[\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}}_{T \text{ EN POLARES}} + V(r) \right] = 0 \Rightarrow T + V = \underline{\underline{E \text{ cte}}}$$

ESTO PERMITE ENCONTRAR LAS TRAYECTORIAS :

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \frac{L_0^2}{2mr^2} - V(r) \right] \quad \text{CON} \quad \begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{L_0}{mr^2} \\ V(r) = -\frac{\kappa}{r} \end{cases}$$

(LEY DE NEWTON)

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L_0/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L_0^2}{2mr^2} - V(r) \right]}}$$

E INTEGRANDO ...

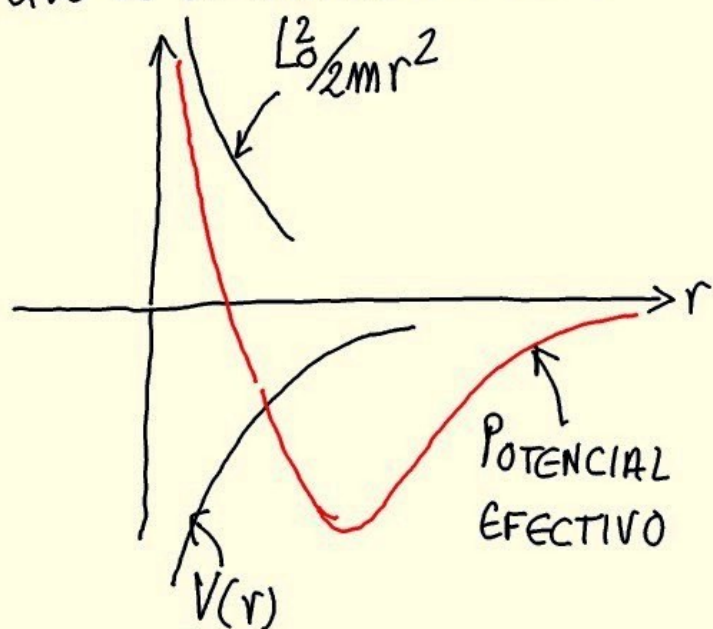
$$\theta(r) = \int \frac{L_0/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{L_0^2}{2mr^2} + \frac{\kappa}{r} \right]}} dr + C_1 \rightarrow r = r(\theta)$$

MOVIMIENTO PLANETARIO (CONT. Y 2)

LAS ORBITAS TIENEN LA FORMA GENERAL

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$
$$p = \frac{L_0^2}{\mu \alpha}$$
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL_0^2}{\mu \alpha^2}} \quad \text{EXCENTRICIDAD}$$

QUE ES LA ECUACION DE UNA CÓNICA EN POLARES



SOLO SI $E < 0$ TENDREMOS
MOVIMIENTOS LIMITADOS

$e < 1$ (CONICAS CERRADAS)

a) ELIPSES DE SEMIEJES $a = \frac{\alpha}{2|E|}$, $b = \frac{L_0}{\sqrt{2\mu|E|}}$

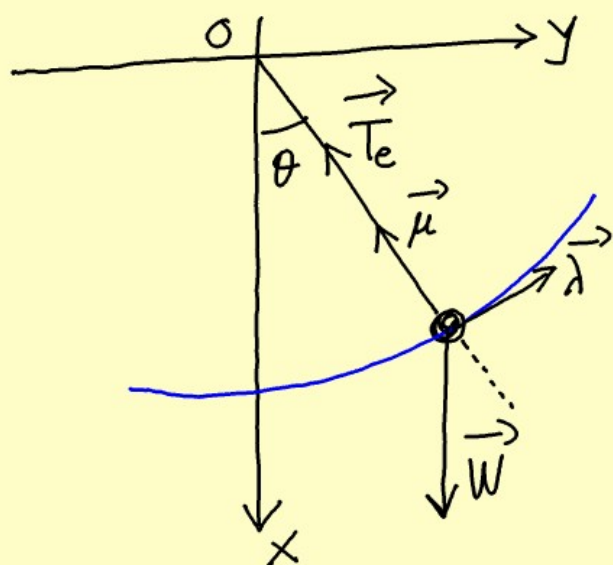
b) CIRCUNFERENCIAS ($e=0$) $\Rightarrow a=b$

FINALMENTE, DE LA CONSTANCIA DE LA VELOCIDAD AREOLAR,
Y LLAMANDO T AL PERÍODO DE REVOLUCIÓN

$$v_A \cdot T = \pi a \cdot b \Rightarrow T \sim a^{3/2} \Rightarrow \boxed{\gamma^2 \sim a^3}$$

QUE ES LA TERCERA LEY DE KEPLER.

EL PENDULO SIMPLE



a) POR LA 2ª LEY DE NEWTON

$$\vec{a} = a_T \vec{\lambda} + a_N \vec{\mu} \quad \text{con } a_T = L \ddot{\theta} \quad \text{y} \quad a_N = \frac{v^2}{L} = L \dot{\theta}^2$$

$$\vec{W} = -mg \sin \theta \vec{\lambda} + mg \cos \theta \vec{\mu}$$

$$\vec{T}_e = T_e \vec{\mu}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} mL \ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (1) \\ mL \dot{\theta}^2 = T_e - mg \cos \theta & (2) \end{cases}$$

$$\text{de (1)} \quad \left. \begin{aligned} mL \ddot{\theta} + mg \sin \theta &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{para ángulos pequeños} \\ &\sin \theta \simeq \theta \\ &(\text{pequeñas oscilaciones}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta(t) &= A \cos(\omega t + B) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \text{y } A \cos B &= 0 \\ -A \omega \sin B &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} B &= -\frac{\pi}{2} \\ A &= \dot{\theta}_0 / \omega \end{aligned} \right.$$

EL PENDULO SIMPLE (CONT.)

b) POR EL TEOREMA DEL MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = mL^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad \text{YA QUE} \quad \begin{cases} \vec{r} = L \cos \theta \vec{i} + L \sin \theta \vec{j} \\ \vec{p} = -mL \dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + mL \dot{\theta} \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$

POR TANTO ...

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = mL^2 \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$M_O \vec{F} = M_O \vec{W} + \cancel{M_O \vec{r} \cdot \vec{e}}^O = \vec{r} \times \vec{W} = -mgL \sin \theta \vec{k}$$

y FINALMENTE:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = M_O \vec{F} \Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta$$

QUE EQUIVALE A (1)

c) POR ENERGÍA: ESTAMOS EN UN CAMPO CONSERVATIVO

A $\equiv$ POSICION DEL PENDULO EN t

B $\equiv$ POSICION INICIAL DEL PENDULO ($t=0$)

$$E(A) = E(B) \quad \text{CON} \quad E(B) = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_0^2 = E$$

$$E(A) = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

POR TANTO ...

$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) = E \rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$$