

RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO

LOS CONCEPTOS DE TRAYECTORIA, VELOCIDAD, ACCELERACION... SE APOYAN PARA EL CALCULO EN LOS SISTEMAS COORDENADOS. ES DE ESPERAR QUE LAS ECUACIONES QUE DEFINEN DICHS CONCEPTOS, CAMBIEN CUANDO SE REFIEREN A DISTINTOS SISTEMAS DE COORDENADAS.

DEF: CAMBIO DE SISTEMA COORDENADO

$$(x, y, z, t) \longrightarrow (x', y', z', t')$$

$$(*) \begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t) \end{cases}$$

OBSERVACIONES :

i) AUNQUE $\{x, y, z, t\}$, FUERAN CARTESIANAS, $\{x', y', z', t'\}$ NO TIENEN PORQUE SERLO. TODO DEPENDE DE (*)

- Si (*) SON ECUACIONES LINEALES SI
- Si (*) SON NO LINEALES, EN GENERAL NO

ii) Si OCURRE QUE $t' = t$ ENTONCES TENEMOS LA RELATIVIDAD CLASICA O GALILEANA, PERO SI t' DEPENDE DE LAS COORDENADAS TENEMOS LA RELATIVIDAD DE EINSTEIN

iii) Si $t' = t$ Y LAS (*) SON LINEALES, ENTONCES TODO SE REDUCE A UN CAMBIO DE COORDENADAS ESTÁTICO (O PASIVO)

--- MAS OBSERVACIONES :

- IV) SIENDO (*) LINEAL, LA PRESENCIA DE t EN LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACION, INTRODUCE CONSECUENCIAS DINAMICAS. VAN A APARECER EFECTOS DEBIDOS AL TIPO DE SISTEMA COORDENADO (ACELERACIONES DE ARRASTRE, CORIOLIS, ---ETC)
- V) ES NECESARIO TENER MUY CLARO EL SIGNIFICADO DEL CAMBIO COORDENADO (*). POR UN LADO, TENEMOS LOS OBJETOS ABTRACTOS $\Rightarrow$ VECTORES, Y POR OTRO SU REPRESENTACION PRACTICA $\Rightarrow$ COORDENADAS EN ALGUN SISTEMA. MIENTRAS QUE EL VECTOR NO CAMBIA, LAS COORDENADAS DEPENDEN DEL SISTEMA DE REFERENCIA ESCOGIDO.

NO DEBE OLVIDARSE QUE UN VECTOR, LO ES, EN TANTO EN CUANTO SE TRANSFORMA DE MANERA PRECISA FRENTE A CAMBIOS DE COORDENADAS LINEALES Y PASIVAS (*)

$$(*)' \begin{cases} x' = T_{11}x + T_{12}y + T_{13}z \\ y' = T_{21}x + T_{22}y + T_{23}z \\ z' = T_{31}x + T_{32}y + T_{33}z \end{cases}$$

Siendo $\Pi = (T_{ij})$ la matriz que define la transform. con T_{ij} constantes

* RELATIVIDAD DE LAS TRAYECTORIAS

Dada una trayectoria $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t)\}$ en el parámetro t , al pasar a otro sistema coordenado

$$(*) \begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t) \end{cases}$$

la trayectoria vista en el nuevo sistema es

$$\Gamma' = \{x'(t'), y'(t'), z'(t')\} \text{ con}$$

$$x'(t') = x'(x(t'), y(t'), z(t'), t') = x'(t) = x'(t(t'))$$

$$y'(t') = y'(t(t')) \quad \text{Pues } t' = t'(x(t), y(t), z(t), t) \equiv t'(t) \Rightarrow t = t(t')$$

$$z'(t') = z'(t(t'))$$

Parece un poco difícil pero con un pequeño ejemplo veremos que no es tan difícil.

$$\Gamma = \left\{ x(t) = 0, y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, z(t) = 0 \right\} \quad \begin{matrix} \text{CAIDA LIBRE} \\ \text{VERTICAL EJE Y} \end{matrix}$$

Pasemos a un sistema coordenado desplazándose uniformemente a lo largo del eje x con velocidad constante v . y donde la escala de tiempos es diferente. Las ecs de transform.

$$x' = x - v \cdot t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$y \quad t' = \alpha \cdot t$$

La ecuación de la trayectoria en este nuevo sistema de ref.

$$\Gamma = \begin{cases} x'(t') = x(t) - vt = 0 - v \frac{t'}{\alpha} \\ y'(t') = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g \frac{t'^2}{\alpha^2} \\ z'(t') \equiv 0 \end{cases}$$

que es la ecuación de una parábola

$$y' = h - \frac{1}{2}g \frac{x'^2}{\alpha^2 v^2} = h - \frac{1}{2}g \frac{x'^2}{v^2}$$

Naturalmente, la cosa se complica bastante si t y t' están relacionados de manera más compleja.

* RELATIVIDAD DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN
Supongamos dos sistemas coordenados conectados por la transformación:

$$(*) \begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t) \end{cases}$$

Calculemos las componentes de la velocidad y veamos cual es su relación en los dos sistemas coordenados

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} \text{ con } \begin{cases} dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy + \frac{\partial x'}{\partial z} dz + \frac{\partial x'}{\partial t} dt \\ dt' = \frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial y} dy + \frac{\partial t'}{\partial z} dz + \frac{\partial t'}{\partial t} dt \end{cases}$$

Por tanto...

$$\dot{x}' = \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial x'}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial x'}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial x'}{\partial t}}{\frac{\partial t'}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial t'}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial t'}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial t'}{\partial t}}$$

y expresiones similares para $\dot{y}'$ y $\dot{z}'$. Veamos esto con un ejemplo.

Ej: Tomemos de nuevo dos sistemas coordenados conectados por

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \alpha \cdot t \end{array} \right\} \begin{array}{l} dx' = dx - v \cdot dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \alpha \cdot dt \end{array}$$

por tanto:

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{\alpha dt} = \frac{1}{\alpha} \dot{x} - \frac{v}{\alpha}$$

$$\dot{y}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\alpha} \dot{y}$$

$$\dot{z}' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\alpha} \dot{z}$$

N: Si $\alpha=1$ Tenemos la llamada Transformación de GALILEO y la relación entre velocidades es la LEY DE ADICIÓN DE VELOCIDADES DE GALILEO.

VEAMOS AHORA QUÉ SUCEDE CON LAS ACELERACIONES. PARA NO COMPLICARNOS, SUPONDREMOS QUE $t' = t$ (TIEMPO ABSOLUTO)

Para comenzar, debemos definir las aceleraciones.

$$\ddot{x}' = \frac{d\dot{x}'}{dt'}$$

$$\text{con } d\dot{x}' = d\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \cdot \dot{x} + \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot d\dot{x} + d\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right) \dot{y} + \frac{\partial x'}{\partial y} d\dot{y} + \\ + d\left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right) \dot{z} + \frac{\partial x'}{\partial z} d\dot{z} + d\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right) dt$$

por tanto, dividiendo entre dt' (teniendo en cuenta $dt=dt'$)

$$\ddot{x}' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \dot{x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial y} \right) \dot{y} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial z} \right) \dot{z} +$$

$$+ \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \ddot{x} + \left(\frac{\partial x'}{\partial y} \right) \ddot{y} + \left(\frac{\partial x'}{\partial z} \right) \ddot{z} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)$$

Vemos que el primer grupo de términos proviene de la dependencia temporal de los elementos de matriz asociados a la transformación infinitesimal correspondiente a (*)

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy + \frac{\partial x'}{\partial z} dz + \frac{\partial x'}{\partial t} dt$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy + \frac{\partial y'}{\partial z} dz + \frac{\partial y'}{\partial t} dt$$

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial x} dx + \frac{\partial z'}{\partial y} dy + \frac{\partial z'}{\partial z} dz + \frac{\partial z'}{\partial t} dt$$

Veamos todo esto usando la transformación de GALILEO

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} - v \\ \dot{y}' &= \dot{y} \\ \dot{z}' &= \dot{z} \end{aligned} \quad \text{LEY DE ADICIÓN DE VELOCIDADES}$$

$$\left. \begin{aligned} d\dot{x}' &= d\dot{x} \\ d\dot{y}' &= d\dot{y} \\ d\dot{z}' &= d\dot{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}' &= \ddot{x} \\ \ddot{y}' &= \ddot{y} \\ \ddot{z}' &= \ddot{z} \end{aligned}$$

← v CONSTANTE

lo que significa que las aceleraciones son las mismas en ambas sistemas de referencia o que la aceleración es invariante por transformaciones de GALILEO

N: Si v no es constante, entonces

$$d\dot{x}' = d\dot{x} - dv \Rightarrow \ddot{x}' = \ddot{x} - a$$

siendo a la aceleración con la que se desplaza el sistema móvil (aqueí $x'y'z'$) respecto del fijo. Esto indica que el sistema móvil contribuye a la aceleración medida en dicho sistema por la forma en que se mueve, es un efecto "dinámico".