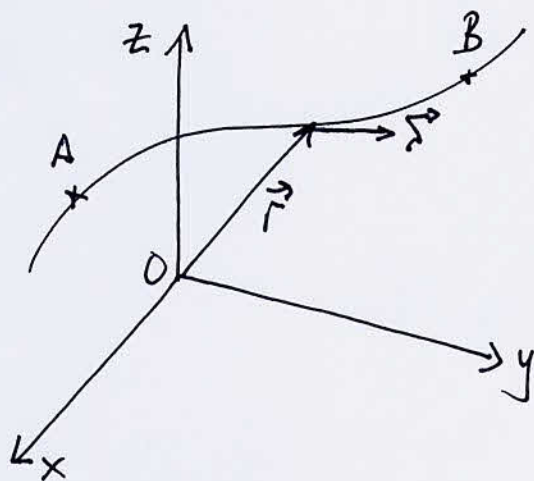


# 1- MAGNITUDES CINEMATICAS

(1)

**1- TRAYECTORIA:** Sucesión de puntos en el espacio de configuración que suele ser, normalmente, el espacio  $\mathbb{R}^3$



$$C = \{ \vec{r} \mid x=x(t), y=y(t), z=z(t), t \in (0, \infty) \}$$

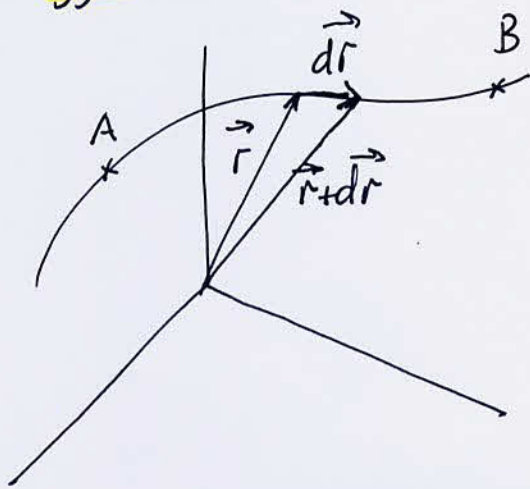
## PROPIEDADES:

- 1) ES UN CONCEPTO RELATIVO YA QUE DEPENDE DEL SISTEMA COORDENADO
- 2) TAMBIEN PUEDE DEFINIRSE EN FORMA IMPLICITA COMO INTERSECCION DE SUPERFICIES

$$C = \{ \vec{r} \mid F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0 \}$$

Ej:  $F_1(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  }  $x^2 + y^2 = R^2$  círculo en el plano xy  
 $F_2(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = 0$

## 3) DISTANCIAS RECORRIDAS SOBRE LA TRAYECTORIA



$$ds = |d\vec{r}| = |dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = v \cdot dt$$

donde  $v$  es la velocidad

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

La longitud o distancia recorrida sobre la trayectoria es

$$S_{AB} = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

## 2- VELOCIDAD INSTANTANEA

4b

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Prop. a) en coordenadas cartesianas  $\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$   
(Si el sistema  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  es fijo en  $t$ )

b) la velocidad  $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

c) la velocidad es un concepto relativo, depende del sistema coordenado usado (SISTEMA PROPIO)

d)  $\vec{v}$  es tangente a la trayectoria en todo punto.  $\vec{v} = v \cdot \vec{\lambda}$   
donde  $\vec{\lambda}$  es un vector tangente unitario.

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

## 3- ACCELERACION INSTANTANEA

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Prop: a) en cartesianas  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

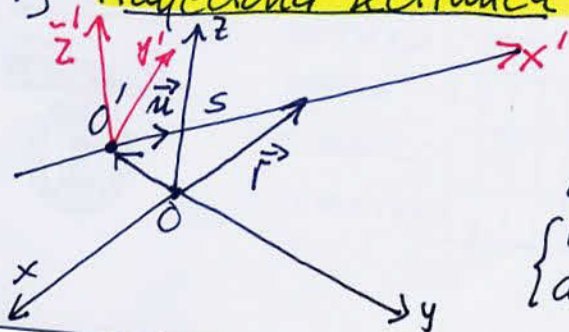
b) Ya que  $\vec{v} = v \cdot \vec{\lambda}$ ,  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\lambda} + v \cdot \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$

\*  $\vec{a}$  ya no es tangente a la trayectoria.

c)  $\vec{a}$  tambien depende del sistema de coordenadas elegido.

## Ejemplos de trayectorias:

### 1) Trayectoria rectilinea



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + s \cdot \vec{u}$$

$s$  es la longitud recorrida desde  $O'$   
donde  $s = s(t)$  con  $t$  tiempo.

$$\begin{cases} \text{velocidad} \equiv \dot{s}(t) \\ \text{aceleración} \equiv \ddot{s}(t) \end{cases}$$

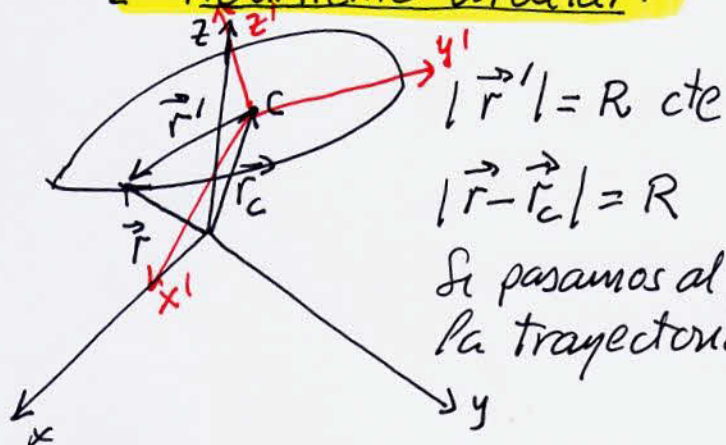
velocidad :  $\dot{\vec{r}} = \dot{s}(t) \cdot \vec{u}$

aceleración :  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{s}(t) \vec{u}$

(4-6)

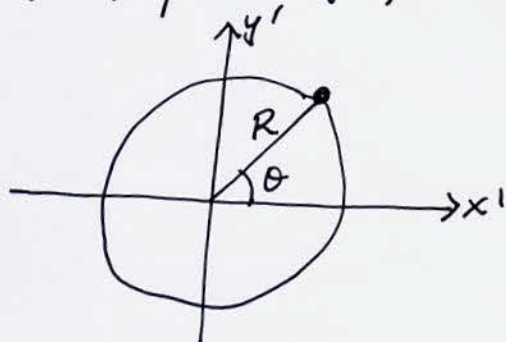
Vemos que lo realmente importante es  $s(t)$  por tanto se puede pasar a un sistema de ejes coordenados que tenga, por ejemplo, la recta como eje  $x$ . Se tiene entonces un mov. 1-D con solo variable la coordenada  $x=x(t)$

## 2- MOVIMIENTO circular.



Si pasamos al plano del círculo con origen en  $C'$  la trayectoria es  $x'^2 + y'^2 = R^2$

En ese plano y sustando las primas



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

velocidad :  $\dot{x} = -R \dot{\theta} \sin \theta$   
 $\dot{y} = R \dot{\theta} \cos \theta$

aceleración :  $\ddot{x} = -R \ddot{\theta} \sin \theta - R \dot{\theta}^2 \cos \theta = -\ddot{\theta} y - \dot{\theta}^2 x$   
 $\ddot{y} = +R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta = \ddot{\theta} x - \dot{\theta}^2 y$

Vemos que el móvil puede venir descrito por  $\theta(t)$  de una forma muy sencilla, no siendo necesario trabajar en las coordenadas cartesianas. Por tanto el problema cinemático es

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = f(t) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

## 2 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA CINEMATICA

(2)

Dada la aceleración como función de la velocidad, la posición y  $dt$  y las condiciones iniciales, encontrar la trayectoria.

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{r}, t\right) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

CASOS ESPECIALES:

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

I) SOLO HAY DEPENDENCIA EN  $t$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}(t) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

i) VELOCIDAD

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) \cdot dt$$

ii) TRAYECTORIA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \int_0^t \left[ \int_0^t \vec{a}(t) dt \right] dt$$

C.I.

Ej. 1:  $\vec{a}(t) = 3t\vec{i} + \vec{k}$

$$\begin{cases} \vec{r}(0) = \vec{0} \\ \vec{v}(0) = 2\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = (2\vec{i} + \vec{j}) + \int_0^t (3t\vec{i} + \vec{k}) dt = \left(2 + \frac{3}{2}t\right)\vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \left[ \left(2 + \frac{3}{2}t\right)\vec{i} + \vec{j} + t\vec{k} \right] dt = \underbrace{\left(2t + \frac{3}{4}t^2\right)}_{x(t)}\vec{i} + \underbrace{t}_{y(t)}\vec{j} + \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{z(t)}\vec{k}$$

TRAYECTORIA:

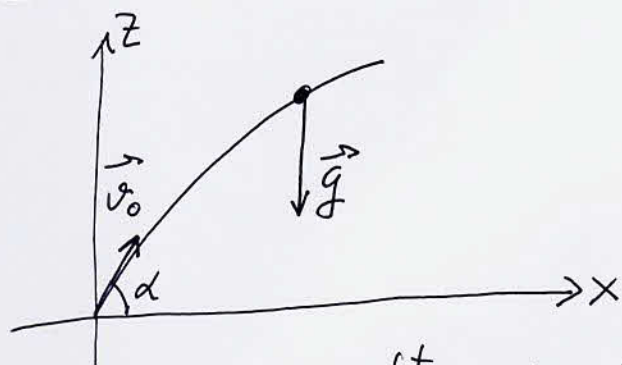
$$\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{3}{4}t^2 \\ y(t) = t \\ z(t) = t^2/2 \end{cases}$$

Ej. 2

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = -R\omega^2 (\cos\omega t \vec{i} + \sin\omega t \vec{j}) \\ \vec{r}(0) = R \vec{i} \\ \vec{v}(0) = R\omega \vec{j} \end{cases}$$

(3)

### Ej. 3: TIRO PARABOLICO PLANO



$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \vec{g} = -g \vec{k} \\ \vec{v}_0(t) = \vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \sin\alpha \vec{k} \\ \vec{r}_0(0) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a} dt = (v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \sin\alpha \vec{k}) + \int_0^t -g dt \vec{k} = \\ &= v_0 \cos\alpha \vec{i} + (v_0 \sin\alpha - gt) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt = v_0 \cos\alpha \cdot t \vec{i} + (v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2) \vec{k}$$

TRAY.:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

En  $\vec{r}(0) = x_0 \vec{i} + z_0 \vec{k}$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

EN IMPLICITAS:  $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$\left[ z = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 \right]$$

## ALGUNAS CUESTIONES UTILES

(4)

### a) ALCANCE DEL TIRO PARABOLICO

Solución para  $z=0$  ( $x \neq 0$ )

$$z = x \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

### b) Altura máxima alcanzada. H

Vértice de la parábola  $V \equiv \left( -\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$  en  $z = ax^2 + bx + c$

$$V = \left( -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}, -\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{-2\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} \right) = \left( \underbrace{\frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}}_{x_v}, \underbrace{\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}}_{z_v} \right)$$

$$H \equiv z_v = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

N: También se obtiene estudiando el extremo, o bien el valor de  $z$  para el que la velocidad es horizontal.

$$1) v_z(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g \cdot t = 0 \quad t_v = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha$$

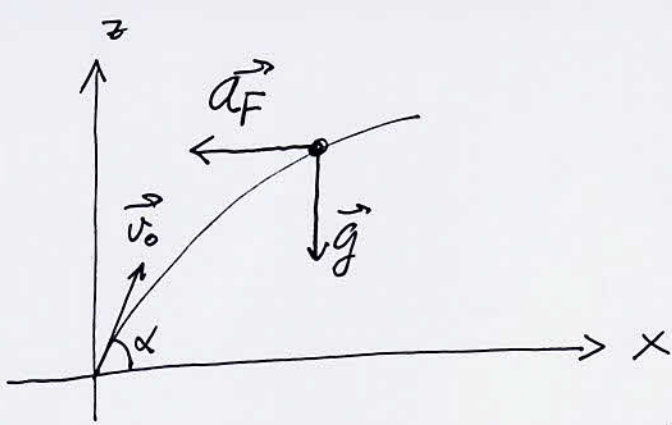
$$z(t_v) = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

$$2) \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow x_v = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\text{con lo que } z_v = H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left( \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2$$
$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

### Ej 4 TIRO PARABOLICO PLANO CON VIENTO EN CONTRA

Suponemos que el objeto sufre la acción de una fuerza constante horizontal y dirigida hacia el eje  $x$  en contra del movimiento que le proporciona una aceleración  $a_F$



$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_F = -g\vec{k} - a_F\vec{i} \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k} \\ \vec{r}(0) = \vec{0} \end{cases} \quad (5)$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k} + \int_0^t (-g\vec{k} - a_F\vec{i}) dt =$$

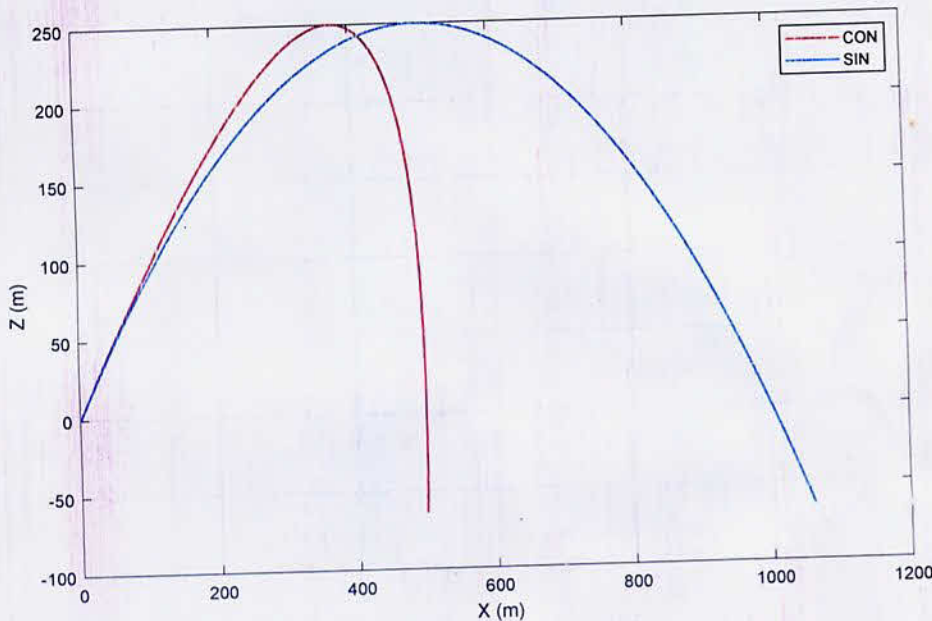
$$= (v_0 \cos \alpha - a_F t) \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + (v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} a_F t^2) \vec{i} + (v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{k}$$

TRAYEC.  $\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2} a_F t^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

"ESTO NO ES UNA PARABOLA"

(Matlab)



## 2) SOLO HAY DEPENDENCIA EN $\vec{r}$

(6)

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

(\*) Solución para el caso 1-D.

EJ VELOCIDAD

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = F(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(x) \Rightarrow$$

$$v dv = F(x) dx \Rightarrow \int_{v(0)}^v v dv = \int_{x(0)}^x F(x) dx$$

$$\left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^v = \int_{x_0}^x F(x) dx \Rightarrow$$

$$\boxed{v^2(x) = v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x F(x) dx}$$

← velocidad depende de la coord. x

II) TRAYECTORIA:

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \Rightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x F(x) dx}} = \int_0^t dt$$

de donde se obtiene  $t = t(x)$  que invertida  $\Rightarrow x = x(t)$

EJ-1 PARTICULA SOBRE EJE X CON ACELERACION CONSTANTE.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= a \\ \text{CI} &= (x_0, v_0) \end{aligned} \right\}$$

$$v dv = a \cdot dx \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

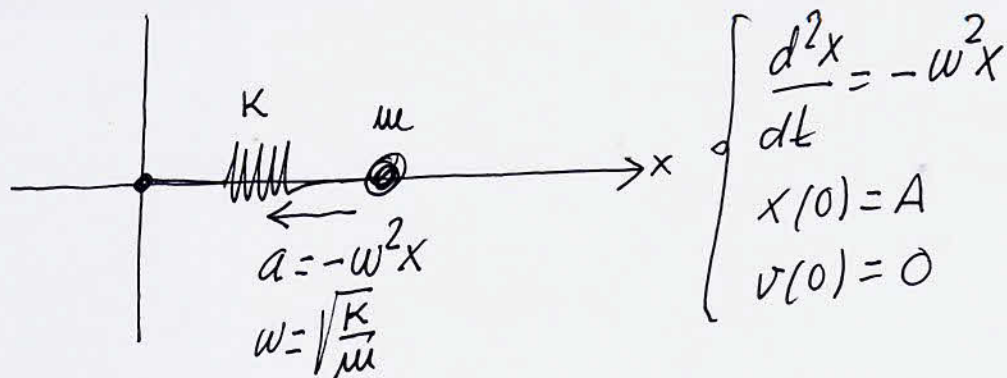
$$\text{Simplificando: } v_0 = 0, x_0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2ax}$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2ax}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} 2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{2x}{a}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} at^2}$$

# Ej-2 - MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE: M.A.S. (1-D)

(7)



$$v(x) = \pm \sqrt{2 \int_A^x -w^2 x dx} = \pm \sqrt{w^2 (A^2 - x^2)} = \pm w \sqrt{A^2 - x^2}$$

## TRAYECTORIA

$$t = \int_A^x \frac{dx}{w \sqrt{A^2 - x^2}} \xrightarrow{\substack{x/A = z \\ dx = A dz}} \int_1^{x/A} \frac{A dz}{w \cdot A \sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{w} \int_1^{x/A} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} =$$

$$= \frac{1}{w} \left[ \arcsin(z) \right]_1^{x/A} = \frac{1}{w} \left[ \arcsin \frac{x}{A} - \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \frac{x}{A} = \sin \left( wt + \frac{\pi}{2} \right)$$

es decir  $x(t) = A \cdot \cos wt$  mov. oscilatorio de freq.  $f = \frac{w}{2\pi}$

VELOCIDAD  $v(t) = -Aw \sin wt$

N: En mas dimensiones aparecen trayectorias notables.  
Figuras de Lissajous. Por ejemplo.

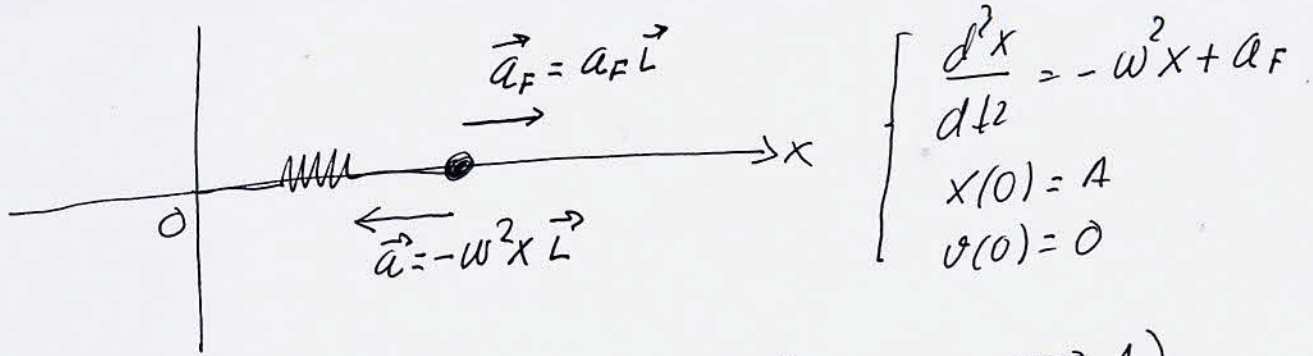
$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -w_1^2 x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -w_2^2 y \end{aligned} \right\}$$

$$\left[ \begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos w_1 t \\ y(t) &= A_2 \cos w_2 t \end{aligned} \right]$$

← Matlab.

$$\begin{aligned} x(0) &= A_1 & y(0) &= A_2 \\ v_x(0) &= 0 & v_y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Ej-3) MAS con una fuerza (aceleración constante) (1-D) (8)



Ej-4) EL PENDULO SIMPLE (COMPLEMENTO 1)

3- SOLO HAY DEPENDENCIA EN  $\vec{v}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{v}) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{array} \right.$$

\* Solución para un problema 1-D.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = F(v) \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right.$$

PROCEDIMIENTO GENERAL

$$\frac{dv}{dt} = F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = dt \Rightarrow \int_{v(0)}^v \frac{dv}{F(v)} = t$$

Pero da  $t = t(v)$  <sup>(INVERSION)</sup>  $\Rightarrow v = v(t)$  a la que aplicamos el 2º TFC.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt.$$

Ej. 1 : MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO CON FRICCIÓN A LO LARGO DEL EJE X

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = a - r \cdot v \\ x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right.$$

siguiendo el procedimiento,

$$\frac{dv}{a-rv} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{a-rv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{r} \log \left( \frac{a-rv}{a-rv_0} \right) = t$$

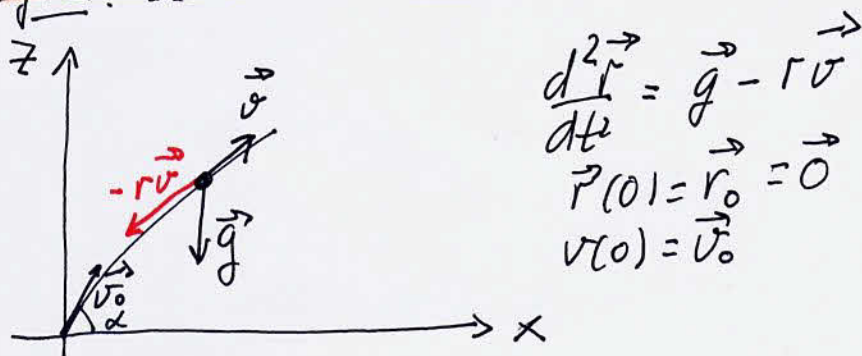
despejando  $a-rv = (a-rv_0)e^{-rt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{r} \left( a - (a-rv_0)e^{-rt} \right)$

Propiedad:  $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a}{r}$  velocidad terminal o límite.

Nota: Si  $a=0$   $v(t) = v_0 e^{-rt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

TRAYECTORIA:  $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt = \frac{a}{r} t - \frac{1}{r^2} (a-rv_0)(1-e^{-rt})$

## Ej. 2. TIRO PARABOLICO CON ROZAMIENTO



$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - r\vec{v}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

que da lugar a 2 ecuaciones

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -rv_x \Rightarrow v_x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-rt}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - rv_z \Rightarrow v_z(t) = \frac{1}{r} \left( (g + rv_0 \sin \alpha) e^{-rt} - g \right)$$

Notese que si  $r \approx 0$   $v_x(t) \approx v_0 \cos \alpha$   
 $v_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt$  (basta poner  $e^{-rt} \approx 1 - rt$ )

por tanto la trayectoria es

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{r} (1 - e^{-rt}) \\ z(t) = \frac{1}{r^2} (g + rv_0 \sin \alpha) (1 - e^{-rt}) - \frac{g}{r} t \end{cases}$$

(NO ES UNA PARABOLA)

por Matlab.

Notas 1) Se  $r$  es pequeño  $e^{-rt} \approx 1 - rt + \frac{1}{2}r^2t^2 + O(r^3)$  (10)

$$x(t) \approx \frac{v_0 \cos \alpha}{r} \left( rt - \frac{1}{2} r^2 t^2 \right) \underset{r \rightarrow 0}{=} v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$z(t) \approx \frac{1}{r^2} (g + r v_0 \sin \alpha) \left( rt - \frac{1}{2} r^2 t^2 \right) - \frac{g}{r} t =$$

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} r v_0 \sin \alpha t^2 \underset{r \rightarrow 0}{=} v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

2) Para una caída libre con rozamiento. ( $v_0 = 0$   $z_0 = H$ )



$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - r v_z \Rightarrow \frac{d v_z}{g + r v_z} = -dt \Rightarrow$$

$$\log \left( \frac{g + r v_z}{g} \right) = -rt \Rightarrow v_z = \frac{g}{r} (e^{-rt} - 1) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{g}{r}$$

Tenemos una velocidad "terminal" de caída  $v_z^L = -\frac{g}{r}$  y

$$z(t) = \frac{g}{r^2} (1 - e^{-rt}) - \frac{g}{r} t + H$$

### 3. OTROS SISTEMA COORDENADOS

(11)

Def: **CONFIGURACION DE UN MOVIL**: COORDENADAS NECESARIAS PARA TENER BIEN DEFINIDO AL MOVIL. (POSICION ESPACIAL, UBICACION, ...)

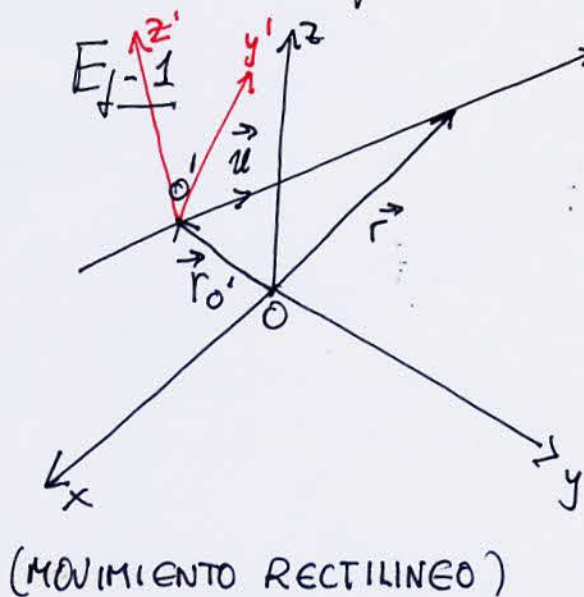
**ESTADO DE UN MOVIL**: INFORMACION SOBRE LAS COORDENADAS Y LAS VELOCIDADES EN UN CIERTO INSTANTE.  $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$

Ej: En coordenadas cartesianas,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  y  $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ .

El problema fundamental de la cinemática

$$\begin{cases} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

puede simplificarse en algunas ocasiones usando un sistema coordinado apropiado.



$$\begin{cases} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a(t) \cdot \vec{u} \quad (\vec{u} \equiv \vec{i}') \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0' \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0' \end{cases}$$

Si cambiamos al sistema coordinado  $Ox'y'z'$

el mov. es a lo largo del eje  $x'$  y la ecuación cinemática es

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = a(t) \\ \vec{r}(0) = 0 \\ \vec{v}(0) = v_0' \vec{i}' \end{cases}$$

--- COMO SE DIJO ANTES, EN GENERAL DEBEMOS RESOLVER UNA EDO DE 2º GRADO QUE SUELE ADOPTAR LA FORMA SIGUIENTE :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\ \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\ \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}} \right\} \text{CONDICIONES INICIALES}$$

"ACELERACIÓN DEPENDE DE LA POSICIÓN, VELOCIDAD Y EXPLICITAMENTE DEL TIEMPO."

LOS PROBLEMAS CINEMÁTICOS SE REDUCEN A ENCONTRAR SOLUCIONES ACEPTABLES PARA  $\vec{r}(t)$ .

A VECES LA RESOLUCIÓN SE SIMPLIFICA PASANDO A UN SISTEMA DE COORDENADAS ADECUADO AL PROBLEMA

## SISTEMAS COORDENADOS USADOS EN CINEMÁTICA

### a) COORDENADAS CARTESIANAS

\* VELOCIDAD:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \vec{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} \vec{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} \vec{k}$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

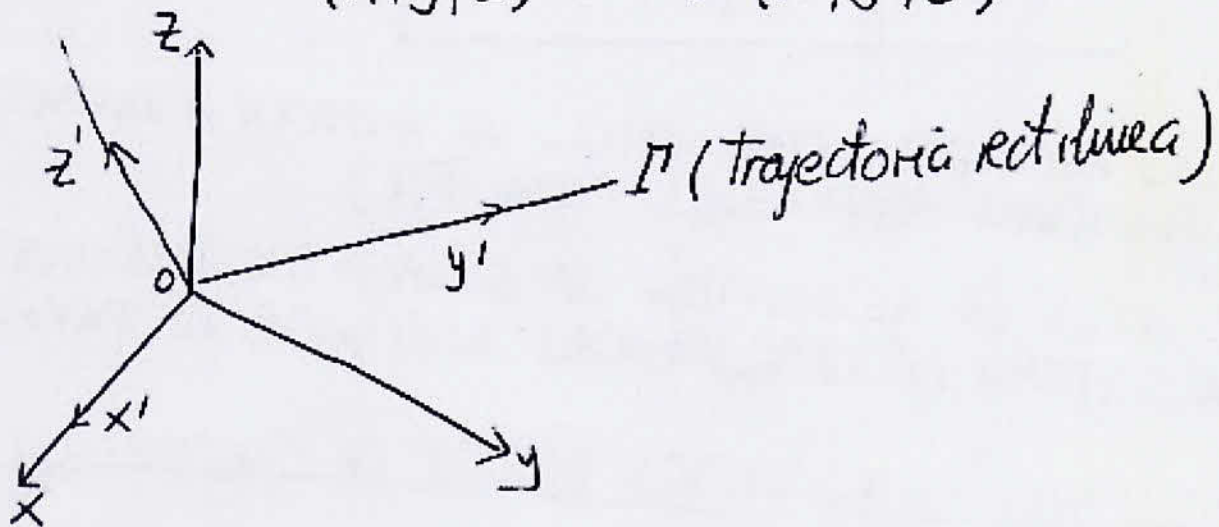
$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow$  elemento de longitud sobre la trayectoria  
 $\rightarrow$  tiempo invertido en recorrerlo

# \* ACCELERACIÓN (CARTESIANAS)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x} \vec{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y} \vec{j} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z} \vec{k}$$

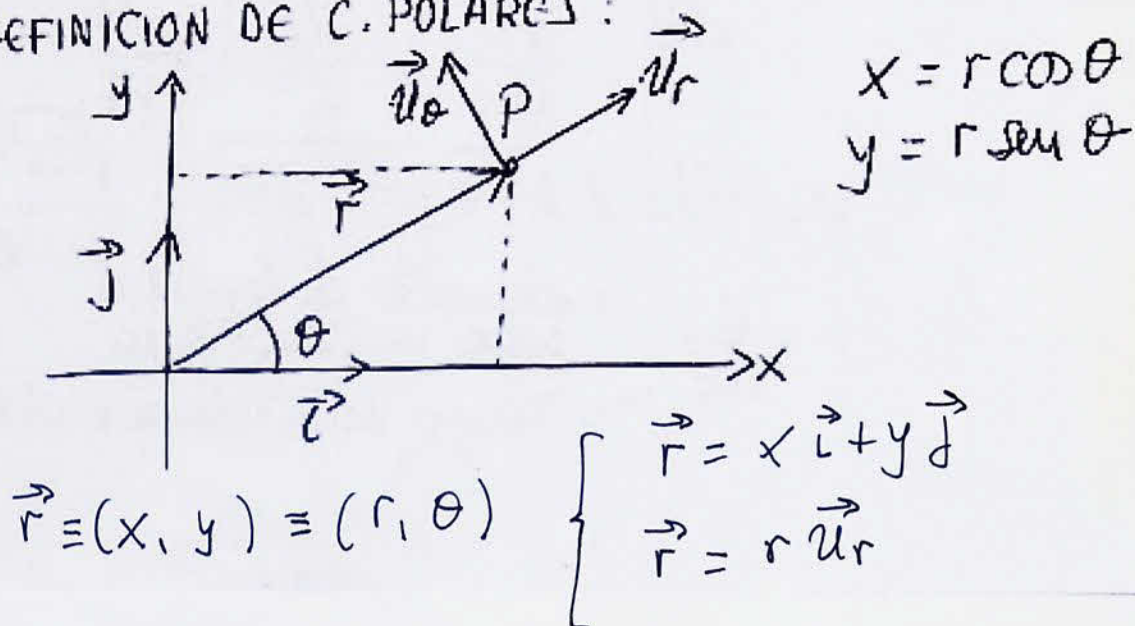
EN ALGUNAS OCASIONES PODEMOS SIMPLIFICAR ALGO LOS CALCULOS SI PASAMOS A OTRO SISTEMA CARTESIANO CONECTADO POR UNA TRANSFORMACION LINEAL

$$(x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{L}} (x', y', z')$$



## b) COORDENADAS POLARES PLANAS (PARA MOV. 2-D)

DEFINICIÓN DE C. POLARES:



LOS VECTORES BASICOS  $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_\theta$  TIENEN PROPIEDAD

i)  $|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = 1$

ii)  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$

NÓTESE TAMBIEN QUE, A DIFERENCIA DE  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  QUE SON CONSTANTES (EN MÓDULO Y DIRECCIÓN),  $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_\theta$  VARÍAN (EN DIRECCIÓN) CON EL PUNTO P.

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \text{sen} \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\text{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

N: LA DEFINICIÓN EXACTA DE ELLOS SERÍA

$$\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad \left( \begin{array}{l} \vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \text{sen} \theta \vec{j} \\ \vec{r} = r \vec{u}_r \end{array} \right)$$

\* VELOCIDAD

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \cdot \vec{u}_r) = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

PERO  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \text{sen} \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} = +\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} v_r = \dot{r} \text{ VELOCIDAD RADIAL} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \text{ VELOCIDAD "ANGULAR"} \end{array} \right.$$

## \* ACCELERACIÓN (EN POLARES)

(15)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \\ &= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Donde se ha usado que  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \underbrace{-\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{j}}_{-\dot{\theta}\vec{u}_r}$

Por tanto, la aceleración tiene dos componentes

$$\vec{a} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & \text{ACCELERACIÓN RADIAL} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & \text{ACCELERACIÓN ANGULAR} \end{cases}$$

A PESAR DE LO COMPLICADO QUE ESTO PUEDA PARECER, LAS COORDENADAS POLARES SON MUY CONVENIENTES PARA ESTUDIAR MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS (POR EJEMPLO, EL MOV. CIRCULAR)

Ej: MOV. CIRCULAR (RADIO  $r$  CONSTANTE)

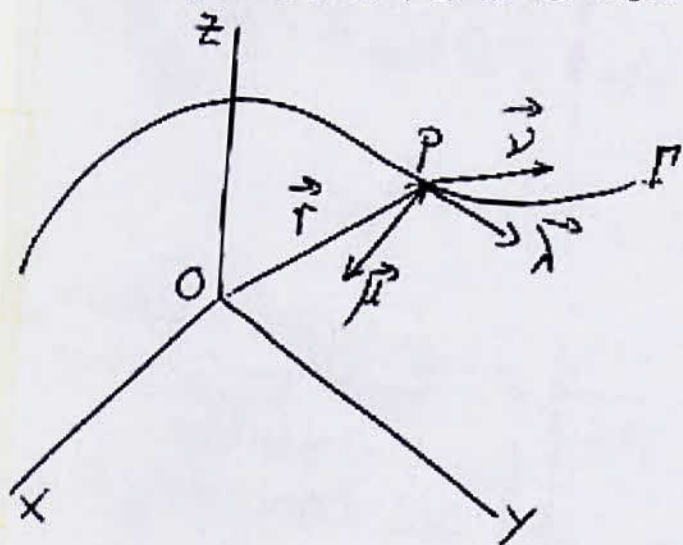
$$a_r = -R\dot{\theta}^2 \quad \leftarrow \text{aceleración normal}$$

$$a_\theta = R\ddot{\theta} \quad \leftarrow \text{aceleración tangencial}$$

## C) COORDENADAS INTRÍNSECAS

(16)

SISTEMA DE COORDENADAS ADAPTADO A LA TRAYECTORIA  
CON VECTORES BÁSICOS  $\{\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}\}$



$\vec{\lambda} \equiv$  VECTOR TANGENTE UNITARIO  
 $\vec{\lambda} = \frac{\vec{v}}{v} \quad (v = |\vec{v}|)$

$\vec{\mu} \equiv$  VECTOR NORMAL PRINCIPAL

$\vec{\mu} = \rho \cdot \frac{d\vec{\lambda}}{ds}$  (UNITARIO)  
RADIO DE CURVATURA  $ds = v dt$

$\vec{\nu} \equiv$  VECTOR BINORMAL UNITARIO

ADemás, LOS TRES VECTORES SON ORTOGONALES ENTRE SÍ

### \* VELOCIDAD

$\vec{v} = \vec{\lambda} \cdot v$  Y LA VELOCIDAD SOLO TIENE COMPONENTE TANGENCIAL  $v_t = v$

### \* ACCELERACIÓN

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\lambda} \cdot v) = \frac{dv}{dt} \vec{\lambda} + v \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$$

PERO  $\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{\mu}$  (DEFINICIÓN DE  $\vec{\mu}$ )

LUEGO...  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\lambda} + \frac{v^2}{\rho} \vec{\mu}$   $\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \text{ (ACELERAC. TANGENC.)} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ (ACELERAC. NORMAL)} \end{cases}$

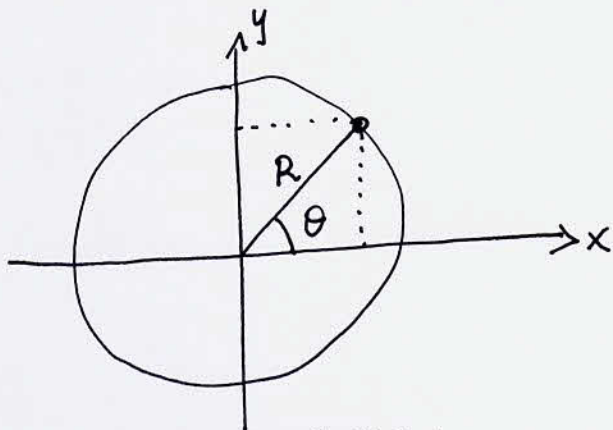
Notas: 1 - CÓMO CALCULAR EL RADIO DE CURVATURA

$$\rho = \frac{v}{|d\vec{\lambda}/dt|}$$

2- EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR  $\vec{\lambda} \equiv \vec{u}_\theta$  y  $\vec{\mu} = -\vec{u}_r$  (17)  
 ADemás  $\rho \equiv R$  (radio de la órbita)

### EJERCICIO

Tomemos un mov. circular de radio  $R$  centrado en el origen



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

a) CARTESIANAS:

$$\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4}$$

b) POLARES PLANAS:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow v = |\vec{v}| = R\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^4 + R^2\ddot{\theta}^2}$$

c) INTRINSECAS

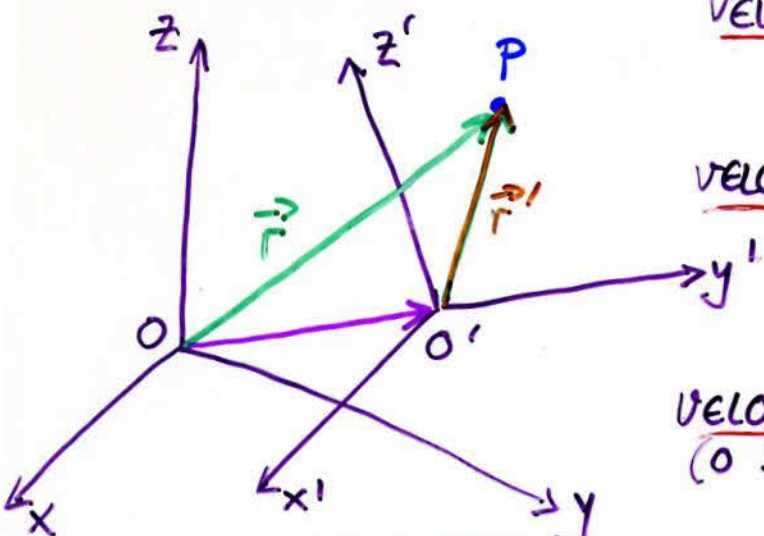
$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{\lambda} \Rightarrow v = |\vec{v}| = R\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\lambda} + \frac{v^2}{R} \vec{\mu} = R\ddot{\theta} \vec{\lambda} + R\dot{\theta}^2 \vec{\mu} \Rightarrow a = \sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4}$$

Pero se ve, las vectores no cambian, solo su expresión en los distintos sistemas coordenados.

# MOVIMIENTO RELATIVO (TRATAMIENTO VECTORIAL CLÁSICO)

## DEFINICIONES PREVIAS



VELOCIDAD ABSOLUTA  $\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_O$

VELOCIDAD RELATIVA  $\vec{v}'_P = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \Big|_{O'}$

VELOCIDAD DE DESPLAZ. (O DE ARRASTRE)  $\vec{v} = \frac{d\vec{oo}'}{dt} \Big|_O$

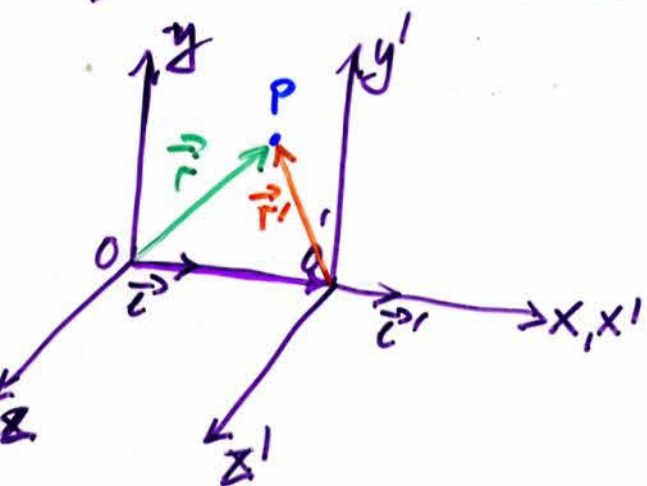
$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'}$$

DE MODO ANALOGO SE DEFINEN LAS ACELERACIONES ABSOLUTA, RELATIVA Y DE ARRASTRE

$$\vec{a}_P = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Big|_O \quad \text{"} \quad \vec{a}'_P = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} \Big|_{O'} \quad \text{y} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{oo'}}{dt^2} \Big|_O$$

SUPONDEREMOS NORMALMENTE QUE  $t' \equiv t$

## A) MOVIMIENTO RELATIVO BAJO TRASLACIONES



$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'} \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_O = \frac{d\vec{oo'}}{dt} \Big|_O + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Big|_O$$

$$\text{PERO } \frac{d\vec{r}'}{dt} \Big|_O = \frac{d}{dt} (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \Big|_O =$$

$$= \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \Big|_{O'}$$

YA QUE EN UNA TRASLACIÓN LAS VARIACIONES DE LOS VECTORES BASICOS SON NULAS.

DE ESTO SE DEDUCE LA LEY DE ADICIÓN DE VELOCIDADES

$$\vec{v}_p = \vec{v} + \vec{v}_p'$$

PARA LA ACCELERACIÓN PROCEDAMOS A DERIVAR UNA VEZ MAS

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt}\bigg|_0 = \frac{d\vec{v}_p'}{dt}\bigg|_0 + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\bigg|_0\right) \vec{a}'$$

$$\text{PERO } \frac{d\vec{v}_p'}{dt}\bigg|_0 = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_x' \vec{i}' + \vec{v}_y' \vec{j}' + \vec{v}_z' \vec{k}'\right)\bigg|_0 = \underbrace{\frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}'}_{\frac{d\vec{v}_p'}{dt}\bigg|_{0'}}$$

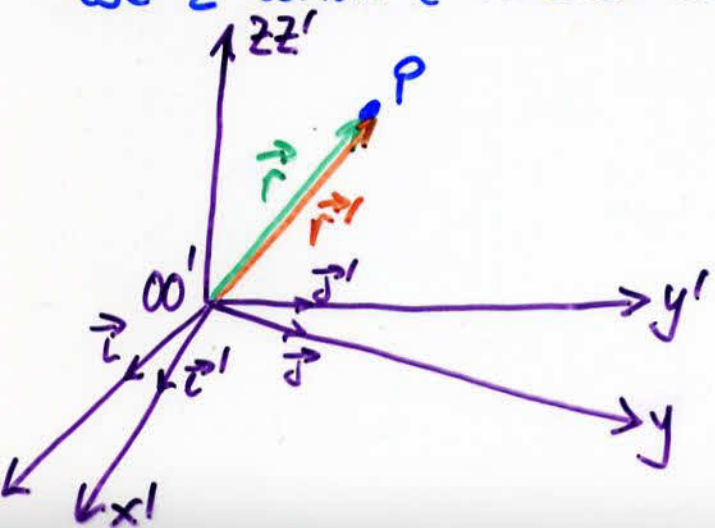
DE ESTO SE DEDUCE LA LEY DE ADICIÓN DE ACCELERACIONES

$$\vec{a}_p = \vec{a} + \vec{a}_p'$$

$$\text{Si } \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_p' \quad (\text{SISTEMAS INERCIALES})$$

## B) MOVIMIENTO RELATIVO BAJO ROTACIONES

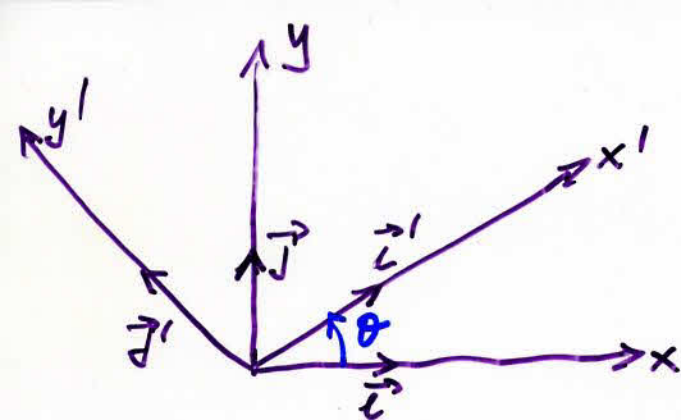
SUPONREMOS POR SIMPLICIDAD ROTACIONES ALREDEDOR DEL EJE Z COMÚN (TAMBIÉN EL ORIGEN COORDENADO)



$$\text{AUNQUE } \vec{r} \equiv \vec{r}'$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{r}' = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$



$$\vec{i}' = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$$

$$\vec{j}' = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j} = \dot{\theta} \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} = -\dot{\theta} \vec{i}'$$

VEAMOS LA VELOCIDAD...

$$\vec{v}_P = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 = \underbrace{\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'}_{\vec{v}_P'} + \underbrace{x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}}_{x' \dot{\theta} \vec{j}' - y' \dot{\theta} \vec{i}'}$$

SI DEFINO:  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \cdot \vec{k}$  ENTONCES

$$x' \dot{\theta} \vec{j}' - y' \dot{\theta} \vec{i}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

DE LO QUE SE DEDUCE, LA LEY DE COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES  
BAJO ESTE TIPO DE ROTACIONES

$$\boxed{\vec{v}_P|_0 = \vec{v}_P'|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'|_{0'}}$$

¡CUIDADO!

ESTA ECUACIÓN RELACIONA VECTORES

$$\vec{v}_P|_0 = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{v}_P'|_{0'} = v_x' \vec{i}' + v_y' \vec{j}' + v_z' \vec{k}'$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}'|_{0'} = \vec{\omega}_0 \times (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}')$$

PARA TRABAJAR BIEN  
HAY QUE PROYECTAR  
SOBRE EL MISMO SISTEMA  
TODOS LOS VECTORES

PARA LAS ACCELERACIONES...

$$\vec{a}_P|_0 = \frac{d\vec{v}_P}{dt}|_0 = \frac{d\vec{v}_P'}{dt}|_0 + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')|_0$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}_P'}{dt}|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P'|_{0'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'|_{0'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')|_{0'}$$

DE DONDE

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P' + \vec{\omega} \times \vec{v}_P'|_{0'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}|_{0'}}_{\vec{v}_P'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')|_{0'}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}_P'$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_P' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')|_{0'}$$

ACELERACIÓN  
DE  
CORIOLIS

ACELERACIÓN  
DE  
LOS  
EJES  
MOVILES

ACELERACIÓN  
CENTRIFUGA

APLICACIONES:

- 1- DESVIACIÓN DE OBJETOS MOVILES (CAIDA LIBRE, TIRO PARABOL.)
- 2 - MOVIMIENTOS DE MASAS DE AIRE → CICLONES