

FISICA I: Notas

Raúl Sánchez.

Departamento de Física
Universidad Carlos III de Madrid

Despacho 4.0C07.

e-mail: rsanchez@fis.uc3m.es

Índice general

1. CINEMATICA	7
1.1. Sistema coordenado cartesiano	7
1.2. Trayectoria	9
1.3. Vector velocidad	9
1.4. Vector aceleración	11
1.5. Tipos de movimiento	11
1.6. Integración del movimiento	12
1.7. Simetrías	15
1.8. Movimiento con simetría de rotación en el plano: coordenadas polares . . .	16
1.8.1. Coordenadas polares	17
1.8.2. Base de vectores en coordenadas polares	21
1.8.3. Descripción del movimiento plano en coordenadas polares	23
1.9. Coordenadas cilíndricas	25
1.9.1. Descripción del movimiento tridimensional en cilíndricas	29
1.10. Coordenadas esféricas	31
1.10.1. Descripción del movimiento tridimensional en esféricas	34
1.11. Componentes intrínsecas de la aceleración	37
2. DINÁMICA	40
2.1. Fuerzas. Generalidades.	40
2.2. Leyes de Newton y Principio de Superposición	41
2.3. Principio de Superposición	42
2.4. Fuerza normal, fuerza de rozamiento y tensión	43
2.4.1. Fuerza normal	43
2.4.2. Fuerza de rozamiento	43
2.4.3. Tensión	45
2.5. Campo de fuerzas	45
2.6. Energía cinética	46

2.7.	Concepto de trabajo	46
2.8.	Fuerzas conservativas	51
2.9.	Energía potencial	51
2.10.	Conservación de la Energía	53
2.11.	Principio de superposición para la energía potencial	55
2.12.	Almacenamiento de energía: caso del campo gravitatorio	56
3.	EL OSCILADOR ARMÓNICO	58
3.1.	El oscilador armónico simple	58
3.2.	Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado	59
3.2.1.	Solución de la ecuación homogénea de segundo orden	60
3.2.2.	Solución de la ecuación inhomogénea de segundo orden	61
3.3.	Solución de la ecuación del oscilador armónico	62
3.4.	Energía potencial armónica	63
3.5.	El oscilador armónico amortiguado	65
3.5.1.	Solución de la ecuación del oscilador armónico amortiguado	65
3.6.	El oscilador armónico forzado	69
3.6.1.	Solución de la ecuación del oscilador armónico forzado	70
3.6.2.	Resonancia en amplitud y resonancia en energía	72
3.7.	Oscilaciones pequeñas	73
4.	OSCILACIONES Y ONDAS	76
4.1.	Grados de Libertad	76
4.2.	Oscilaciones en sistemas con un grado de libertad	78
4.2.1.	El péndulo	79
4.2.2.	Oscilaciones longitudinales en un resorte	79
4.2.3.	Oscilaciones transversales en un resorte	81
4.3.	Oscilaciones en sistemas con dos grados de libertad	83
4.3.1.	Osciladores longitudinales acoplados	84
4.3.2.	Osciladores transversales acoplados	88
4.3.3.	Importancia de los modos normales	91
4.4.	Sistema con infinitos grados de libertad. Ecuación de ondas.	93
4.4.1.	Descripción de la posición de la cuerda	94
4.4.2.	Ecuación de movimiento de la cuerda: ecuación de ondas	95
4.4.3.	Buscando los modos normales	98
4.4.4.	Más allá de la cuerda vibrante	104
4.5.	Ondas	105
4.5.1.	Expresión formal de una onda progresiva	107

4.5.2.	Velocidad de propagación de una onda progresiva	108
4.5.3.	Ondas de propagación armónicas	109
4.5.4.	Relación de ondas estacionarias y ondas progresivas	110
4.5.5.	Paquetes de ondas: Velocidad de fase y velocidad de grupo	113
5.	ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO	117
5.1.	La carga eléctrica.	117
5.2.	La ley de Coulomb.	118
5.3.	El campo eléctrico	121
5.3.1.	Líneas de fuerza	122
5.4.	Principio de superposición	123
5.5.	Distribuciones de carga continua: densidad de carga	125
5.6.	Cálculo del campo eléctrico producido por distribuciones de carga continua	127
5.7.	Teorema de Gauss para el campo eléctrico	138
5.7.1.	Definición matemática de flujo de un campo vectorial a través de una superficie arbitraria.	139
5.7.2.	Cálculo de flujos en el caso de que el campo vectorial forme un ángulo constante con la superficie.	143
5.7.3.	Teorema de Gauss para el campo eléctrico	144
5.7.4.	Aplicación del Teorema de Gauss al cálculo de campo eléctricos en sistemas con alto grado de simetría	145
5.8.	Fuentes escalares del campo eléctrico: operador divergencia	149
5.8.1.	El operador divergencia	150
5.8.2.	Fuentes escalares del campo eléctrico	150
5.9.	El potencial eléctrico	154
5.9.1.	Energía potencial eléctrica	154
5.9.2.	Potencial eléctrico	156
5.9.3.	Potencial eléctrico creado por una distribución continua de carga . .	156
5.9.4.	Cálculo de potenciales eléctricos	158
5.10.	Energía electrostática	162
5.10.1.	Generalización a un sistema discreto de cargas	164
5.10.2.	Generalización a un sistema continuo de cargas	167
5.10.3.	Densidad de energía electrostática	168

6. ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES	169
6.1. MEDIOS CONDUCTORES	169
6.1.1. Propiedades generales	170
6.1.2. Procesos de Carga en un conductor	172
6.1.3. Apantallamiento eléctrico	173
6.1.4. Blindaje eléctrico	176
6.1.5. Efecto Punta	178
6.1.6. Capacidad de un conductor	180
6.1.7. Energía almacenada en un conductor	180
6.1.8. Condensadores	181
6.2. MEDIOS DIELECTRICOS	189
6.2.1. El dipolo eléctrico	190
6.2.2. El vector polarización	193
6.2.3. Potencial eléctrico creado por un dieléctrico polarizado	194
6.2.4. Densidades de carga de polarización	196
6.2.5. Teorema de Gauss para dieléctricos	199
6.2.6. Vector Desplazamiento Eléctrico, \vec{D}	200
6.2.7. Condiciones de frontera sobre los vectores \vec{E} y \vec{D}	202
6.2.8. Dieléctricos y condensadores	205
7. APENDICE A: INTRODUCCION AL CALCULO VECTORIAL	211
7.1. Magnitudes vectoriales y escalares. Campos.	211
7.2. Representación de vectores	212
7.3. Producto de un vector por un escalar	215
7.4. Suma de vectores	215
7.5. Producto escalar	216
7.6. Producto vectorial	219
7.7. Producto Mixto	221
7.8. Derivada de un vector	222
7.9. Integral de un vector	223
8. APENDICE B: INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL	224
8.1. Definición de derivada. Sentido físico	224
8.2. Interpretación matemática de la derivada	225
8.3. Derivadas más comunes	227

9. APENDICE C: INTRODUCCION AL CALCULO INTEGRAL	229
9.1. Definición de integral	229
9.2. Propiedades de las integrales	230
9.3. Integrales más comunes	230
9.4. INTEGRALES DEFINIDAS. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA INTEGRAL . . .	232
9.5. Propiedades de las integrales definidas	233

Capítulo 1

CINEMATICA

Los movimientos más fáciles de describir son los de una partícula puntual, es decir aquella que no tiene dimensión alguna ni estructura interna. Sin embargo, antes de describir su movimiento, es necesario establecer la base matemática que permita localizarla de manera unívoca en el espacio.

1.1. Sistema coordenado cartesiano

Para localizar un punto en el espacio, lo más sencillo es utilizar lo que se conoce como **sistema coordenado cartesiano**. Esto no es más que el conjunto formado por un punto arbitrario del espacio, O , que se llama **origen del sistema coordenado**, y tres vectores **unitarios** y **pendiculares entre sí**, que forman la **base del sistema coordenado** y que se denotan por \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} (ver Fig. 1.1). Es muy importante que el triedro que forman los vectores de la base sea **orientado a derechas**. Lo que esto quiere decir es que ha de cumplirse que:

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}, \quad (1.1)$$

por lo que la orientación de \vec{i} y \vec{j} puede elegirse arbitrariamente, pero la de \vec{k} viene dada por la Ec. 1.1.

Una vez hecho esto, la posición de cualquier punto P viene especificada por el vector que une el origen con el punto en cuestion. Este vector se conoce por **radio vector**, y se escribe en general como:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (1.2)$$

Las longitudes de las componentes del radio vector a lo largo de los vectores de la base, llamadas **coordenadas del punto P**, se denotan por las letras x , y y z . Otra notación

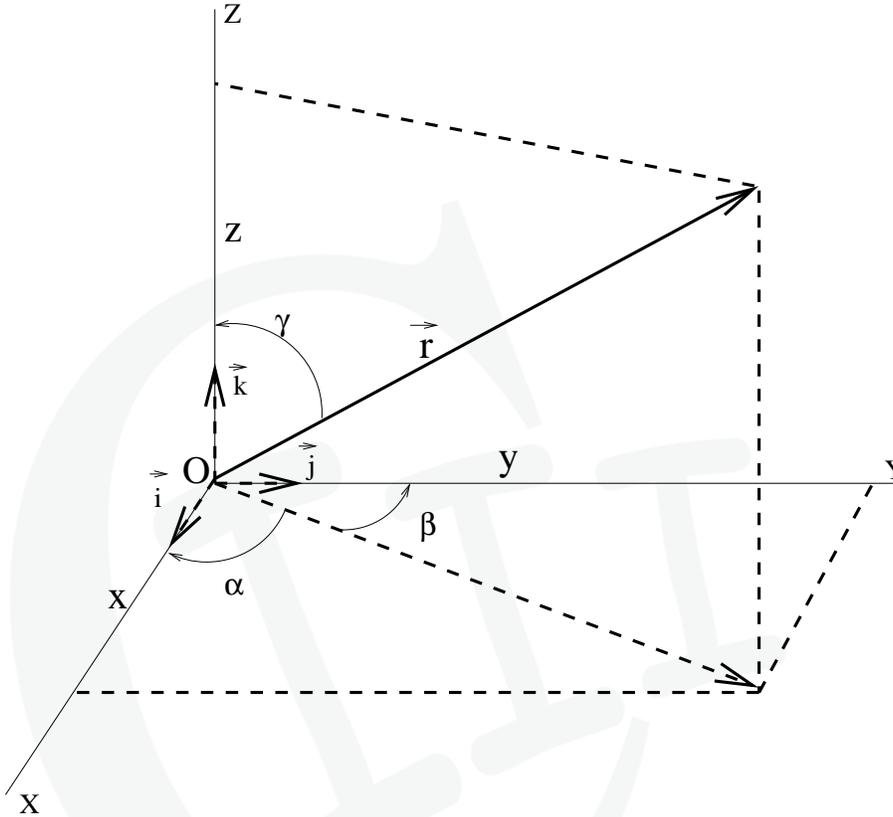


Figura 1.1: Coordenadas cartesianas.

común para el radio vector \vec{r} es:

$$\vec{r} = (x, y, z). \quad (1.3)$$

IMPORTANTE: La elección tanto del origen como de los vectores de la base es totalmente arbitraria. Por ello, debe realizarse intentando simplificar al máximo el problema que luego queramos resolver. Por ejemplo, si queremos describir el movimiento de un cuerpo a lo largo de una línea recta, es conveniente escoger uno de los ejes coordenados a lo largo de esta línea (el eje OX , por ejemplo). Análogamente, si el movimiento está restringido al plano, es útil que se escoja dicho plano coincidente con alguno de los tres planos coordenados OXY , OZY ó OZX , formados, respectivamente, por la envolvente lineal de las parejas correspondientes de vectores de la base \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} .

1.2. Trayectoria

En general, un cuerpo que describa un movimiento en el espacio se moverá sobre una curva que se conoce como **trayectoria**. Es importante darse cuenta de que sobre una misma trayectoria pueden darse infinitos tipos de movimiento. Así, por ejemplo, supongamos un cuerpo que se mueve en plano OXY siguiendo la recta $y = x$. Podrá moverse a velocidad constante, con un movimiento uniformemente acelerado o de una número infinito de maneras. ¿Cómo se describe matemáticamente esta diferencia?

La manera de hacerlo es darse cuenta de que la trayectoria es el lugar geométrico de los puntos que visita el móvil. En este ejemplo tan simple, viene dada por la ecuación:

$$y = x, \quad z = 0. \quad (1.4)$$

Sin embargo, los distintos tipos de movimiento vienen descritos por ecuaciones del tipo:

$$x = f(t), \quad y = f(t) \quad z = 0, \quad (1.5)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo t que será distinta para cada tipo de movimiento. Por ejemplo, si el movimiento es uniforme, $f(t) = a + bt$ (a y b son dos constantes cualesquiera), mientras que si es uniformemente acelerado, tendremos que $f(t) = a + bt + ct^2$. Claramente, existe un número infinito de funciones f posibles pero, para cualquier función f que escojamos, siempre se cumple que $y = x$!

Resumiendo, la ecuación de la trayectoria será un conjunto de ecuaciones que relacionan a las coordenadas entre sí (como la Eq. 1.4), mientras que las que especifican el tipo de movimiento dependerán explícitamente del tiempo. ¿Cómo se pasa de una a las otras? Pues despejando el parámetro tiempo de todas las ecuaciones de la Eq. 1.5, e igualándolas entre sí para eliminarlo.

1.3. Vector velocidad

Como vimos en la sección anterior, existen muchos tipos de movimiento, incluso sobre una misma trayectoria. Éstos se distinguen por el **ritmo** con el que cambia el vector posición al cambiar el tiempo es diferente. Es importante acostumbrarse a que, en Física, cualquier magnitud que exprese el cambio de una cantidad respecto de otra se representa matemáticamente por la derivada de la primera respecto a la segunda. Veamos con más detalle esto en el caso del cambio del vector posición. Para ello, nos concentramos en la Fig. 1.3, que muestra la posición de un móvil en el instante t , y un poco después, en el

instante $t + \Delta t$. Durante ese intervalo de tiempo, la posición del móvil ha pasado de estar caracterizada por el vector $\vec{r}(t)$ a estarlo por el vector $\vec{r}(t + \Delta t)$. El cambio que ha sufrido el vector posición viene dado por el vector **desplazamiento** $\vec{\Delta r}$:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t), \quad (1.6)$$

que geoméricamente no es sino el vector que une las puntas de los vectores $\vec{r}(t + \Delta t)$ y $\vec{r}(t)$. El ritmo con el que cambia ese vector no es sino su cambio en la unidad de tiempo, que en el límite en que Δt tiende a cero nos da el vector velocidad:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.7)$$

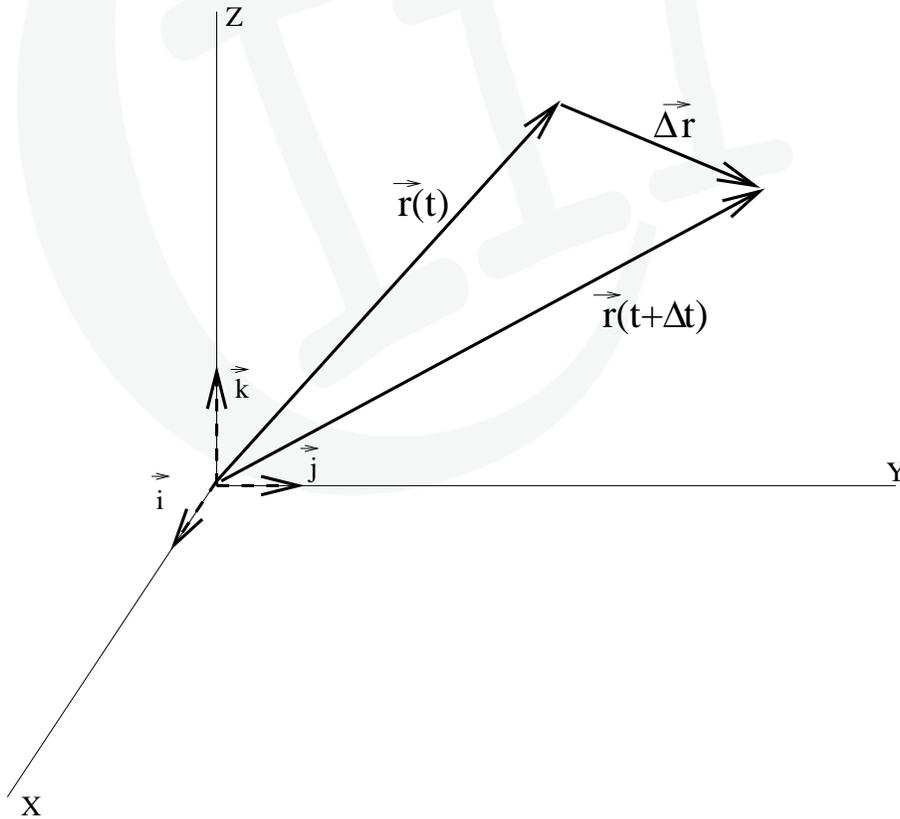


Figura 1.2: Vector desplazamiento.

1.4. Vector aceleración

Igual que el hecho de que el vector posición cambie con el tiempo aconseja la definición de un vector velocidad que cuantifique dicho cambio, es conveniente definir también un segundo vector que describe el ritmo instantáneo de cambio del vector velocidad:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Ahora bien, parecería a simple vista que ahora sería bueno introducir otro vector, que describiera el ritmo de cambio del vector aceleración. Y otro, que describa el ritmo de cambio de este último. Y así, sucesivamente. ¿Por qué no aparecen estos vectores en el desarrollo de la Cinemática?

IMPORTANTE: La respuesta nos la dará el tema siguiente, relativo a la Dinámica, en el que veremos que la segunda ley de Newton nos permite calcular la aceleración que experimenta un cuerpo una vez que se conocen las fuerzas que actúen sobre él. Por ello, no es necesario definir ritmos de cambio de la aceleración (u otros superiores) ya que, una vez conocida la aceleración a partir de las fuerzas, puede calcularse mediante integración de ésta lo que vale la velocidad y la posición del móvil. Y éste es precisamente el objetivo último de la Cinemática: saber situar al móvil en cualquier instante de tiempo.

1.5. Tipos de movimiento

Puesto que, como hemos visto, no es necesario ir más allá del vector aceleración en la descripción del movimiento de un cuerpo, los tipos de movimiento suelen clasificarse según sean sus vectores aceleración y velocidad. Así, distinguiremos:

- **MOVIMIENTO RECTILÍNEO:** si los vectores velocidad y aceleración son paralelos:

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = 0, \quad \forall t. \quad (1.9)$$

De todos los movimientos rectilíneos posibles, se distingue:

- **MOVIMIENTO UNIFORME:** si el vector aceleración es nulo.

$$\vec{a}(t) = 0, \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0. \quad (1.10)$$

- **MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO:** si el vector aceleración es constante.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0, \quad \forall t. \quad (1.11)$$

- MOVIMIENTO PLANO: si los vectores velocidad y aceleración están siempre contenidos en un plano dado. Para ello, es suficiente con que

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{n} = \vec{a}(t) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall t, \quad (1.12)$$

para algún vector \vec{n} . Dicho vector será, por tanto, perpendicular al plano donde está confinado el movimiento. Dentro de los tipos de movimiento plano, destacaremos:

- MOVIMIENTO UNIFORME: si, además, los vectores velocidad y aceleración son siempre perpendiculares entre sí:

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0, \quad \forall t. \quad (1.13)$$

En este caso, el módulo de \vec{v} permanece siempre constante puesto que no existe una componente de \vec{a} a lo largo de \vec{v} . Un ejemplo de movimiento uniforme es el **movimiento circular uniforme** en el que, además $|\vec{a}|$ es constante. El radio de la circunferencia descrita será $R = |\vec{v}|^2 / |\vec{a}|$. ¿Por qué?

- MOVIMIENTO EN EL ESPACIO: si los vectores velocidad y aceleración no cumplen ninguna de las condiciones para ser rectilíneo o confinado a un plano. Este es el caso más complicado.

1.6. Integración del movimiento

Como hemos dicho, el objeto de la Cinemática es obtener el valor de la posición de un cuerpo una vez que se conoce su vector aceleración. Si ésta se conoce en función del tiempo, $\vec{a} = \vec{a}(t)$, la manera de hacerlo es invertir la Eq. 1.8, teniendo en cuenta para ello que la inversa de la derivada es la integral. De esta forma:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{a}(t), \quad (1.14)$$

e invirtiendo entonces la definición del vector velocidad (Eq. 1.6):

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{v}(t), \quad (1.15)$$

donde t_0 es el tiempo inicial, que muchas veces se toma como cero.

Es importante darse cuenta de que las Eqs. 1.14-1.15 son ecuaciones vectoriales y, por tanto, han de resolverse por componentes. Es decir, cada una de ellas consta de tres ecuaciones, y hay que realizar las integrales que en ella aparecen por separado.

EJEMPLO 1: Movimiento rectilíneo y uniforme

En este caso, la Eq. 1.14 se reduce a:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0, \quad (1.16)$$

ya que la integral definida de cero da cero. Usando ahora esta velocidad en la Eq. 1.15 tenemos que:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{v}_0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t dt v_{0x} = v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t dt v_{0y} = v_{0y}(t - t_0) \\ z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t dt v_{0z} = v_{0z}(t - t_0) \end{cases} \quad (1.17)$$

que puede reescribirse en forma vectorial como:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 (t - t_0). \quad (1.18)$$

Es conveniente pararse y reflexionar sobre el significado tridimensional de esta fórmula (ver Fig. 1.6(izqda.)), y compararla con la expresión obtenida en el caso de usar una formulación puramente escalar (ver Fig. 1.6(dcha.)):

$$s(t) = s(t_0) + v_0(t - t_0). \quad (1.19)$$

EJEMPLO 2: Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado

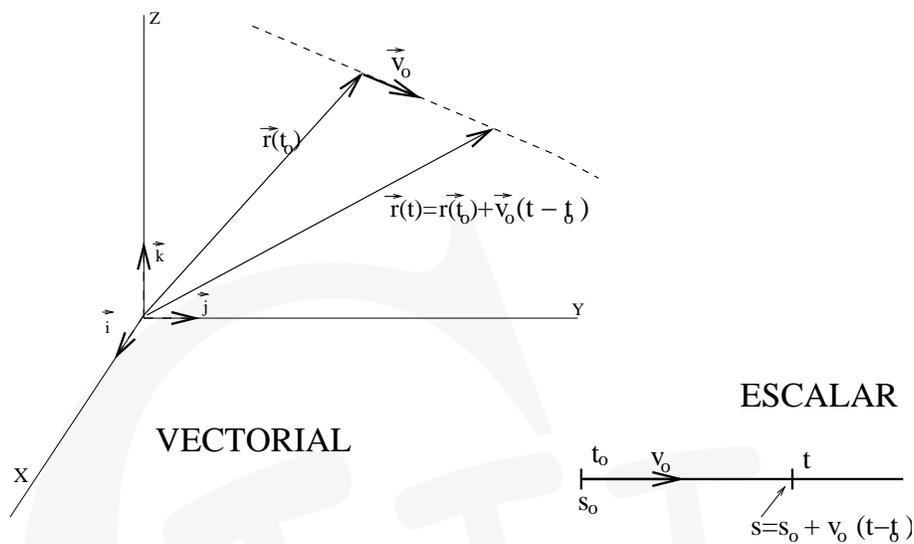


Figura 1.3: Movimiento rectilíneo uniforme: representación vectorial y escalar.

En este caso, la Eq. 1.14 se convierte en:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{a}_0 \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t dt a_{0x} = a_{0x}(t - t_0) \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^t dt a_{0y} = a_{0y}(t - t_0) \\ v_z(t) - v_z(t_0) = \int_{t_0}^t dt a_{0z} = a_{0z}(t - t_0) \end{cases} \quad (1.20)$$

que puede reescribirse en forma vectorial como:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0 (t - t_0). \quad (1.21)$$

Después, introducimos la velocidad recién obtenida en la Eq. 1.15:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t dt \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0 (t - t_0). \quad (1.22)$$

Volviendo a separarla en componentes, y calculando las integrales, se obtiene con facilidad que:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a}_0 \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad (1.23)$$

que es conveniente de nuevo comparar con el resultado obtenido utilizando la formulación escalar,

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2. \quad (1.24)$$

1.7. Simetrías

Como hemos visto, cualquier movimiento en el espacio tri-dimensional puede describirse mediante el formalismo vectorial cartesiano. Sin embargo, muchas veces, dicho movimiento está limitado a una región del espacio que tiene alguna peculiaridad geométrica que puede aprovecharse para simplificar su descripción. Estas peculiaridades son las llamadas **simetrías**. El concepto de **simetría** es uno de los más importantes en Física, y permitirá simplificar enormemente muchos problemas, no sólo relacionados con el movimiento de los cuerpos. En general, se dice que algo tiene **simetría bajo una determinada transformación geométrica** si dicha transformación deja al sistema invariante. Es decir, idéntico a como era antes de realizarla.

Las transformaciones más sencillas son dos:

1. TRASLACIONES A LO LARGO DE UN EJE: por ejemplo, consideremos un móvil que se mueve sobre una trayectoria recta. Claramente, la trayectoria es invariante bajo traslaciones a lo largo de sí misma, ya que si desplazamos una recta infinita cualquier distancia a lo largo de ella, no varía.
2. ROTACIONES ALREDEDOR DE UN EJE: el ejemplo típico sería una trayectoria circular. Claramente, si rotamos dicha trayectoria alrededor de un eje perpendicular al plano que la contiene y que pase por su centro, el círculo no varía.

Existen, sin embargo, simetrías más complejas. En concreto, comentaremos dos, ya que las utilizaremos con frecuencia (ver Fig. 1.7):

1. **Simetría cilíndrica**: se dice que algo tiene simetría cilíndrica si: 1) es invariante bajo **rotaciones alrededor de algún eje**, que se conoce como **eje de revolución** y 2) es invariante bajo **traslaciones a lo largo de dicho eje**. Por ejemplo, una trayectoria recta e infinita tiene simetría cilíndrica porque es invariante bajo rotaciones alrededor del eje que la contiene, y bajo traslaciones a lo largo de dicho eje.

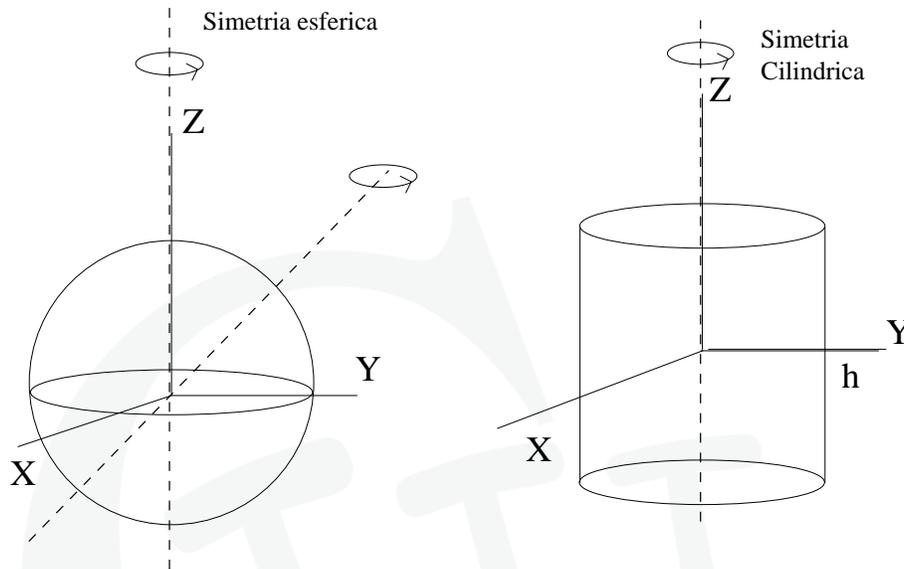


Figura 1.4: Simetría esférica (izqda) y cilíndrica (dcha).

De igual modo, si pensamos en un sólido con forma de cilindro infinito, éste es invariante bajo rotaciones alrededor del eje generatriz del cilindro y bajo traslaciones a lo largo del mismo eje.

2. **Simetría esférica:** Diremos que algo tiene **simetría esférica** si es invariante bajo rotaciones alrededor de **cualquier eje** que atraviese un punto, conocido como **centro**. Por ejemplo, éste es el caso de una esfera maciza, que es invariante bajo rotaciones alrededor de cualquier eje que pase por su centro. Lo mismo puede decirse de un sólido con forma de cascara esférica.

1.8. Movimiento con simetría de rotación en el plano: coordenadas polares

Una vez definido lo que entendemos por simetrías, es hora de entender porqué son importantes. Lo haremos con un ejemplo. Consideremos el caso de un móvil que se mueve en un plano dado sobre una trayectoria circular de radio R . Como dijimos antes, esta trayectoria tiene simetría de rotación alrededor de cualquier eje perpendicular al plano que pase por su centro. ¿Cómo puede utilizarse esta información para simplificar la descripción

de dicho movimiento? Muy sencillo, **cambiando de sistema de coordenadas!**

Si quisiéramos describir el movimiento del móvil sobre la circunferencia de radio R en coordenadas cartesianas, lo más que se puede hacer para simplificar la descripción es escoger los ejes X e Y en el plano que contiene al círculo, y el eje Z perpendicular a él. De esta manera, podemos ignorar la coordenada z del móvil, ya que no cambia nunca durante el movimiento. Por tanto, hemos reducido el problema a uno bi-dimensional. Pero eso va a ser lo más que vamos a poder simplificarlo en estas coordenadas.

Ahora bien, a nadie escapa que, si escogemos el origen del sistema de coordenadas en el centro del círculo, el movimiento del móvil ha de ser tal que:

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2, \quad (1.25)$$

de forma que x e y no son dos variables independientes. Realmente, sólo hay una que sea independiente. ¿Pero como nos podemos aprovechar de éste hecho?

1.8.1. Coordenadas polares

La manera de hacerlo es introducir **coordenadas polares** (ver Fig. 1.8.1), que son las coordenadas en las que se simplifican al máximo problemas con simetría de rotación. En estas coordenadas, la situación de un punto en el plano se caracteriza por la distancia del punto al origen, r , y por el ángulo que forma la línea que une al origen y al punto con la parte positiva del eje X (ver Fig. 1.7). Es fácil darse cuenta de que, para pasar de las coordenadas cartesianas (x, y) a las polares (r, θ) basta usar las transformaciones:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x), \end{cases} \quad (1.26)$$

mientras que el cambio inverso se obtiene sin más que proyectar r sobre los ejes X e Y :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta. \end{cases} \quad (1.27)$$

Ahora, es claro que, en el caso de nuestro móvil que se mueve sobre una circunferencia, la coordenada polar r permanece constante e igual al radio R de la circunferencia. Por ello, resolver su movimiento se reduce a encontrar $\theta(t)$; es decir, como cambia el ángulo

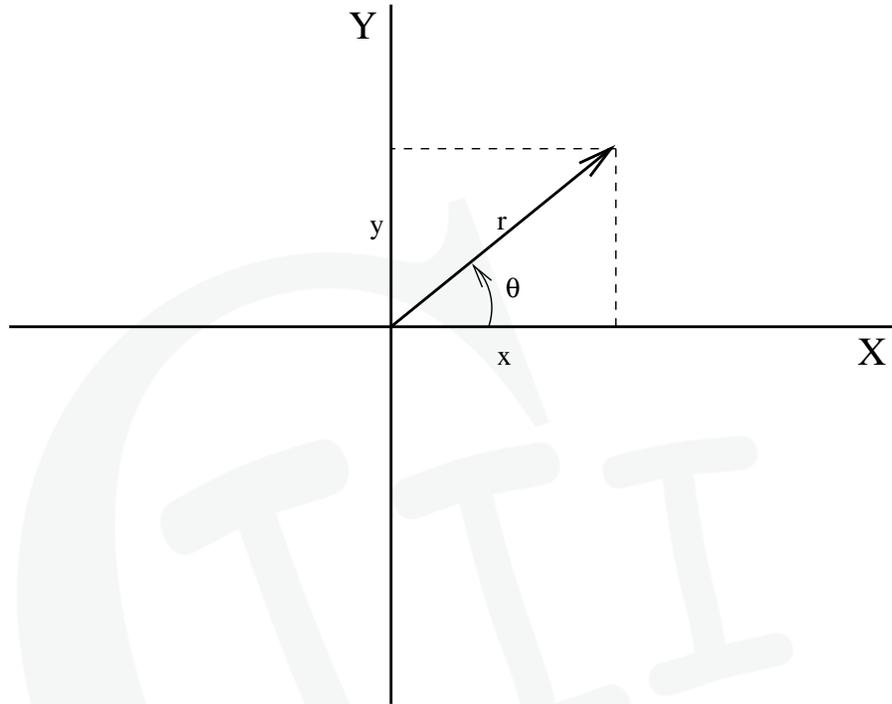


Figura 1.5: Coordenadas polares.

polar con el tiempo. Por lo tanto, hemos reducido el problema a uno unidimensional y, con ello, más sencillo.

La manera de proceder es ahora análoga a lo que hicimos antes. Del mismo modo que, en el caso del radio vector, fue necesario introducir el ritmo instantáneo de variación de la posición (el vector velocidad) y de la velocidad (el vector aceleración), ahora será conveniente introducir el ritmo instantáneo de variación del ángulo polar, que llamaremos **velocidad angular** ω , y el ritmo instantáneo de cambio de la velocidad angular, que llamaremos **aceleración angular**:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.28)$$

Es importante notar que estas cantidades son **escalares**, no vectores. También que, midiendo el ángulo θ en radianes (de forma que una vuelta completa a la circunferencia corresponde a un incremento en 2π del ángulo), ω se mide en rad/s, mientras que α en rad/s².

Antes de encontrar $\theta(t)$ para un par de casos sencillos, es conveniente ver como se relacionan estas cantidades con distancias, velocidades y aceleraciones. Para ello, basta con recordar que el arco recorrido sobre la circunferencia se relaciona con el ángulo (en radianes) a través del radio:

$$s = R \theta. \quad (1.29)$$

Por tanto, derivando la ecuación anterior encontramos que:

$$v_s = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega. \quad (1.30)$$

Es decir, la velocidad angular es proporcional al ritmo instantáneo de cambio del arco recorrido: la velocidad a la que se recorre el arco. Igualmente,

$$a_s = \frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha, \quad (1.31)$$

relaciona la aceleración angular α con el ritmo de variación de v_s : la aceleración a la que se recorre el arco, a_s .

Necesitaremos, sin embargo, esperar a que describamos el movimiento circular vectorialmente para entender como se relacionan v_s y a_s con los vectores velocidad y aceleración asociados a este tipo de movimiento. Pero antes, veamos la utilidad de las nuevas coordenadas en el caso de un movimiento con simetría de rotación en el plano.

EJEMPLO 3: Movimiento circular uniforme

El movimiento circular se llama uniforme si $\alpha = 0$, lo cual implica que $\omega(t) = \omega_0$, y permanece constante a lo largo del movimiento. Para encontrar $\theta(t)$ basta por tanto con invertir Eq. 1.28 para obtener:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t dt \omega_0 = \theta_0 + \omega_0(t - t_0). \quad (1.32)$$

La primera cosa a notar es que, al haber reducido el problema a uno unidimensional, la integral a realizar es escalar y, por tanto, mucho más sencilla. Además, el problema se ha convertido en uno formalmente idéntico al de un movimiento rectilíneo uniforme, pero con θ haciendo el papel del espacio recorrido s .

EJEMPLO 4: Movimiento circular uniformemente acelerado

El movimiento circular se llama uniformemente acelerado si $\alpha = \alpha_0$. Por lo tanto, podemos encontrar $\omega(t)$ sin más que invertir la segunda ecuación que aparece en la Eq. 1.28:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t dt \alpha_0 = \omega_0 + \alpha_0(t - t_0). \quad (1.33)$$

Luego, usando este resultado junto con la ecuación izquierda de la Eq. 1.28, podemos obtener $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t dt (\omega_0 + \alpha_0(t - t_0)) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\alpha_0}{2}(t - t_0)^2, \quad (1.34)$$

de nuevo formalmente idéntica al problema del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Para darse cuenta de la ventaja que ha supuesto, en el caso del movimiento circular, el utilizar coordenadas polares basta con intentar expresar la condición de velocidad angular constante en las coordenadas cartesianas (x, y) :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{d}{dy} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \frac{dy}{dt} + \frac{d}{dx} \left[\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \frac{dx}{dt} = \\ &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} v_y - \frac{y/x^2}{1 + (y/x)^2} v_x = \omega_0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena. Por lo tanto, la condición de velocidad angular constante se escribe de una manera muy complicada en términos de las componentes cartesianas de la velocidad:

$$x(t)v_y(t) - y(t)v_x(t) = \omega_0 (x(t)^2 + y(t)^2). \quad (1.36)$$

Esta ecuación es la que deberíamos de resolver, junto con:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2, \quad (1.37)$$

que garantiza que el movimiento se realiza sobre la circunferencia de radio R , para obtener la solución de nuestro problema. Es decir, calcular $x(t)$ e $y(t)$. Claramente, obtener $x(t)$ e $y(t)$ de las Eqs. 1.36-1.37 es mucho más complicado que lo que hicimos hace un momento. Este es el beneficio principal de usar un sistema de coordenadas que se aprovecha de las simetrías del problema.

1.8.2. Base de vectores en coordenadas polares

Es importante darse cuenta de que las coordenadas polares pueden también utilizarse para describir el movimiento en un plano incluso aunque no esté restringido a una circunferencia. En el fondo, no es más que utilizar un sistema de coordenadas diferente para describir lo mismo que antes describíamos usando coordenadas cartesianas. Pero nos hace falta algo más que las coordenadas (r, θ) . Recordemos que, en cartesianas, la posición de un cuerpo viene determinada por el radio vector:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (1.38)$$

donde \vec{i} and \vec{j} los vectores de la base cartesiana. En coordenadas polares necesitamos también una expresión vectorial. ¿Pero cuáles son los vectores de la base adecuada para describir el movimiento en polares?

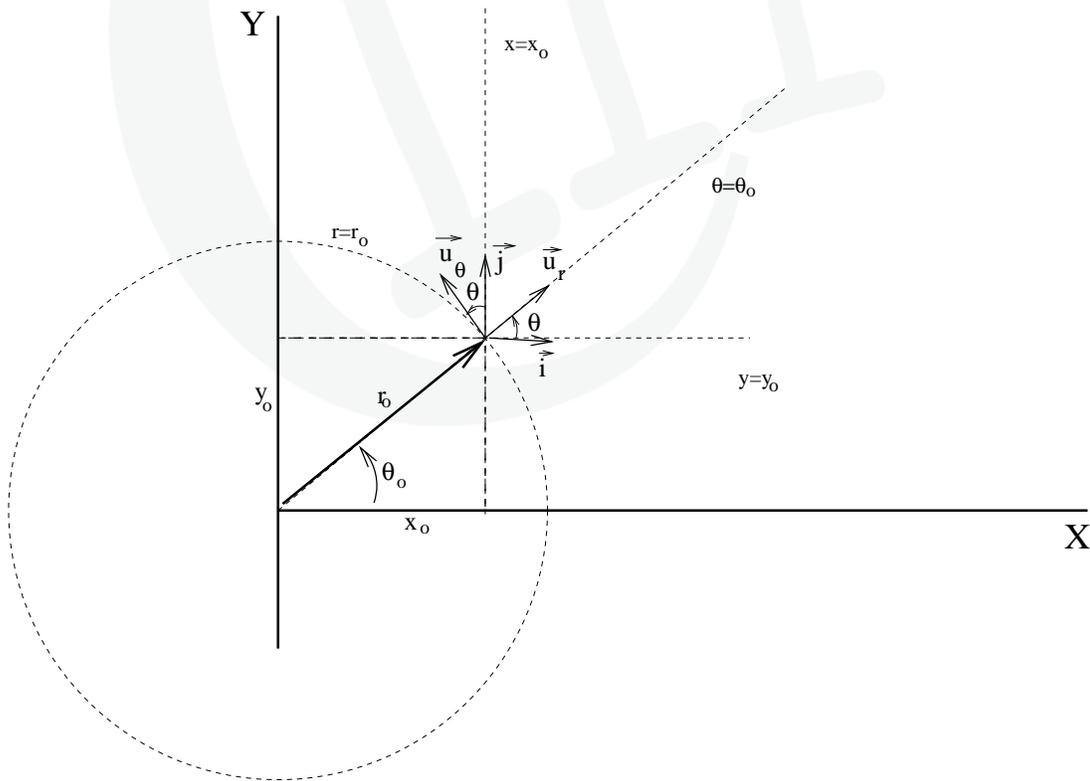


Figura 1.6: Definición de vectores de la base en coordenadas polares.

Veamos ahora un procedimiento general para encontrar estos vectores para cualquier sistema coordenado. Usaremos como ejemplo el caso cartesiano. La idea es la siguiente. Situémonos en un punto arbitrario del plano OXY , (x_0, y_0) . En él, el vector unitario de la base asociado a la coordenada y , \vec{j} , se escoge de forma que sea tangente a la curva $x = x_0$, donde x_0 es el valor de la coordenada x en ese punto (ver Fig. 1.8.2). El sentido del vector será aquel en el que crece la variable a la que esté asociado, y en este caso, que es hacia arriba. Claramente, el vector escogido es idéntico al vector \vec{j} que definimos al principio del tema. Igualmente, el vector \vec{i} , asociado a la coordenada x , se escogerá en cada punto tangente a la curva $y = y_0$, con y_0 la coordenada y del punto en cuestión. De nuevo, el vector así construido coincide con el vector \vec{i} que definimos previamente.

Evidentemente, en el caso cartesiano, se obtienen los mismos vectores en **todos los puntos del espacio**. Es por eso que se pueden introducir los vectores como dijimos, directamente en la dirección de los ejes OX y OY , respectivamente. Sin embargo, esto no sucede en casi ningún otro sistema coordenado. Veamos como sería en el caso de las coordenadas polares (r, θ) . Para ello, en un punto arbitrario (r_0, θ_0) , consideramos la curva $\theta = \theta_0$, que corresponde a la semirecta que parte del origen y pasa por dicho punto (ver Fig. 1.8.2). El vector unitario asociado a la coordenada r , \vec{u}_r , ha de escogerse tangente a dicha semirecta y, en la dirección en la que r crece. Por tanto, se trata de un vector que apunta radialmente hacia afuera en cada punto. En cuanto al vector asociado a la coordenada θ , \vec{u}_θ , será tangente a la curva $r = r_0$ que es la circunferencia que contiene al punto. Como hemos de cogerlo con sentido según la dirección en la que crece la coordenada a la que está asociado, θ , tendrá en cada punto la dirección indicada en la Fig. 1.8.2.

Claramente, tanto \vec{u}_r como \vec{u}_θ son distintos en cada punto, a diferencia de lo que pasaba con \vec{i} y \vec{j} . Por ello, es necesario determinarlos con la construcción geométrica que acabamos de esbozar. Para completar la transformación entre coordenadas polares y cartesianas, hemos por tanto de complementar las Eqs. 1.26, que relacionaban (x, y) con (r, θ) , con las que relacionan estas parejas de vectores. De la Fig. 1.8.2 es fácil obtener que:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \end{cases} \quad (1.39)$$

sin más que proyectar $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ sobre \vec{i}, \vec{j} , y a la inversa:

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta \vec{u}_r - \operatorname{sen}\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta \end{cases} \quad (1.40)$$

1.8.3. Descripción del movimiento plano en coordenadas polares

Una vez hecho esto, podemos calcular cómo se expresa el radio vector \vec{r} en coordenadas polares. Es suficiente con sustituir en la Eq. 1.38 aquellas fórmulas que expresan (x, y) en términos de (r, θ) y los vectores \vec{i}, \vec{j} en términos de $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cos\theta [\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta] + r \sin\theta [\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta] = r \vec{u}_r, \quad (1.41)$$

donde hemos usado la identidad $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. La bondad de este resultado es también evidente de la representación gráfica (ver Fig. 1.8.1). Claramente, \vec{r} y \vec{u}_r son paralelos en cada punto, y el módulo del primero es r . Por lo tanto, era el único resultado que tenía sentido.

Una vez conocida la forma del radio vector en polares, podemos proceder a calcular las otras dos cantidades cinéticamente relevantes en polares: los vectores velocidad y aceleración. El primero de ellos es la derivada temporal del vector posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}, \quad (1.42)$$

donde hemos tenido que tener en cuenta el que, en polares, los vectores de la base **SI** cambian con el tiempo, ya que son diferentes en cada punto de la trayectoria. Por lo tanto, para calcular el ritmo de cambio del vector posición, hay que tener en cuenta también el ritmo de cambio del vector \vec{u}_r . Matemáticamente, esta cantidad es la derivada de \vec{u}_r respecto al tiempo. ¿Cómo se calcula esta derivada? Nótese que necesitamos su valor expresado también en polares, ya que nuestro objetivo es calcular el vector derivada en polares. Es decir, en término de (r, θ) y los vectores de la base en polares. Para calcularla, haremos una pequeña trampa. Tendremos en cuenta la Eq. 1.39, que nos vuelve a llevar a cartesianas, de forma que:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} = \frac{d\theta}{dt} [-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}] = \dot{\theta} \vec{u}_\theta. \quad (1.43)$$

Para llegar a este resultado hemos aplicado la regla de la cadena:

$$df[g(x)]/dx = df/dg \cdot dg/dx, \quad (1.44)$$

y hemos utilizado la definición del vector \vec{u}_θ dado por la Eq. 1.26, para poder expresar el resultado en términos de cantidades asociadas a las coordenadas polares, como necesitábamos. Nótese también que hemos introducido la notación $\dot{\theta}$ para representar a $d\theta/dt$ [Ésta es una manera usual de representar derivadas temporales en Física.].

Por lo tanto, estamos ya en condiciones de encontrar el vector velocidad en polares, sin más que sustituir la derivada del vector \vec{u}_r dada por la Eq. 1.43 en la Eq. 1.42:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad (1.45)$$

donde al primer término se le llama **velocidad radial** y al segundo, **velocidad azimutal**.

Existen muchas maneras de interpretar esta expresión. Nosotros usaremos una que, además, da pistas acerca de cuando es conveniente usar coordenadas polares. Basta, para ello, darse cuenta de que cada uno de los términos de la velocidad en polares puede identificarse con el concepto de **movimiento fundamental**. Veamos que queremos decir. Es muy fácil darse cuenta de que el primer término, \dot{r} , es el único que no desaparece si escogemos $\dot{\theta} = 0$. Pero $\dot{\theta} = 0$ sólo si nos alejamos del origen según la dirección radial, manteniendo $\theta = \theta_0$ constante. Este es el primer **tipo de movimiento fundamental** asociado a las coordenadas polares: moverse según cualquier dirección radial.

El segundo tipo de movimiento fundamental es aquél para el cual sólo el segundo término es no nulo. Es decir, cuando $\dot{r} = 0$. Pero esto sólo sucede cuando nos movemos sobre una circunferencia, manteniendo $r = r_0$ constante. Luego el **segundo movimiento fundamental** asociado a las coordenadas polares es un movimiento circular.

Lo que la Eq. 1.45 dice es que, en polares, cualquier movimiento en el plano se puede separar en dos partes, un desplazamiento radial y un movimiento circular. Esto no parece ayudar mucho. Pero si nos enfrentamos a un problema en el que el móvil se mueva de tal forma que una de estas partes sea cero, podremos resolverlo de forma mucho más sencilla si lo describimos usando coordenadas polares. Por ejemplo, si el móvil se desplaza sobre un círculo, la parte del movimiento asociada al desplazamiento radial es nula si se escribe en coordenadas polares. Por eso, las coordenadas polares son las más útiles para resolver problemas de rotación en un plano.

Para obtener ahora la expresión de la aceleración en polares seguiremos el mismo camino: derivaremos la Eq. 1.45 respecto al tiempo. Nótese que ahora necesitamos también la derivada del vector \vec{u}_θ respecto al tiempo. Siguiendo el mismo camino que antes, es muy sencillo mostrar que:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} [\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}] = -\dot{\theta} \vec{u}_r. \quad (1.46)$$

Haciendo uso de ello y de la Eq. 1.41, la aceleración en polares resulta:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dr} + \dot{r}\dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \\
 &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta,
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

que se compone, al igual que la velocidad, de **aceleración radial** y **azimutal**.

¿Qué significan cada uno de los términos que aparecen en la Eq.1.47? Bueno, pues claramente tienen que estar relacionados con los tipos de movimiento fundamental que introdujimos al discutir la expresión de la velocidad en polares. Para verlo, cojamos el primer tipo fundamental de movimiento en polares, que correspondía a desplazarse en la dirección radial. Esto implicaba que $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, ya que el ángulo tiene que permanecer constante y, por lo tanto, el único término que pervive en la Eq. 1.47 es $\ddot{r}\vec{u}_r$. Por lo tanto, $\ddot{r}\vec{u}_r$ nos da la aceleración con la que nos movemos a lo largo del radio.

Cojamos ahora el segundo tipo de movimiento fundamental, el movimiento circular. En él se cumple que $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ y, por tanto, solo nos quedan los términos $-r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ y $r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ en la Eq. 1.47. ¿A qué corresponde cada uno? Bueno, $-r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ es claramente la aceleración centrípeta asociada al movimiento circular. Para verlo basta con recordar que definimos la velocidad angular como $\omega = \dot{\theta}$ y que la velocidad lineal y angular se relacionan por $v_s = \omega r$, como vimos al resolver en movimiento circular uniforme. Usando estas relaciones, podemos reescribir $-r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ como $-(v_s^2/r) \vec{u}_r$, que nos debería ser más familiar. En cuanto a $r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$, es la aceleración angular, $a_s = r\alpha = r\ddot{\theta}$ que definimos también anteriormente (ver Sec. 1.8.1).

El término que falta, $2\dot{r}\dot{\theta} \vec{u}_\theta$, es un poco más especial ya que es nulo para los dos tipos de movimientos fundamentales. Es necesario que tanto \dot{r} como $\dot{\theta}$ sean diferentes de cero para que no se anule y, por tanto, sólo aparece en movimientos que sean una combinación de ambos tipos. Se le suele llamar **aceleración de Coriolis**. Nosotros, sin embargo, apenas lo usaremos.

1.9. Coordenadas cilíndricas

En el caso de que el movimiento tenga lugar en el espacio tridimensional, las cosas se complican notablemente. No existe una receta bien definida sobre como afrontar el problema en el caso general, pero sí cuando existe simetría cilíndrica o esférica. En el primer

caso es recomendable utilizar **coordenadas cilíndricas** (ver Fig. 1.9). Para entender como se construyen, lo mejor es recordar que simetría cilíndrica respecto a un eje implica:

1. simetría de traslación respecto a ese eje y,
2. simetría de rotación alrededor de ese eje.

Nótese que, por tanto, si nos restringimos a cualquier plano perpendicular al eje, la simetría es idéntica a la que antes nos hacía escoger coordenadas polares para simplificar los problemas. Por eso, las coordenadas cilíndricas pueden entenderse como la versión tridimensional de las polares, ya que mantienen la coordenada z cartesiana a lo largo del eje, y utilizan coordenadas polares (r, θ) en el plano perpendicular a éste (ver Fig. 1.9).

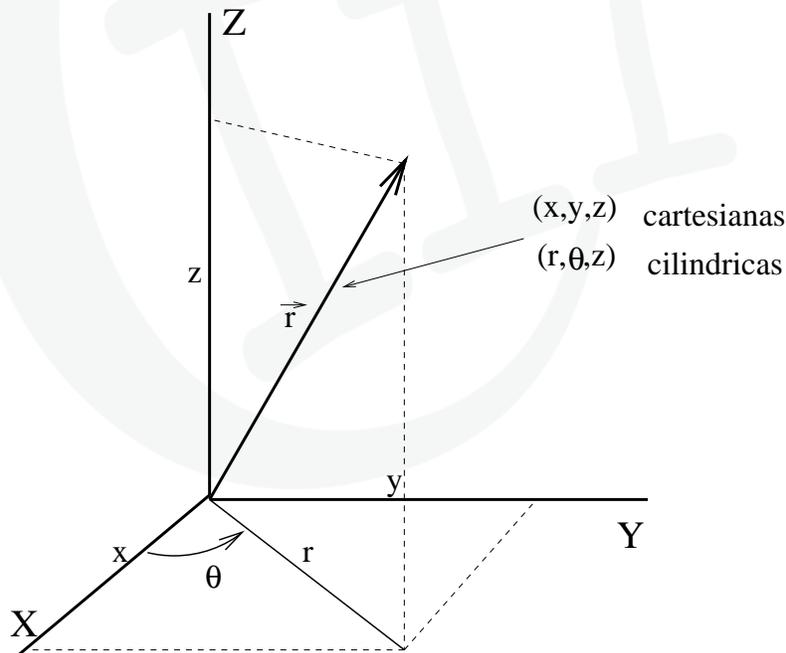


Figura 1.7: Coordenadas cilíndricas.

Usando la Fig. 1.9 no es difícil darse cuenta de que las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se relacionan con las cartesianas mediante:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x), \quad z = z, \quad (1.48)$$

y el cambio inverso viene dado por:

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad z = z. \quad (1.49)$$

Volvemos, sin embargo, a tener el mismo problema que en coordenadas polares. Recordemos que, en tres dimensiones, el radio vector se expresa en cartesianas como:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (1.50)$$

Y sabemos cómo convertir (x, y, z) en (r, θ, z) . ¿Pero cuáles son los vectores de la base en cilíndricas? Sin ellos, no podremos encontrar lo que vale el radio vector en estas coordenadas. La manera de calcularlos es similar a la que ya empleamos en el caso polar. Entonces, los escogimos tangentes a las curvas obtenidas al mantener la otra coordenada constante. Por ejemplo, \vec{u}_r era tangente a $\theta = \theta_0$, y por eso salía radialmente hacia afuera. Sin embargo, ahora no estamos en el plano, sino en el espacio, con lo que tenemos otras dos coordenadas, θ y z , a considerar a la hora de obtener \vec{u}_r . ¿Qué se hace? Muy sencillo. Veamos, por ejemplo, como se escoge \vec{u}_r . Ahora, $\theta = \theta_0$ no es una curva, sino una superficie: es un semiplano anclado en el eje OZ (ver Fig. 1.9). Igualmente, $z = z_0$ es un plano, paralelo al plano OXY . Bueno, pues escogeremos \vec{u}_r como un vector unitario que sea tangente a la intersección de las superficies $\theta = \theta_0$ y $z = z_0$: la semirrecta que, contenida en un plano de z constante, se extiende radialmente hacia infinito (ver Fig. 1.9). Y sobre esta semirrecta, en el sentido en el que crece la r : alejándose del origen.

Esta receta geométrica da la manera de calcular los vectores de la base de cualquier sistema de coordenadas. Basta escoger el vector unitario asociado a una coordenada en cualquier punto, tangente a la intersección de las dos superficies definidas manteniendo las otras dos coordenadas constantes, con el valor que tienen en dicho punto [Es un buen ejercicio ver como esto funciona en coordenadas cartesianas, y obtener así los vectores \vec{i} , \vec{j} y \vec{k}]. Aplicándolo ahora al caso de \vec{u}_θ , la superficie $z = z_0$ es el mismo plano que antes, mientras que $r = r_0$ es un cilindro infinito de radio r_0 que tiene por eje el eje OZ . La intersección de ambos es una circunferencia, contenida en el plano $z = z_0$ que pasa por nuestro punto. Así, el vector \vec{u}_θ se escoge tangente a dicha circunferencia (ver Fig. 1.9), y en el sentido en el que crece θ .

Finalmente, en cuanto al vector \vec{u}_z , hay que cogerlo tangente a las superficies $r = r_0$, el cilindro antes mencionado, y $\theta = \theta_0$, el semiplano que pasa por el punto y está anclado en el eje OZ (ver Fig. 1.9). Su intersección es una recta vertical y, por tanto, el vector \vec{u}_z es también vertical, apuntando en la dirección en la que crece la coordenada z .

Una vez encontrados los vectores, nos damos cuenta de que el vector \vec{u}_z coincide con el \vec{k} cartesiano, y que los vectores \vec{u}_r y \vec{u}_θ son idénticos a los que antes encontramos para

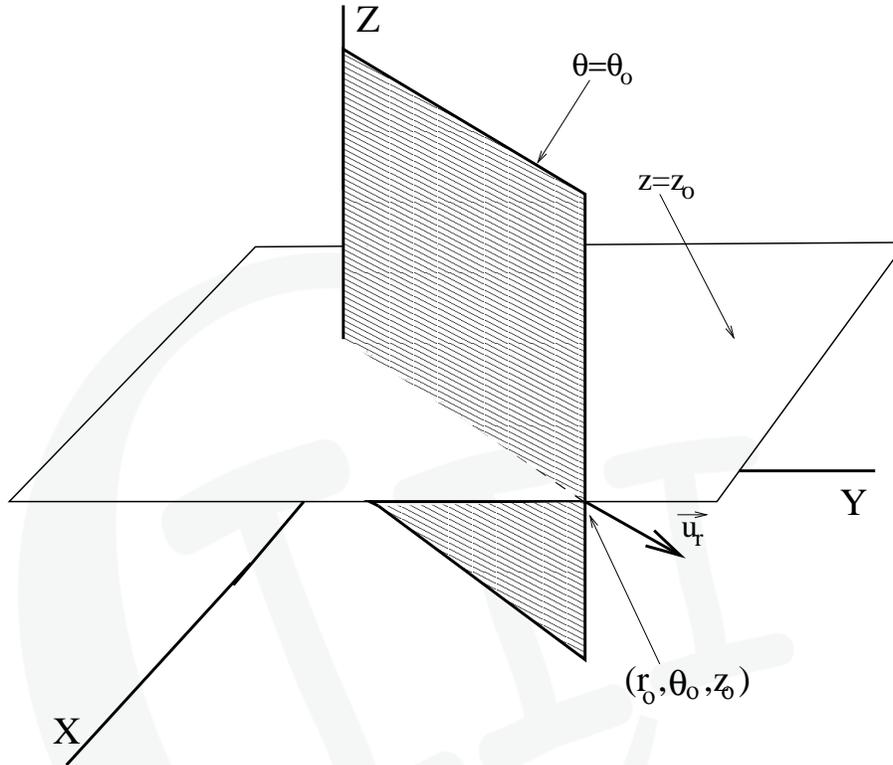


Figura 1.8: Construcción gráfica del vector \vec{u}_r en coordenadas cilíndricas.

las coordenadas polares, si nos restringimos al plano $z = z_0$. Por ello, es fácil darse cuenta de que se cumple que:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases} \quad (1.51)$$

y a la inversa,

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{k} = \vec{u}_z \end{cases} \quad (1.52)$$

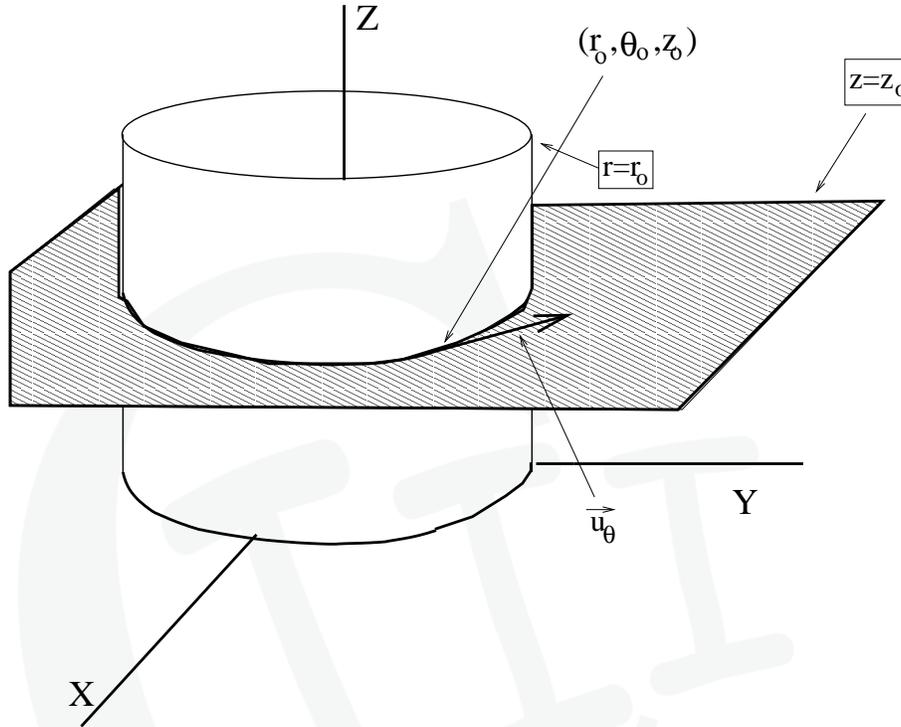


Figura 1.9: Construcción gráfica del vector \vec{u}_θ en coordenadas cilíndricas.

1.9.1. Descripción del movimiento tridimensional en cilíndricas

Ya estamos en disposición de calcular el radio vector en cilíndricas. Basta, para ello, con sustituir en la Eq. 1.50 las cantidades cartesianas en términos de las nuevas usando para ello las Eqs. 1.49-1.52:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = r \cos\theta (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) + \\ &+ r \sin\theta (\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta) + z \vec{u}_z = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z. \end{aligned} \quad (1.53)$$

De nuevo, es conveniente comprobar geoméricamente que éste es el único resultado que tiene sentido (ver Fig. 1.9).

Para seguir, vamos a calcular la expresión de la velocidad en cilíndricas. De nuevo, al derivar el radio vector, tenemos que tener en cuenta que los vectores \vec{u}_r y \vec{u}_θ de la base

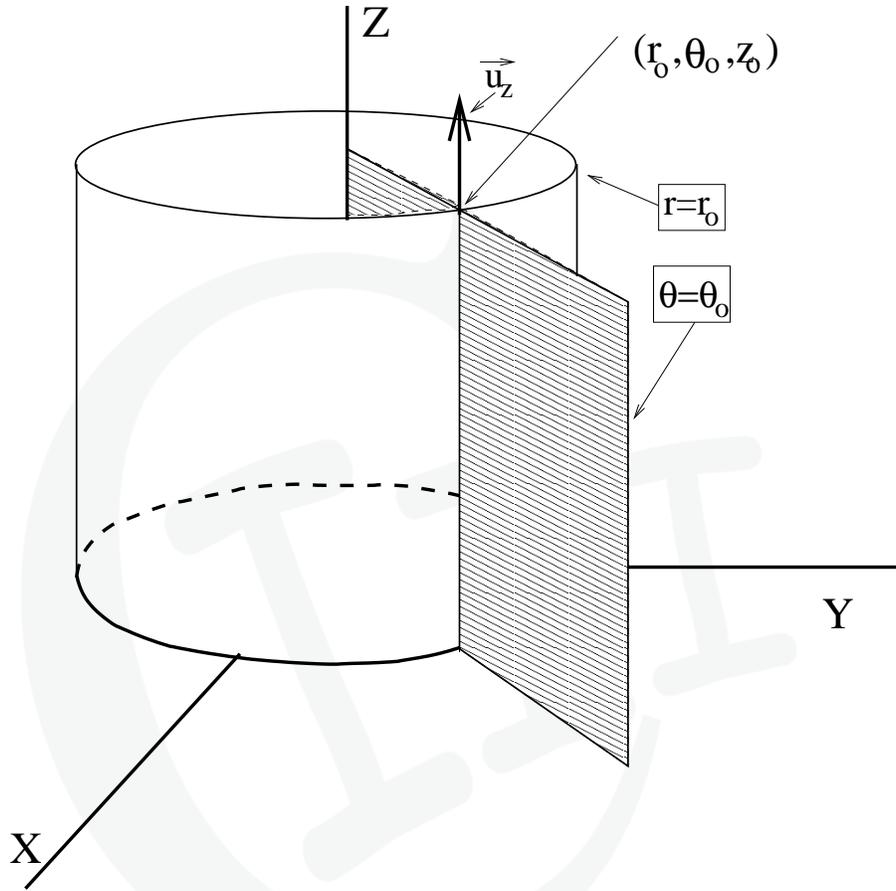


Figura 1.10: Construcción gráfica del vector \vec{u}_z en coordenadas cilíndricas.

cilíndrica cambian de punto a punto. Derivando Eq. 1.53 tenemos entonces que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad (1.54)$$

Pero recordando que, el vector \vec{u}_r equivale al vector radial en polares, su derivada es idéntica a la que obtuvimos entonces (ver Eq. 1.43), así que tendremos:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z. \quad (1.55)$$

Nótese que las tres componentes de la velocidad son muy sencillas de interpretar usando de nuevo el concepto de tipo de movimiento fundamental. En cilíndricas tendremos tres.

Primero, si elegimos $\dot{\theta} = \dot{z} = 0$ solo nos queda la primera (radial) componente de la velocidad. El movimiento será entonces un **desplazamiento en la dirección radial**.

Segundo, si escogemos $\dot{r} = \dot{z} = 0$, sólo queda la segunda (azimutal) componente de la velocidad. El movimiento corresponde a **desplazarse sobre una circunferencia contenida en un plano de z constante**.

Y tercero, si escogemos $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ sólo queda la tercera (vertical) componente de la velocidad. El movimiento es, entonces, un **desplazamiento rectilíneo en la dirección de las z 's**.

Por tanto, usando una descripción en cilíndricas, se escribe el movimiento como combinación de estos tres tipos de movimiento fundamentales. ¿Cuándo serán entonces útiles estas coordenadas? Cuando el movimiento que queramos describir sea tal que alguna o algunas de estas contribuciones se anule. Por ejemplo, si tenemos un móvil moviéndose encima de la superficie de un cilindro. En ese caso, la componente radial del movimiento se anula en cilíndricas, lo que reduce un problema tridimensional a uno bidimensional.

En lo que se refiere a la aceleración, derivando la Eq. 1.55 obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{u}_z, \quad (1.56)$$

donde hemos aplicado de nuevo la regla de la cadena. Usando las Eqs. 1.43-1.46, para las derivadas de los vectores de la base, se llega fácilmente a:

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right] \vec{u}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right] \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z. \quad (1.57)$$

No vamos a gastar muchas letras en describir los distintos términos, ya que el único nuevo respecto a los que obtuvimos en polares es el último, \ddot{z} , que es el asociado al tipo fundamental de movimiento en la dirección vertical. El resto, tienen la misma interpretación que dimos entonces.

1.10. Coordenadas esféricas

El último caso tridimensional que vamos a discutir es el de las coordenadas esféricas. Por supuesto, estas coordenadas suelen ser útiles cuando el movimiento discurre sobre una superficie con simetría esférica, como es el caso de una esfera. En ese caso, pasando a coordenadas esféricas, se reduce un problema tri-dimensional a bi-dimensional, ya que de nuevo tendremos que r permanecerá constante e igual al radio de la esfera.

Las coordenadas esféricas constan de una distancia y dos ángulos (ver Fig. 1.10). La distancia es la del punto en cuestión al origen de coordenadas. Nótese que fijar r implica que el punto esté en algún lugar de una esfera de radio r centrada en el origen. Para situarnos en esa esfera se eligen dos ángulos, θ y ϕ , que corresponden a la **latitud** y la **longitud**, respectivamente.

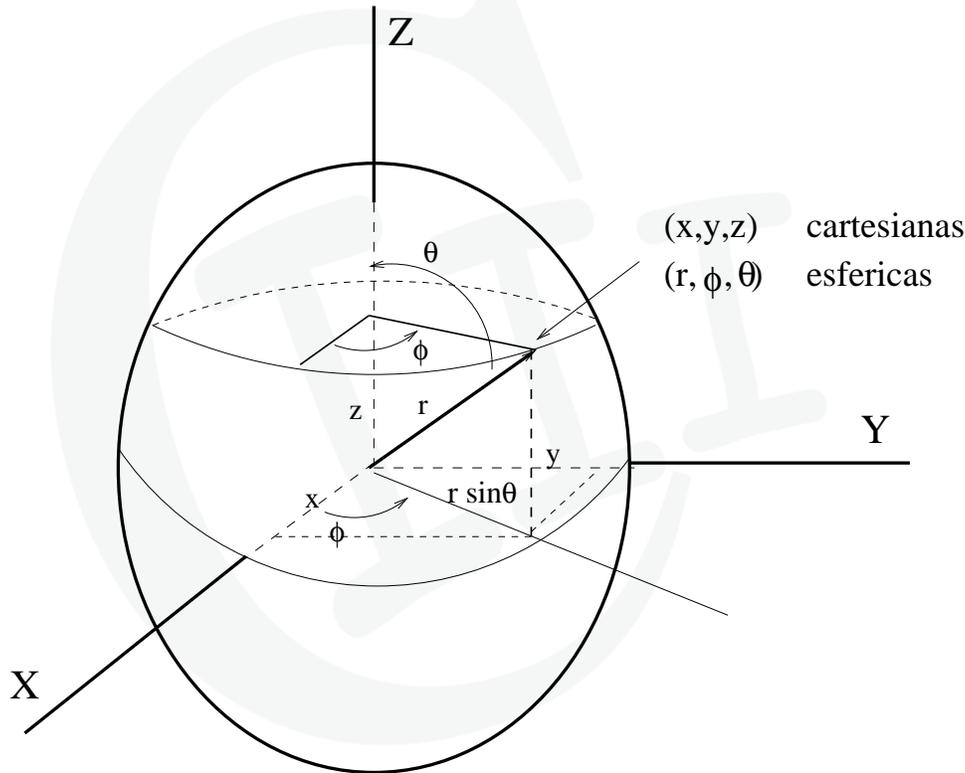


Figura 1.11: Coordenadas esféricas.

Utilizando la geometría del dibujo, no es difícil darse cuenta de que es posible relacionar las coordenadas esféricas con las cartesianas mediante:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad (1.58)$$

y el cambio inverso viene dado por:

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta. \quad (1.59)$$

esfera, y el vector \vec{u}_ϕ será por tanto tangente a él, y dirigido en la dirección de crecimiento de ϕ (ver Fig. 1.10). Finalmente, el vector \vec{u}_r ha de ser tangente a la intersección entre el cono y el semiplano, que no es sino la generatriz del cono que pasa por el punto P , por lo que \vec{u}_r está dirigido en la dirección radial (ver Fig. 1.10).

Obtener las relaciones que conectan a estos vectores con la base cartesiana es un buen ejercicio de visión espacial. El resultado es:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\phi \sin\theta \vec{i} + \sin\phi \sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \\ \vec{u}_\phi = -\sin\phi \vec{i} + \cos\phi \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = \cos\phi \cos\theta \vec{i} + \sin\phi \cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \end{cases} \quad (1.60)$$

Y la relación inversa viene dada por:

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\phi \sin\theta \vec{u}_r - \sin\phi \vec{u}_\phi + \cos\theta \cos\phi \vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \sin\phi \sin\theta \vec{u}_r + \cos\phi \vec{u}_\phi + \cos\theta \sin\phi \vec{u}_\theta \\ \vec{k} = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta \end{cases} \quad (1.61)$$

1.10.1. Descripción del movimiento tridimensional en esféricas

Una vez sabemos las relaciones entre coordenadas y vectores, podemos obtener la expresión del radio vector en esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \sin\theta \cos\phi [\cos\phi \sin\theta \vec{u}_r - \sin\phi \vec{u}_\phi + \cos\theta \cos\phi \vec{u}_\theta] + \\ &+ r \sin\theta \sin\phi [\sin\phi \sin\theta \vec{u}_r + \cos\phi \vec{u}_\phi + \cos\theta \sin\phi \vec{u}_\theta] + \\ &+ r \cos\theta [\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta] = r\vec{u}_r, \end{aligned} \quad (1.62)$$

usando para ello las identidades $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$.

Pasemos ahora a calcular la expresión de la velocidad en esféricas. Nótese que TODOS los vectores de la base asociada a las coordenadas esféricas dependen ahora del punto. Por ello, habrá que derivar todos los vectores respecto al tiempo siempre que sea necesario. En concreto, en el caso de la velocidad necesitaremos la derivada de \vec{u}_r , que viene dada

por (usando Eq. 1.60):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \left[-\dot{\phi} \sin\phi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\phi \cos\theta \right] \vec{i} + \left[\dot{\phi} \cos\phi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\phi \cos\theta \right] \vec{j} - \dot{\theta} \sin\theta \vec{k} = \\
 &= \dot{\phi} \sin\theta \left[-\sin\phi \vec{i} + \cos\phi \vec{j} \right] + \dot{\theta} \left[\cos\phi \cos\theta \vec{i} + \sin\phi \cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \right] = \\
 &= \dot{\phi} \sin\theta \vec{u}_\phi + \dot{\theta} \vec{u}_\theta.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Usando este resultado, es fácil ver que el vector velocidad en esféricas viene dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\phi} \sin\theta \vec{u}_\phi. \tag{1.64}$$

La interpretación es de nuevo fácil si utilizamos el concepto de **tipo de movimiento fundamental**. Primero, para que sólo permanezca el primer término de la velocidad, es necesario hacer $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. Este movimiento corresponde a un **desplazamiento en la dirección radial**, aunque nótese que la dirección radial en esféricas es diferente de la dirección radial en cilíndricas.

Segundo, para que sólo quede el segundo término de la velocidad, hacemos $\dot{r} = \dot{\phi} = 0$. Esto corresponde a **moverse sobre un meridiano**, ya que sólo θ cambia. Nótese que el radio de este movimiento **circular** es r .

Finalmente, para que sólo quede la tercera componente de la velocidad hay que hacer $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$, lo que corresponde a **moverse sobre un paralelo**, ya que sólo ϕ cambia. Este es de nuevo un movimiento circular, pero de radio $r \sin\theta$ y en el plano horizontal.

De nuevo, cuando se expresa el movimiento en esféricas, vemos que puede escribirse como combinación de tres movimientos, uno rectilíneo y dos circulares, uno según un paralelo y otro según un meridiano. ¿Cuándo deberemos utilizar estas coordenadas? Cuando el movimiento sea tal que una o varias de estas componentes se anule. Por ejemplo, si el móvil se desplaza sobre la superficie de una esfera, de modo que la componente rectilínea desaparece si se describe el movimiento en esféricas. Así, el problema tridimensional se reduce a bidimensional.

El cálculo de la aceleración en esféricas es algebraicamente más comprometido, ya que

tendremos que derivar también los vectores \vec{u}_θ y \vec{u}_ϕ :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = & \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta \vec{u}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta \vec{u}_\phi + \\ & + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \vec{u}_\phi + r\dot{\phi} \sin\theta \frac{d\vec{u}_\phi}{dt}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Para calcular las derivadas de los vectores de la base usaremos la Eq. 1.60 de forma totalmente análoga al caso de \vec{u}_r , que ya calculamos antes. Tras un poco de álgebra se llega a que:

$$\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin\theta \vec{u}_r - \dot{\phi} \cos\theta \vec{u}_\theta, \quad (1.66)$$

y,

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\phi} \cos\theta \vec{u}_\phi. \quad (1.67)$$

Y sustituyendo todas estas ecuaciones en la expresión de la aceleración se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta \right] \vec{u}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \right] \vec{u}_\theta + \\ & + \left[2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta \right] \vec{u}_\phi, \end{aligned} \quad (1.68)$$

que nos da la expresión final de la aceleración en esféricas. La interpretación del significado de cada uno de los términos es ahora un poco más liosa, pero la haremos viendo que términos sobreviven para cada uno de los tipos fundamentales de movimiento que vimos antes. En el caso del primero, **el desplazamiento en la dirección radial** requiere que $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. Por lo tanto el único que queda es \ddot{r} , que representa la aceleración en la dirección radial.

Cuando nos movemos según el segundo tipo de movimiento, **el movimiento circular a lo largo de un meridiano**, tenemos que $\ddot{r} = \dot{r} = \dot{\phi} = 0$. Los únicos términos no nulos en la Eq. 1.68 son $-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ y $r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. El primero corresponde a la aceleración centrípeta de este movimiento circular (recordar que el radio de un meridiano es r) y el segundo, a la aceleración angular.

En el caso del tercer movimiento fundamental, **el movimiento circular a lo largo**

de un meridiano, tenemos que $\ddot{r} = \dot{r} = \dot{\theta} = 0$. Los términos que no se anulan son:

$$\begin{aligned} & -[(r\sin\theta)\dot{\phi}] \cdot \sin\theta \vec{u}_r, \\ & -[(r\sin\theta)\dot{\phi}] \cdot \cos\theta \vec{u}_\theta, \\ & (r\sin\theta)\ddot{\phi} \vec{u}_\phi. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Para interpretarlos, hay que recordar que el radio de un paralelo es $r\sin\theta$. Por eso, los dos primeros términos corresponden a la aceleración centrípeta asociada al giro alrededor del paralelo, y el tercero a la aceleración angular de dicho movimiento. El motivo de que la aceleración centrípeta aparezca en dos trozos es que, como sabemos, tiene que estar dirigida hacia el centro del paralelo. Pero esa dirección no coincide ni con \vec{u}_r ni \vec{u}_θ . Y por ello, hay que proyectarla sobre esos dos vectores.

En cuanto al resto de términos, obsérvese que son siempre nulos para los tipos de movimiento fundamental. Por ello, son de naturaleza parecida a la aceleración de Coriolis que ya vimos en el caso cilíndrico, y aparecen sólo en los movimientos que sean combinación de al menos dos movimientos fundamentales.

1.11. Componentes intrínsecas de la aceleración

Hemos visto que en el caso del movimiento más general, la expresión de la velocidad y la aceleración puede tornarse harto complicada. Sin embargo hay algo que nunca ha de perderse de vista: **el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria** (ver Fig. 1.3). Por ello, si cogemos un vector \vec{u}_t tangente a la trayectoria en cada punto, siempre se puede escribir:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t, \tag{1.70}$$

donde $v = |\vec{v}|$. Ahora bien, derivando esta expresión se obtiene que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}. \tag{1.71}$$

Al primero de estos sumandos se le llama **aceleración tangente**, \vec{a}_t , y es un vector paralelo al vector velocidad, y que da cuenta de los cambios en el módulo de la velocidad. Así, por ejemplo, en cualquiera de los movimientos uniformes que definimos antes es igual a cero.

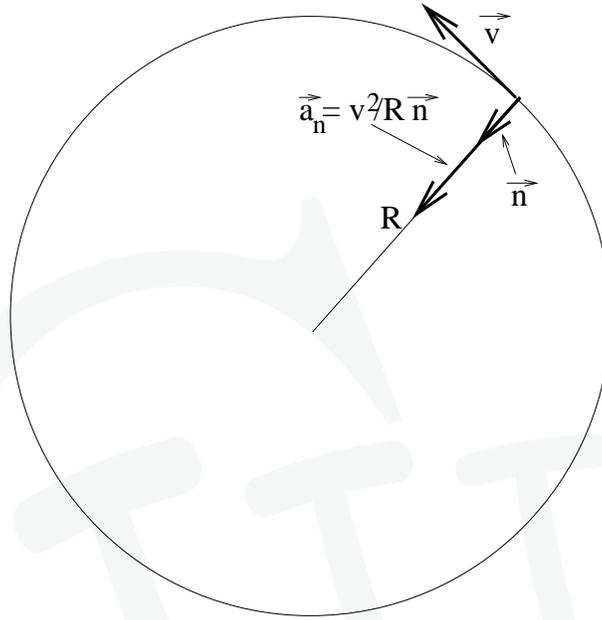


Figura 1.13: Aceleración normal en el caso de movimiento circular.

El segundo sumando es lo que se llama **aceleración normal**, \vec{a}_n . Utilizando resultados de geometría analítica que no vamos a ver aquí, es fácil ver que se puede reescribir como:

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}, \quad (1.72)$$

donde \vec{n} se llama el **vector normal**, y ρ es lo que se llama **radio de curvatura de la trayectoria**. Nótese que el vector \vec{n} es siempre perpendicular a \vec{u}_t .

La interpretación geométrica de estas dos cantidades es especialmente sencilla en el caso del movimiento plano. Imaginemos para ello, un movimiento puramente circular. En ese caso, \vec{n} no es más que un vector unitario dirigido hacia el centro del círculo en la dirección radial, mientras que ρ es igual al radio del círculo (ver Fig. 1.10.1). Es por ello que se dice que, en el caso del movimiento circular, $a_n = v^2/R$. En el caso de un movimiento plano más general, el símil es fácil de visualizar. Basta con suponer que, las cercanías del punto donde está nuestro móvil pueden aproximarse como parte de una circunferencia de un cierto radio (ver Fig. 1.11). Dicho radio sería el valor de ρ en ese punto, y \vec{n} sería el vector unitario que apunta el centro del círculo en la dirección radial. Al moverse a otro punto de la trayectoria, habrá que aproximar con una circunferencia

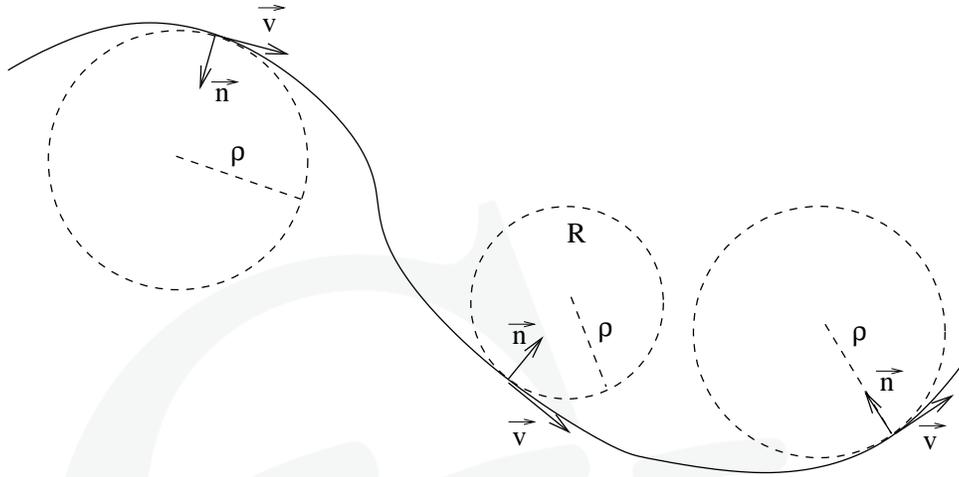


Figura 1.14: Aceleración normal en el caso de movimiento plano.

diferente, lo que hace que el radio de curvatura de la trayectoria sea una función del punto.

Como último comentario, fijaros que la Eq. 1.71 implica que:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.73)$$

Capítulo 2

DINÁMICA

En el tema de Cinemática tratamos de desarrollar algunas técnicas que nos permitieran describir el movimiento de una partícula, y vimos como para ello era necesario introducir los vectores velocidad y aceleración. Sin embargo, ya entonces dijimos que no iba a hacer falta introducir cantidades vectoriales adicionales para describir el ritmo de cambio de la aceleración. El motivo es que a partir de las leyes de Newton vamos a poder relacionar las fuerzas que conocemos experimentalmente con la aceleración a que se ve sometido un cuerpo. De esta forma, la Dinámica, que es la parte que nos va a enseñar a identificar las fuerzas y a encontrar la aceleración que producen, completa el estudio del movimiento de una partícula.

2.1. Fuerzas. Generalidades.

Todo el mundo tiene una idea intuitiva de lo que es una fuerza. Se realiza una fuerza cuando se empuja una mesa para moverla, o se tira de un carro para que se desplace o cuando se levanta una caja del suelo. En Física, las fuerzas se utilizan para describir la **interacción entre dos o más cuerpos**. De los ejemplos anteriores, es claro que la fuerza es una **magnitud vectorial**, ya que no sólo es necesario especificar su magnitud sino también su dirección y sentido. Por ello, se representa por un vector o un campo vectorial.

Existen cuatro tipos de fuerzas fundamentales en la naturaleza:

1. **Gravitatoria**: que describe la interacción entre *cuerpos con masa*;
2. **Electromagnética**, que describe la interacción entre *cuerpos con carga eléctrica*;

3. **Débil**, responsable de procesos de *desintegración espontánea* de núcleos atómicos;
4. **Fuerte**, responsable de *mantener el núcleo atómico cohesionado*, a pesar de la repulsión electrostática entre los protones positivos.

Todas las fuerzas que experimentamos en la naturaleza provienen de estas cuatro. Así, por ejemplo, tanto la fuerza *normal* como la fuerza de *rozamiento*, por poner dos casos bien conocidos, son resultado de la *interacción electromagnética entre los átomos que forman los cuerpos que se ponen en contacto*. Por ello, se les llama **fuerzas de contacto**.

2.2. Leyes de Newton y Principio de Superposición

Las leyes que van a permitirnos relacionar las fuerzas con el cambio de movimiento que causan en un cuerpo son conocidas con las **leyes de Newton**. En concreto, son tres:

1. **Ley de la Inercia**: El movimiento de un cuerpo sólo se ve alterado si actúa sobre él una fuerza. En caso contrario, el cuerpo mantiene su movimiento rectilíneo y su velocidad constante.
2. Si sobre el cuerpo actúa una fuerza, aparecerá sobre él una aceleración con idéntica dirección y sentido que ésta. La constante de proporcionalidad se llama **masa inercial**:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.1)$$

y mide la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento. Así, un cuerpo con *más masa*, experimenta una aceleración menor bajo la misma fuerza ¹.

3. **Principio de acción y reacción**: Si un cuerpo hace una fuerza sobre un segundo, recibe a su vez de éste una segunda fuerza idéntica a la primera en módulo y dirección, pero de sentido contrario:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (2.2)$$

¹Fijaros que si suponemos que la fuerza es cero, se encuentra que $\vec{a} = 0$ y por tanto, que la velocidad del cuerpo se mantiene constante. Es decir, la primera ley se recupera de la segunda bajo la hipótesis de ausencia de fuerzas.

2.3. Principio de Superposición

Estas leyes se completan con el **Principio de Superposición**. Éste nos dice que si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, la aceleración que adquiere el móvil es idéntica a la que causaría una única fuerza, que se llama **resultante**, y que se obtiene de sumar vectorialmente las fuerzas individuales:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.3)$$

con $\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ siendo la fuerza resultante.

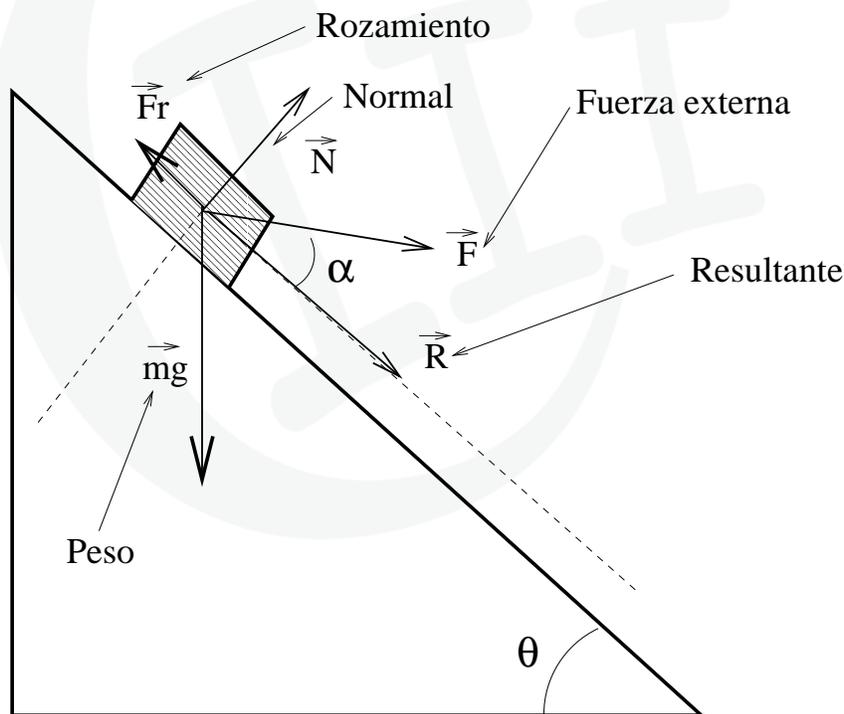


Figura 2.1: Ejemplo de composición de fuerzas. Fuerza externa, normal, peso y rozamiento en un plano inclinado.

2.4. Fuerza normal, fuerza de rozamiento y tensión

Vamos a reservar un espacio aparte para estos tres tipos de fuerzas, ya que comparten una peculiaridad característica: sus valores *no son conocidos de antemano, sino que dependen del problema en cuestión*. Veamos por qué:

2.4.1. Fuerza normal

La **fuerza normal** es una fuerza que aparece cuando dos cuerpos se ponen en contacto y que *evita que se atraviesen el uno al otro*. Un ejemplo típico es el de un cuerpo que se encuentra sobre el plano inclinado mostrado en la Fig. 2.3. En ese caso, la normal será igual en magnitud pero de sentido contrario a la componente total de las fuerzas aplicadas dirigida según la normal a la superficie del plano:

$$\vec{N} = -\max \{(mg \cos \theta - F \sin \alpha), 0\} \vec{u}_N, \quad (2.4)$$

siendo \vec{u}_N el vector unitario perpendicular a la superficie del plano (y que apunta hacia fuera de éste). Es decir, la normal se encarga de *cancelar cualquier fuerza que tenga como resultado el que el cuerpo intente penetrar dentro del plano*. Por ello, no se sabe lo que vale de antemano (es un error suponer que siempre $N = mg \cos \theta$), sino que hay que calcular dicha fuerza resultante para poder saber lo que vale la normal. Nótese también que si $F \sin \alpha > mg \cos \theta$, entonces **no hay normal**, ya que el cuerpo saldría despedido hacia arriba y dejaría de estar en contacto con el plano.

Por supuesto, la dureza de la sustancia que forma el plano inclinado limita el valor máximo que puede tomar la normal. En caso de que la fuerza resultante superase este valor, el cuerpo atravesaría la superficie del plano!

2.4.2. Fuerza de rozamiento

La **fuerza de rozamiento** es similar a la normal ya que aparece debido a que dos cuerpos se ponen en contacto, pero trata sin embargo de *evitar que los dos cuerpos se muevan uno respecto del otro*. Igual que en el caso de la normal, la fuerza de rozamiento no se conoce de antemano, sino que ha de calcularse usando:

$$\vec{F}_R = -\min \{\mu N, F_x\} \vec{u}_p, \quad (2.5)$$

donde \vec{u}_p es el vector unitario paralelo a la superficie del plano, μ es el llamado coeficiente de rozamiento del plano, y F_x es la componente total de las fuerzas aplicadas dirigidas

según la dirección paralela al plano. En el caso del plano inclinado de la Fig. 2.3, el módulo de la fuerza de rozamiento será:

$$F_R = \min \{ \mu(mg \cos \theta - F \sin \alpha), F \cos \alpha + mg \sin \theta \}. \quad (2.6)$$

Lo que quiere decir la Ec. 2.5 es que la fuerza de rozamiento no tiene porqué ser siempre $\mu\vec{N}$. *Ese valor es su valor máximo.* Si la fuerza resultante que intenta poner al cuerpo en movimiento es mayor que dicho valor máximo, entonces $F_R = \mu N$. Pero sino, la fuerza de rozamiento toma un valor igual, pero de signo opuesto, a la fuerza resultante y el cuerpo no se mueve.

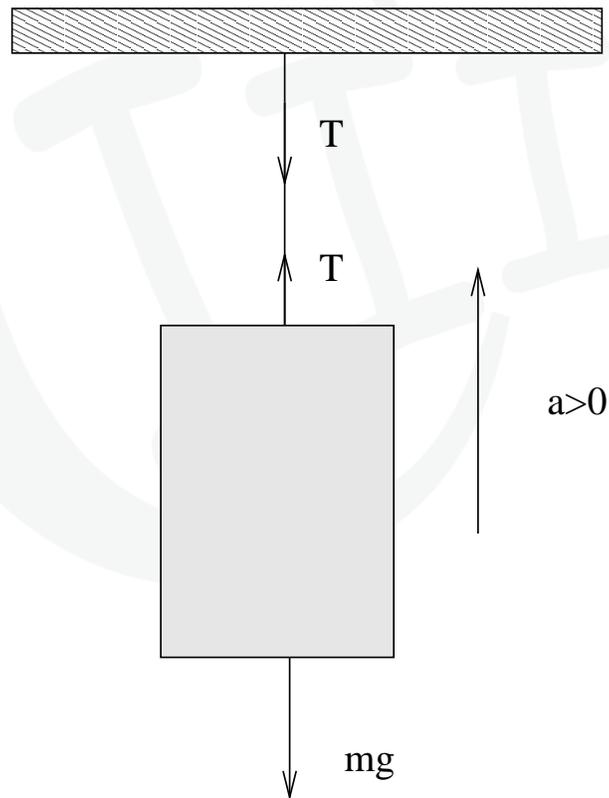


Figura 2.2: Cálculo de la tensión de la cuerda que soporta un ascensor en movimiento.

2.4.3. Tensión

La última fuerza de este tipo es la **tensión** que aparece en una cuerda. De nuevo, el valor que tiene la tensión en una cuerda no es fijo de antemano, sino que es *igual y de sentido contrario a la fuerza resultante aplicada en la dirección de la cuerda*. Por supuesto, también hay un valor máximo de la tensión por encima del cual, la cuerda se rompe.

Así, por ejemplo, en la Fig. 2.4.2, la ecuación de movimiento del ascensor viene dada por:

$$ma = T - mg, \quad (2.7)$$

por lo que la tensión es igual a:

$$T(a) = m(a + g). \quad (2.8)$$

De esta forma, nótese que la tensión es mayor que el peso si $a > 0$ (el ascensor sube), es menor que el peso si $a < 0$ y sólo iguala al peso cuando el ascensor está parado ($a = 0$). ¡Esta es la razón que los ascensores se rompen cuando suben, y no cuando bajan! Ciertamente, si la tensión máxima que aguanta la cuerda es T_M , la aceleración máxima a la que puede subir el ascensor será:

$$a_M = \frac{T_M}{m} - g. \quad (2.9)$$

2.5. Campo de fuerzas

En muchas situaciones de interés la fuerza no está aplicada sobre un sólo punto, como sucede por ejemplo cuando tiramos de un cuerpo atado a una cuerda (ver Fig. 2.3). Es común encontrar casos en los que, al moverse por el espacio, el móvil va sintiendo una fuerza que varía con la posición en la que se encuentra el cuerpo. Un ejemplo sencillo de esta situación es cuando un planeta se mueve en una región del espacio donde existen otras masas que lo atraen *gravitatoriamente*.

La herramienta matemática que se usa para describir este tipo de interacciones es el **campo de fuerzas**. Por **campo** se entiende una función arbitraria del espacio, $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$, que asigna un valor diferente en cada punto. Si el carácter de la magnitud asignada es un vector, el campo se dice **vectorial**. En nuestro caso tendremos:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)), \quad (2.10)$$

que asigna un vector fuerza a cada punto del espacio. Un ejemplo muy común de campo de fuerzas es el campo gravitatorio, $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}$, donde m es la masa del cuerpo y \vec{g} es la

aceleración de la gravedad. Nótese que, en este caso, se asigna el mismo vector en cada punto del espacio, ya que se trata de un campo de fuerzas constante.

2.6. Energía cinética

Se define la **energía cinética** de un cuerpo de masa m que se mueva con velocidad \vec{v} como:

$$E_k \equiv \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{mv^2}{2} \quad (2.11)$$

Por tanto, la energía cinética es una función *positiva y creciente* del **módulo** de la velocidad. Puesto que las leyes de Newton nos aseguran que un cuerpo **únicamente** puede cambiar su vector velocidad bajo la acción de una fuerza, es necesaria la presencia de una fuerza para que la energía cinética cambie². Sin embargo, es importante notar que *no toda fuerza provoca un cambio de energía cinética, ya que ésta es sólo función del módulo de la velocidad, no de su dirección*. Por ejemplo, en el caso del movimiento circular, existe una fuerza que modifica la dirección del vector velocidad continuamente para que el cuerpo se mantenga sobre la trayectoria circular. El módulo de la velocidad permanece en cambio constante, con lo que la energía cinética es siempre la misma.

2.7. Concepto de trabajo

El significado físico de la magnitud llamada **trabajo realizado por una fuerza o campo de fuerzas** es igual el cambio en la energía cinética experimentado por una partícula que se mueve bajo la acción de dicha fuerza o campo de fuerzas. Por lo tanto, el trabajo realizado cuando una partícula se desplaza del punto A al punto B es igual, si es positivo, al aumento de la energía cinética de la partícula (por ejemplo, cuando se deja caer una piedra en el campo gravitatorio terrestre), y si es negativo, es igual a la energía cinética que pierde la partícula, y que hace que esta disminuya su velocidad (por ejemplo, si la piedra se tira hacia arriba). Si el trabajo realizado es nulo, implica que no existe cambio alguno de energía cinética (como en el caso del movimiento circular antes mencionado).

El cálculo matemático de este trabajo es sin embargo algo más complicado. Se hace

²Suponiendo, claro está, que no está perdiendo masa!

mediante la expresión (que usualmente se usa como definición formal del mismo):

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.12)$$

que nos da el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ cuando la masa m se desplaza desde el punto A al B (ver Fig. 2.7 para un ejemplo). ¿Y por qué la Eq. 2.12 equivale al cambio en la energía cinética del cuerpo al moverse entre los puntos A y B ,

$$\Delta E_k^{AB} = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2)? \quad (2.13)$$

Pues porque usando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$, podemos reescribir la Eq. 2.12 como:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= m \int_A^B d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int_A^B d\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}\right) = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

•EJEMPLO: Movimiento paralelo a la fuerza: Movimiento rectilíneo

Supongamos una granada de 10kgr que se deja caer verticalmente desde una altura de 30m bajo la acción de la gravedad. ¿Cuál es el trabajo que realiza la gravedad (o lo que es lo mismo, cuanta energía cinética gana la granada al caer en el campo gravitatorio) desde el punto en que se deja caer hasta que cae al suelo?

Puesto que la fuerza que actúa es el peso, $\vec{F} = -mg\vec{j}$, y la trayectoria que sigue la granada es paralela al eje de las Y , tenemos que $d\vec{r} = dy\vec{j}$. Por lo tanto, usando la Eq. 2.12:

$$W = \int_{y=30}^{y=0} (-mg\vec{j}) \cdot dy\vec{j} = -mg \int_{y=30}^{y=0} dy = -mg(0 - 30) = 3000J. \quad (2.15)$$

Si calculamos el incremento de energía cinética directamente, sabiendo que la velocidad inicial en $y = 30$ es nula, y que la velocidad final en $y = 0$ es $v^2(y = 0) = 2 \times g \times 30$ (usando la siguiente fórmula válida para un movimiento uniformemente acelerado $v^2 - v_o^2 = 2as$, con a es la aceleración, s el espacio recorrido, y v y v_o la velocidad final e inicial, respectivamente), tenemos que:

$$\Delta E_k = \frac{30}{2} 2 * 10 * 30 - 0 = 3000J, \quad (2.16)$$

confirmándose de nuevo el significado físico del trabajo.

Es importante darse cuenta que si, en lugar de dejarla caer desde 30m de altura, la lanzamos hacia arriba con velocidad inicial $v = \sqrt{600}\text{m/s}$, la granada no se parará hasta alcanzar los 30m (es el problema inverso al anterior). En ese caso, el campo gravitatorio reduce la energía cinética de la partícula, ya que:

$$\Delta E_k = 0 - \frac{30}{2}600 = -3000\text{J}, \quad (2.17)$$

que también se obtiene usando la definición del trabajo, sin más que darse cuenta que viene dado por la ecuación Eq. 2.15 con los límites de integración intercambiados (recordad que el signo de la integral cambia al intercambiar sus límites de integración).

•EJEMPLO: Movimiento perpendicular a la fuerza: Movimiento circular

Consideremos la Luna, rotando alrededor de la tierra a una distancia d_{TL} . ¿Cuál es el trabajo realizado por la atracción gravitatoria terrestre sobre la luna suponiendo la órbita de la primera alrededor de la segunda perfectamente circular?

Puesto que la fuerza que actúa es la gravedad:

$$\vec{F}_g = G \frac{M_T m_l}{d_{TL}^2} \vec{u}_r, \quad (2.18)$$

donde \vec{u}_r es el vector radial unitario en cada punto del espacio con dirección dada por la recta que une dicho punto al centro de la Tierra y sentido alejándose de éste. La trayectoria de la Luna es una circunferencia de radio d_{TL} centrada en el centro de la Tierra, y por lo tanto, $\vec{dr} \perp \vec{F}_g$ en todos los puntos de su trayectoria. Por lo tanto,

$$W = \oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0, \quad (2.19)$$

que coincide con el incremento de energía cinética de la Luna en su movimiento rotatorio alrededor de la Tierra, puesto que la velocidad de ésta se mantiene (muy aproximadamente) constante (¡si no, la luna llena no reaparecería siempre cada 28 días!).

•EJEMPLO: Cálculo explícito de la integral de trabajo

Consideremos un cuerpo que se desplaza en el plano XY del punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (1, 2)$ siguiendo las dos trayectorias mostradas en la Fig. 2.7. Decir por cuál de las

dos trayectorias el trabajo es menor si el cuerpo se mueve en un campo de fuerzas definido por:

$$\vec{F}(x, y) = 2x^2y\vec{i} + (xy^2 + 1)\vec{j}. \quad (2.20)$$

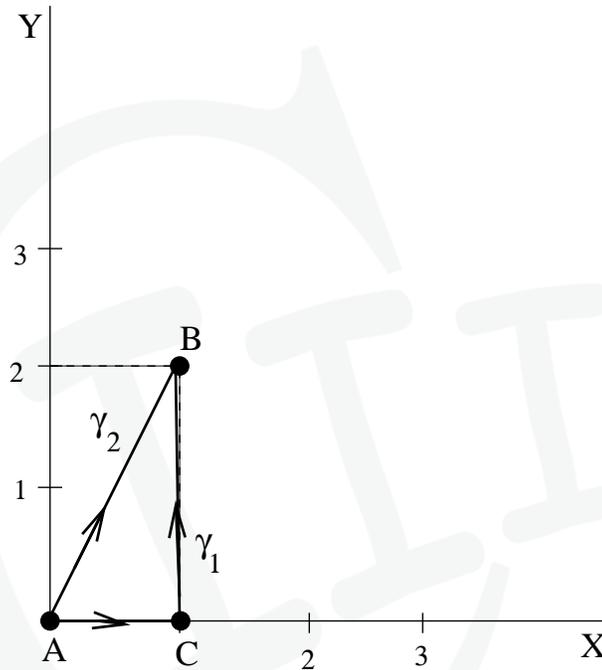


Figura 2.3: Cálculo explícito del trabajo.

La manera de resolver este problema es calcular explícitamente el valor del trabajo calculando:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (2.21)$$

¿Cómo se hace esta integral?

- **Camino γ_1 .** - En dicho camino, el vector desplazamiento $d\vec{r}$ tiene forma distinta en el trozo que va del punto A al C que en el que va de C al B. Ciertamente, de A a C tenemos que:

$$d\vec{r} = dx \vec{i} \quad (2.22)$$

ya que la componente y de todos los puntos del camino es siempre la misma e igual a cero. Sin embargo, de C a B, tenemos que:

$$d\vec{r} = dx \vec{j}, \quad (2.23)$$

ya que entonces es **la coordenada x de todos los puntos del camino la que permanece siempre igual a uno.**

Por ello, es más ventajoso escribir la integral del trabajo como:

$$W_{A \rightarrow B}^{\gamma_1} = \int_{x_A}^{x_C} F_x dx + \int_{y_C}^{y_B} F_y dy = \int_0^1 2x^2 y dx + \int_0^2 (xy^2 + 1) dy, \quad (2.24)$$

donde hemos separado la integral en los dos trozos (de A a C y de C a B), hemos operado el producto escalar de \vec{F} con \vec{dr} teniendo en cuenta el valor de \vec{dr} en cada trozo, y hemos puesto los límites de la integral correspondientes a cada trozo (en x , para la parte que va de A a C , y en y para la parte que va de C a B).

Ahora, nos resta resolver las dos integrales que aparecen en la Ec. 2.24. El único problema es que, por ejemplo en la primera, aparece la y dentro de la integral realizada sobre x . ¿Cómo se integra esto? Pues dándose cuenta que para todos los puntos del tramo que va de A a C **la y es constante e $y = 0$** . Para la segunda integral, que se realiza sobre y entre C y B , **la x es también constante e igual a 1**. Por ello, resulta que:

$$W_{A \rightarrow B}^{\gamma_1} = \int_0^2 (1 \cdot y^2 + 1) dy = \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \quad (2.25)$$

■ **Camino γ_2 .**-

En el caso del camino γ_2 , **la x y la y de los puntos del camino varían conjuntamente**, ya que siempre ha de cumplirse que $y = 2x$. Por ello, si la x cambia en dx , la y tiene que cambiar también si queremos seguir sobre la recta $y = 2x$. ¿En cuanto tiene que cambiar la y ? Pues muy fácil. Basta con diferenciar la ecuación de la recta:

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2dx. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, al desplazarse de A a B sobre la recta $y = 2x$, el vector desplazamiento tiene la forma:

$$\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} = dx \vec{i} + 2dx \vec{j}. \quad (2.27)$$

Podemos ahora calcular la integral del trabajo usando esta expresión para el vector desplazamiento al calcular el producto escalar con la fuerza:

$$W_{A \rightarrow B}^{\gamma_2} = \int_{x_A}^{x_C} (F_x dx + 2F_y dx) = \int_0^1 (2x^2 y + 2(xy^2 + 1)) dx. \quad (2.28)$$

De nuevo tenemos el problema de tener una integral en x donde aparece la y . Ahora, no sucede como antes cuando la y era constante y era suficiente con sustituir el valor, ya que la y cambia ahora a medida que cambia la x . Pero, afortunadamente, sabemos que $y(x) = 2x$ sobre el camino, así que es suficiente con sustituir y por $2x$ para hacer la integral:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{\gamma^2} &= \int_0^1 (2x^2(2x) + 2(x(2x)^2 + 1))dx = \\ &= \int_0^1 (12x^3 + 2)dx = 3x^4 + 2x \Big|_0^1 = 5. \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.8. Fuerzas conservativas

Existe una clase particular de campos de fuerzas, entre las que se engloban las fuerzas eléctricas, que se caracterizan porque el trabajo realizado sólo depende del punto inicial y final de la trayectoria por la que se desplace el cuerpo sobre el que se ejerce la misma. Es decir, la velocidad del cuerpo en el punto final es la misma, independientemente de la trayectoria que se haya seguido para llegar a él, siempre que se parta del mismo punto inicial y con la misma velocidad inicial. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo de fuerzas cuando una partícula describe una trayectoria cerrada (es decir, en la que el punto inicial y final coinciden) será cero, ya que entonces $E_k^A = E_k^B$ por ser $A = B$. Estas fuerzas (o campos de fuerzas) se llaman **conservativas**.

Es importante notar que no todas las fuerzas son conservativas. Por ejemplo, una rueda no llega con la misma velocidad a un punto que diste 15m del punto de lanzamiento si, por ejemplo, se hace que ruede hasta allí, o si se lanza por el aire siguiendo una trayectoria parabólica, aunque el módulo de la velocidad inicial sea la misma en ambos casos. El rozamiento entre la rueda y el suelo hace que la velocidad con que llega en el primer caso sea mucho menor. Ciertamente, las fuerzas de rozamiento son uno de los ejemplos más típicos de fuerzas no conservativas.

2.9. Energía potencial

¿Cómo se sabe si un campo de fuerzas, $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo o no? Asegurarse de que el trabajo al mover una masa entre dos puntos sólo depende de éstos, y no del camino que se sigue es irrealizable en la práctica, puesto que hay infinitas elecciones para los puntos inicial y final, y también para los caminos que los unen. Ha de recurrirse a las matemáticas. Éstas nos aseguran que:

A) $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si y solo si, existe un **campo escalar** $U(\vec{r})$, que se llamará **energía potencial** y que verifica que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) \equiv -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.30)$$

Al operador ∇ se le llama **gradiente**, y es un operador que actúa sobre un campo escalar (en este caso, $U(\vec{r})$), para dar un campo vectorial (aquí, $\vec{F}(\vec{r})$)³.

¿Por qué el hecho de poder expresar $\vec{F}(\vec{r})$ como el gradiente de un campo escalar $U(\vec{r})$ garantiza que el campo de fuerzas es conservativo? Pues porque entonces:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int_A^B dU = U(A) - U(B). \quad (2.31)$$

y por tanto, tenemos que el *trabajo realizado sólo depende de los puntos inicial y final*.

¿Y como se haya la energía potencial? Bueno, pues es fácil de escribir, pero en general, difícil de calcular. La idea básica es que el gradiente no es más que una **derivada tridimensional**. Y su inversa, no es más que una integral tridimensional:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.32)$$

donde el punto inicial \vec{r}_0 es **totalmente arbitrario**. El motivo es que a la función energía potencial $U(\vec{r})$ **se le puede sumar una constante arbitraria**, U_o , sin que cambie el campo de fuerzas $\vec{F}(r)$ que se obtiene al calcular el gradiente de U . ¿Por qué? Pues porque el gradiente es una derivada (bueno, tres!), y la derivada de una constante es siempre cero. Ese es el motivo por el que uno **puede escoger el origen de energía potencial** (es decir, el punto donde cogemos $U = 0$) **arbitrariamente**. Basta con restar a la función $U(r)$ el valor de ésta en el punto, \vec{r}_0 donde queramos que el potencial valga cero. Es decir, hacer $U_o = -U(\vec{r}_0)$. (ver el ejemplo al final de esta sección para un ejemplo de esto.)

B) Existe un criterio matemático para determinar si un campo de fuerzas es conservativo o no, sin necesidad de encontrar una función energía potencial $U(\vec{r})$. Esto es importante ya que, como hemos dicho, no es sencillo calcular la energía potencial integrando la fuerza. Por eso, es bueno saber de antemano si merece la pena realizar el

³Veremos mucho más sobre el operador gradiente al hablar del campo eléctrico al final del cuatrimestre, y del magnético en Física II.

esfuerzo. Para ello, basta con formar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2.33)$$

Si el vector resultante de resolver este determinante es nulo, el campo \vec{F} es conservativo. Si no, no lo es⁴.

•**EJEMPLO:** ¿Es el campo $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 - y, 2z - x^3, 4/y^2 + x)$ conservativo?

Para ello, formamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 - y & 2z - x^3 & 4/y^2 + x \end{vmatrix} = (-8y^{-3} - 2) \vec{i} + (0 - 1) \vec{j} + (-3x^2 - (-1)) \vec{k} \neq 0, \quad (2.35)$$

luego no es un campo conservativo.

2.10. Conservación de la Energía

En el caso de un campo de fuerzas conservativa, sabemos que existe una función escalar, la **energía potencial** U , que permite expresar el trabajo realizado por el campo

⁴Este determinante no es más que la definición del **operador rotacional**, que es otro operador diferencial similar al gradiente, pero que actúa sobre un campo vectorial para dar otro campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.34)$$

De nuevo, volveremos a hablar largo y tendido sobre este operador cuando veamos el campo eléctrico al final del cuatrimestre, y del magnético en Física II.

de fuerzas al mover una partícula entre los puntos A y B como:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(A) - U(B). \quad (2.36)$$

Pero también sabemos que el trabajo realizado sobre una partícula que se mueve entre dos puntos es igual al cambio en la energía cinética sufrido por la partícula:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_k(B) - E_k(A). \quad (2.37)$$

Igualando ambas expresiones tenemos que:

$$E_k(B) - E_k(A) = U(A) - U(B) \quad (2.38)$$

y pasando a izquierda y derecha todo lo que depende del punto inicial A o del final B , se obtiene el **principio de conservación de la energía mecánica**:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B) \quad (2.39)$$

A la suma de energía potencial y energía cinética en cada punto se le conoce como **energía mecánica**, y en un campo conservativo se cumple siempre que **la energía mecánica de una partícula es constante**.

•EJEMPLO: Caída libre en un campo gravitatorio

Volviendo al ejemplo anterior de la granada de 10kgr que se deja caer verticalmente desde 30m bajo la acción de la gravedad, podemos calcular el trabajo realizado por la gravedad teniendo en cuenta que la energía potencial gravitatoria viene dada por $U = mgy$, ya que si hacemos su gradiente para obtener la fuerza gravitatoria tenemos que:

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) = (0, -mg, 0) = -mg\vec{j}. \quad (2.40)$$

*Y fijarse que podemos escoger el origen $y = 0$ donde queramos, ya que el potencial da lugar a la misma fuerza si se le suma una constante. Luego si quisieramos que el potencial fuera cero en $y = 3$, basta con restarle a la función anterior el valor de U en $y = 3$, y usar como nuevo potencial: $U' = U - m * g * 3$. Si se calcula el \vec{F} producido por U' , veremos que es el mismo de antes.*

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo gravitatorio será igual al valor de la energía potencial en $y = 30$ m menos el valor en $y = 0$ m:

$$W = mgy_A - mgy_B = 30 * 10 * 30 - 30 * 10 * 0 = 3000J \quad (2.41)$$

que coincide con los valores obtenidos anteriormente.

La aplicación más útil del principio de conservación de la energía es, por ejemplo, el cálculo de la velocidad con la que llega la granada al suelo, ya que:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B) \Rightarrow 0 + mgy_A = \frac{mv_B^2}{2} + 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 * g * y_A} = \sqrt{600}, \quad (2.42)$$

que coincide con el valor obtenido anteriormente usando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado que sigue la granada en su caída.

2.11. Principio de superposición para la energía potencial

De todos es sabido que, si existen simultáneamente varios campos de fuerzas, $\vec{F}_i(\vec{r})$ con $i = 1, \dots, N$, la fuerza total que recibe una partícula situada en el punto \vec{r} es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas existentes en dicho punto:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(\vec{r}) \quad (2.43)$$

Ahora bien. Si dichas fuerzas son conservativas, existirán N funciones energía potencial, $U_i(\vec{r})$, con $i = 1, \dots, N$, que verificarán que cada fuerza se escriba como gradiente de ellas: $\vec{F}_i(\vec{r}) = -\nabla U_i(\vec{r})$.

Por lo tanto, se cumplirá que la fuerza total que recibe la partícula en el punto \vec{r} verifica que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^N \nabla U_i(\vec{r}) = -\nabla \left[\sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}) \right] = -\nabla U(\vec{r}). \quad (2.44)$$

Por tanto, se puede hablar de que la energía potencial también verifica el principio de superposición, de manera que la energía potencial total en un punto (de la que se calcula la fuerza total haciendo el gradiente) es igual a la suma de las distintas energías potenciales individuales que estén definidas en dicho punto, independientemente del tipo de fuerza a que estén asociadas (por ejemplo, ya sea la gravedad o una fuerza eléctrica).

2.12. Almacenamiento de energía: caso del campo gravitatorio

Supongamos que queremos subir una enorme piedra, inicialmente en reposo, por una pendiente, hasta un llano situado en lo más alto de la misma (ver Fig. 2.4). Para hacerlo, tenemos que aplicar una fuerza externa, \vec{F} , que venza la oposición de la fuerza de la gravedad y del rozamiento. Fijaros que la energía potencial de la piedra ha aumentado en el proceso:

$$\Delta U = mg(h_B - h_A) > 0. \quad (2.45)$$

y que dicha energía ha sido suministrada por la fuerza externa.

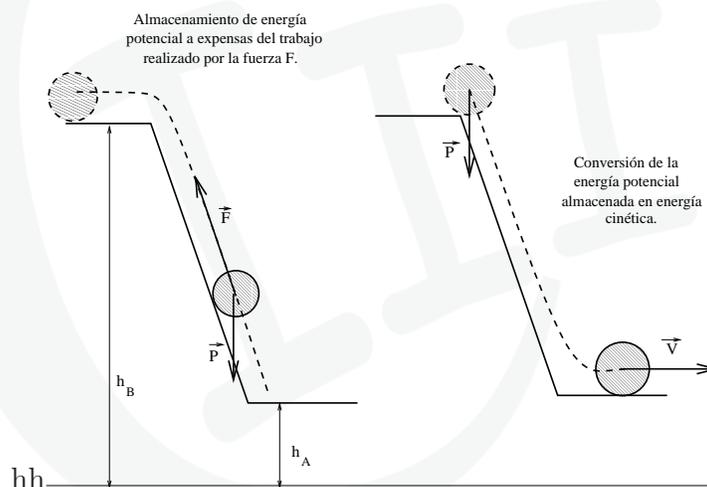


Figura 2.4: Almacenamiento de energía en el campo gravitatorio.

Sin embargo, esta energía almacenada en la piedra en forma de energía potencial, puede recuperarse fácilmente (por recuperarse, entendemos convertirse a otro tipo de energía, como pueda ser energía cinética). Si ahora, con un breve empujón, ponemos la piedra en el comienzo de la pendiente, ésta caerá hacia abajo, y volverá a la altura h_A , donde tendrá una velocidad:

$$v_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)} > 0, \quad (2.46)$$

como se obtiene trivialmente de aplicar el teorema de la conservación de la energía mecánica. Fijaros que la energía potencial de la piedra ha disminuido en el proceso:

$$\Delta U = mg(h_A - h_B) < 0, \quad (2.47)$$

habiéndose convertido ΔU en energía cinética, sin que haya sido necesaria para ello la contribución de fuerza externa alguna.

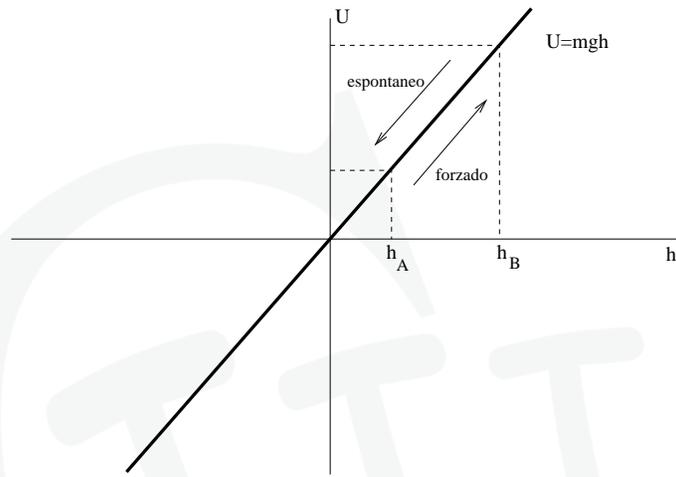


Figura 2.5: Almacenamiento de energía en el campo gravitatorio.

Lo anterior no es sino un ejemplo de una situación común a cualquier campo conservativo: es necesaria la participación de una fuerza externa para mover una partícula, inicialmente en reposo, hacia posiciones con **mayor energía potencial**. Sin embargo, las partículas se mueven **espontáneamente hacia lugares de menor energía potencial**, a menos que exista una fuerza que las retenga. En el ejemplo anterior, la fuerza normal del suelo es la que sostiene a la piedra en las posiciones A ó B , a pesar de que existan posiciones con menor potencial gravitatorio (todas las $h < h_A$, como se puede ver en la Fig. 2.5).

Capítulo 3

EL OSCILADOR ARMÓNICO

Uno de los movimientos más simples e importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio. *Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio.* Ejemplos de este tipo de movimiento son: 1) las vibraciones de los átomos que forman un sólido alrededor de sus posiciones de equilibrio en la red cristalina, 2) el movimiento de un péndulo y 3) los movimientos de los electrones de una antena radiante o receptora.

3.1. El oscilador armónico simple

El más sencillo de los movimientos oscilatorios es el que se conoce como **movimiento armónico simple**. Este es el que ejecuta, por ejemplo, una partícula de masa m que esté unida a un *resorte elástico* de constante k (ver Fig. 3.1). La **fuerza recuperadora** que actúa sobre la masa viene dada por la **Ley de Hooke**, que establece que *la fuerza es proporcional al estiramiento del resorte* ó, en otras palabras, a lo que éste se separe de su posición de equilibrio:

$$F = -K(x - x_{eq}). \quad (3.1)$$

De esta forma, si $x > x_{eq}$ la fuerza es negativa, y tiende a reducir la posición de la masa, dada por x , para que recupere su posición de equilibrio. Si $x < x_{eq}$ la fuerza es positiva, y tiende a empujar la masa hacia valores de x más grandes, de modo que se acerque a su posición de equilibrio.

La ecuación de movimiento de la masa se obtiene de aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = -K(x - x_{eq}), \quad (3.2)$$

o lo que es lo mismo,

$$\ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = \left(\frac{K}{m}\right)x_{eq}. \quad (3.3)$$

La solución de esta ecuación (y algunas variantes de la misma), que nos proporcionará la posición de la masa x como función del tiempo, y la interpretación del resultado es lo que va a ocuparnos el resto del tema.

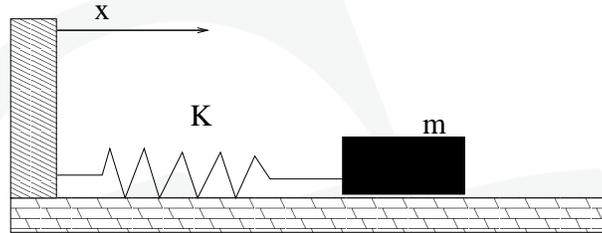


Figura 3.1: El oscilador armónico. La **fuerza elástica** con la que el resorte actúa sobre la masa es proporcional al estiramiento del muelle, $F = -K(x - x_{eq})$.

3.2. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado

Se llama **ecuación diferencial ordinaria de orden n** a cualquier ecuación del tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = b(t), \quad (3.4)$$

donde las $\{a_j, j = 1, \dots, n\}$ son constantes y $b(t)$ una función *arbitraria* de t . El nombre de **ecuación diferencial** se debe a que la Ec. 3.4 relaciona derivadas de distinto orden de la función $y(t)$ respecto de t . Se dice que es **ordinaria** porque no aparecen derivadas parciales. Se llama **orden de la ecuación** al valor de n : es decir, *al grado de la derivada más alta*. Además, si $b(t) = 0$ se dice que la ecuación es **homogénea**. Si $b(t) \neq 0$, se llama **inhomogénea**.

Por ejemplo, la ecuación de movimiento del oscilador armónico (Eq. 3.3), es una ecuación diferencial **ordinaria** (no hay derivadas parciales), **inhomogénea** (ya que se tiene que $b(t) = (K/m)x_{eq} \neq 0$), de **segundo orden** (la derivada más alta, es una segunda derivada), con $a_2(t) = 1$, $a_1(t) = 0$ y $a_0(t) = K/m$.

3.2.1. Solución de la ecuación homogénea de segundo orden

En lo que resta de esta sección describiremos un método general para resolver la ecuación Eq. 3.4 cuando $n = 2$ y $b(t) = 0$:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0. \quad (3.5)$$

No demostraremos porqué proporciona la solución que se sigue de aplicar este método es la correcta. Que realmente es así puede verse sin más que sustituir la solución obtenida en la ecuación Eq. 3.5 y viendo que la cumple.

El método consiste de los siguientes pasos:

1. Construcción de la **ecuación característica**:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (3.6)$$

donde sustituimos la derivada de orden n por p^n , donde p es una variable desconocida.

2. Determinación de las **raíces características**:

$$p_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}, \quad (3.7)$$

que son las soluciones de la ecuación característica.

3. Finalmente, dependiendo de como sean las raíces obtenidas, hay tres casos diferentes:

- a) p_+ y p_- son **reales y distintas**. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = C_1 e^{p_+ t} + C_2 e^{p_- t}, \quad (3.8)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias, sobre las que diremos más luego.

- b) $p_+ = p_- = p$ son **reales e iguales**. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = C_1 e^{pt} + C_2 t e^{pt}. \quad (3.9)$$

- c) $p_{\pm} = p \pm qi$ son **complejas y conjugadas**¹. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = e^{pt} (C_1 \cos(qt) + C_2 \sin(qt)) = e^{pt} (A \cos(qt + \phi)). \quad (3.10)$$

¹ $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

En este caso, es fácil ver que las dos últimas soluciones son equivalentes. Para ello, las constantes arbitrarias C_1 y C_2 tendrán que cumplir una cierta relación con A (que se llama la **amplitud**) y ϕ (la **fase**). Para ver cual, basta con usar que:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad (3.11)$$

de forma que desarrollando:

$$A \cos(qt + \phi) = A \cos \phi \cos(qt) - A \sin \phi \sin(qt), \quad (3.12)$$

e igualando con la suma de coseno y seno que incluye a C_1 y C_2 , se obtiene que están relacionadas mediante:

$$A \cos \phi = C_1 \quad - \quad A \sin \phi = C_2, \quad (3.13)$$

o, despejando trivialmente, mediante la relación inversa:

$$A^2 = C_1^2 + C_2^2, \quad \tan \phi = -C_1/C_2. \quad (3.14)$$

4. Falta, por supuesto, ver qué son C_1 y C_2 o, si usamos amplitud y fase, A y ϕ . Estas no son sino dos **constantes de integración**, similares a las que surgían cuando integrabamos las ecuaciones del movimiento en el capítulo 2. Y, al igual que entonces, se encuentra su valor a partir de las condiciones iniciales del problema, como veremos a lo largo de este capítulo.

3.2.2. Solución de la ecuación inhomogénea de segundo orden

Vamos a ver ahora como se resuelve la ecuación inhomogénea,

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b(t). \quad (3.15)$$

Pues es muy sencillo de resolver, ya que es posible demostrar que:

$$y(t) = y_{\text{homog}}(t) + y_{\text{part}}(t), \quad (3.16)$$

donde $y_{\text{homog}}(t)$ es la solución de la ecuación homogénea que ya resolvimos en el apartado anterior (a través del polinomio y raíces características), mientras que $y_{\text{part}}(t)$ es cualquier solución particular de la Ec. 3.15. Es decir, cualquier función que se nos ocurra que, al sustituir en Ec. 3.15, la satisfaga. De nuevo, la parte homogénea de la solución dependerá de dos constantes de integración (C_1 y C_2 , ó A y ϕ), que habrán de determinarse a partir de las condiciones iniciales del problema.

3.3. Solución de la ecuación del oscilador armónico

Estamos, por tanto, en disposición de resolver la ecuación de movimiento del oscilador armónico (Ec. 3.3), que repetimos aquí:

$$\ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = \left(\frac{K}{m}\right)x_{eq}. \quad (3.17)$$

Procedemos siguiendo el método que hemos delineado antes. Primero, escribimos el polinomio característico de la ecuación **homogénea**:

$$p^2 + \left(\frac{K}{m}\right) = 0, \quad (3.18)$$

que tiene por raíces:

$$p_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)i. \quad (3.19)$$

Es decir, se obtienen dos **raíces complejas y conjugadas**, por lo que la solución homogénea viene dada por (ver Ec. 3.10, con $p = 0$ y $q = \sqrt{K/m}$):

$$x_{\text{homog}}(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi\right), \quad (3.20)$$

donde A y ϕ son dos constantes a determinar. A esta solución necesitamos sumarle la solución particular. Esta se encuentra por prueba y error. En el caso que $b(t)$ es una constante, lo más fácil es buscar *alguna solución constante* que verifique la ecuación. En este caso es muy fácil ver que $x_{\text{part}}(t) = x_{eq}$ es una posible solución particular. Por lo tanto, la solución final del oscilador armónico será:

$$x(t) = x_{eq} + A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi\right). \quad (3.21)$$

Es ahora buen momento para recapacitar un poco sobre lo que significa esta solución. Recordad primero que la ecuación de movimiento del oscilador armónico describe el movimiento de una masa m unida a un resorte de constante K (ver Fig. 3.1). La solución que hemos encontrado nos dice que la masa va a oscilar alrededor de la posición de equilibrio $x = x_{eq}$: el segundo término en la Ec. 3.21 varía **periódicamente** entre $+A$ y $-A$, por lo que la posición de la masa variará periódicamente entre $x_{eq} + A$ y $x_{eq} - A$. Es por esto

que a A se le llama la **amplitud** del movimiento, ya que nos dice cuánto será *el máximo alejamiento del cuerpo respecto de la posición de equilibrio*. Por otro lado, la **frecuencia de la oscilación** será igual a $\omega = \sqrt{K/m}$. Y el **periodo**, $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/K}$.

¿Como se determinan las constantes arbitrarias A y ϕ ? A partir de las **condiciones iniciales**. Supongamos que, inicialmente para $t = 0$, la masa se sitúa en $x(0) = x_0$, y que se abandona allí con velocidad inicial $v(0) = v_0$. Entonces, para que la Ec. 3.21 describa el movimiento adecuadamente, tendrá que pasar primero que:

$$x_0 = x(0) = x_{eq} + A \cos(\phi). \quad (3.22)$$

Luego, teniendo en cuenta que la velocidad de la masa vendrá dada en cada instante de tiempo por la derivada de la Ec. 3.21:

$$\dot{x}(t) = -A\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi\right), \quad (3.23)$$

tendrá que pasar también que:

$$v_0 = \dot{x}(0) = -A\sqrt{\frac{K}{m}} \sin(\phi). \quad (3.24)$$

Combinando ahora las Ecs. 3.22 y 3.24, se tiene que:

$$A = \sqrt{(x_0 - x_{eq})^2 + mv_0^2/K}, \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{mv_0/K}{x_0 - x_{eq}}\right), \quad (3.25)$$

que *dependen únicamente de las condiciones iniciales*.

3.4. Energía potencial armónica

Un aspecto muy importante de la fuerza elástica $F_{el} = -K(x - x_{eq})$ es que se trata de una **fuerza conservativa**. Para ver que esto es así, escribámosla primero en forma vectorial:

$$\vec{F}_{el} = -K(x - x_{eq}) \vec{i}. \quad (3.26)$$

Es trivial comprobar que el *rotacional de esta fuerza es nulo*:

$$\nabla \times \vec{F}_{el} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -K(x - x_{eq}) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

Por ello, ha de derivar de una **energía potencial elástica** $U_{el}(x)$, que vendrá dada por:

$$U_{el}(x) = - \int_{x_0}^x F_x dx = K \int_{x_0}^x (x - x_{eq}) dx = K \left[\frac{x^2}{2} - x_{eq}x \right]_{x_0}^x. \quad (3.28)$$

Puesto que el *origen de energía potencial es arbitrario*, es conveniente escogerlo de forma que $x_0 = x_{eq}$. En ese caso, la energía potencial elástica toma la forma:

$$U_{el}(x) = K \left[\frac{x^2}{2} - x_{eq}x \right]_{x_{eq}}^x = K \left[\frac{x^2}{2} - x_{eq}x + \frac{x_{eq}^2}{2} \right] = \frac{K}{2} (x - x_{eq})^2. \quad (3.29)$$

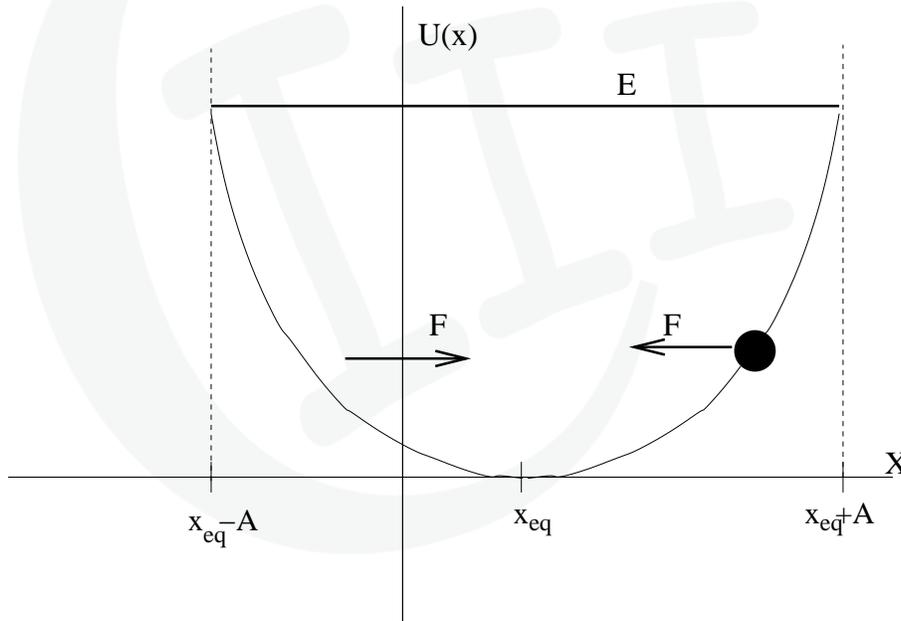


Figura 3.2: Energía potencial elástica.

Si hacemos un gráfico de la función potencial respecto de la coordenada x se obtiene la Fig. 3.4. Fijaros que la energía potencial elástica es entonces mínima cuando $x = x_{eq}$, mientras que es máxima para el punto más alejado del equilibrio que la masa alcanza durante la oscilación (recordad Ec. 3.25), $x_{\max} = x_{eq} \pm A$, donde:

$$U_{\max} = \frac{1}{2}KA^2. \quad (3.30)$$

Puesto que, como vimos en el Capítulo 2, los cuerpos en un campo conservativo se mueven **espontáneamente** hacia aquella posición donde la energía potencial es **mínima**, el oscilador siente *siempre una fuerza dirigida hacia x_{eq}* . Sin embargo, puesto que el principio de conservación de la energía nos dice que en todo momento se cumple que:

$$E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}Kx^2(t) = \text{constante}, \quad (3.31)$$

al disminuir la energía potencial cerca del mínimo aumenta la energía cinética del cuerpo. Por ello, no puede permanecer en el mínimo de energía potencial (allí su velocidad es máxima), sino que se pasa, pasando a sentir entonces una fuerza de signo contrario que vuelve a dirigirlo hacia el mínimo de potencial. Por eso, el cuerpo oscila alrededor de dicha posición.

3.5. El oscilador armónico amortiguado

Una de las variaciones más importantes del oscilador armónico es el caso del oscilador armónico amortiguado. Se diferencia del oscilador armónico standard (dado por la Ec. 3.3), en que además de la fuerza del resorte existe también una *fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad*. Este sería el caso, por ejemplo, si la masa conectada al resorte de la Fig. 3.1 estuviera moviéndose en un medio viscoso. Ejemplos de este tipo de movimiento son el movimiento en el aire o en un fluido (como sucede, por ejemplo, con un émbolo en un pistón de un motor de un coche). La ecuación de movimiento de la masa pasaría a ser ahora: La ecuación de movimiento de la masa es, en este caso:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - K(x - x_{eq}), \quad (3.32)$$

donde b es el coeficiente de rozamiento (*dinámico*, en este caso) o lo que es lo mismo,

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = \left(\frac{K}{m}\right)x_{eq}. \quad (3.33)$$

3.5.1. Solución de la ecuación del oscilador armónico amortiguado

Procedemos de nuevo siguiendo el método que hemos delineado antes. Primero, escribimos el polinomio característico de la ecuación homogénea:

$$p^2 + \frac{b}{m}p + \left(\frac{K}{m}\right) = 0, \quad (3.34)$$

que tiene por raíces:

$$p_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - \frac{4K}{m}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.35)$$

donde hemos definido $\gamma^2 = (b/2m)^2$ y $\omega_0^2 = K/m$ por conveniencia. En particular, nótese que ω_0 corresponde a la *frecuencia del oscilador armónico sin amortiguar*.

Claramente, ahora vamos a poder distinguir tres casos, dependiendo de lo que valgan ω_0 and γ :

1. $\omega_0^2 > \gamma^2$: **caso infraamortiguado.**

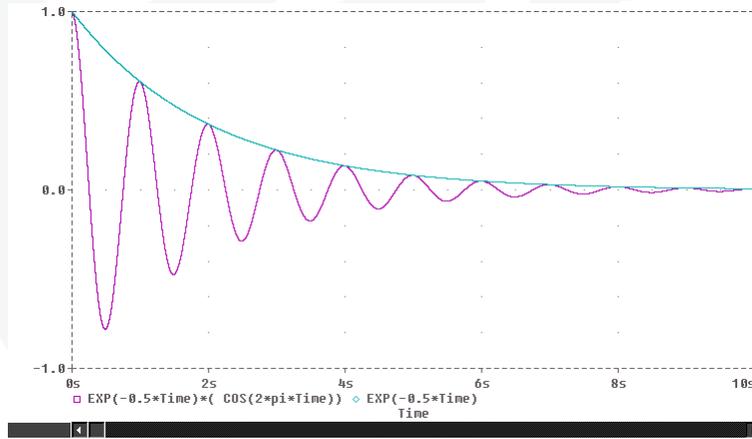


Figura 3.3: Caso infraamortiguado.

En este caso, las dos raíces son complejas y conjugadas:

$$p_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.36)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea será dada por la Ec. 3.10, con $p = \gamma$ and $q = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$:

$$x_{\text{homog}}(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi\right). \quad (3.37)$$

Y de nuevo, es fácil darse cuenta que, como solución particular, nos basta con $x_{\text{part}} = x_{\text{eq}}$, de forma que el movimiento del oscilador en este caso viene dado por:

$$x(t) = x_{\text{eq}} + Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi\right). \quad (3.38)$$

Fijaros que esta solución puede interpretarse como una **oscilación de frecuencia** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ alrededor de la posición de equilibrio $x = x_{\text{eq}}$, pero **que tiene una amplitud que decae exponencialmente con el tiempo** (ver Fig. 1):

$$A(t) = A \exp(-\gamma t). \quad (3.39)$$

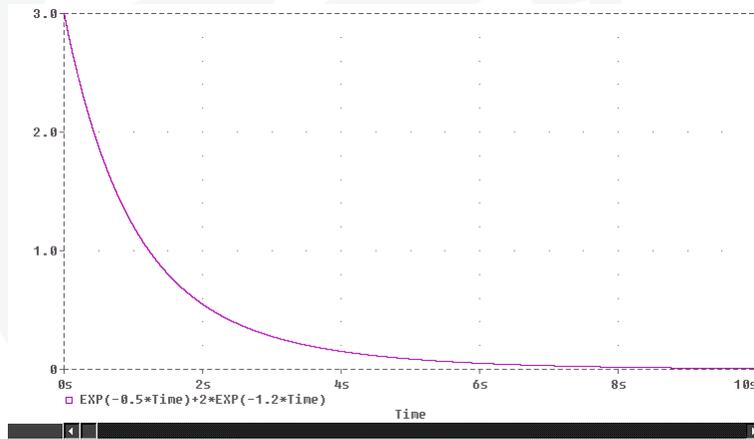


Figura 3.4: Caso sobreamortiguado.

2. $\omega_0^2 < \gamma^2$: caso sobreamortiguado.

En este caso, las dos raíces son reales y diferentes:

$$p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (3.40)$$

por lo que la solución de la homogénea viene dada por la Ec. 3.8:

$$x_{\text{homog}}(t) = \left[C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t} \right]. \quad (3.41)$$

Puesto que la solución constante $x = x_{eq}$ sigue siendo una buena solución particular, el movimiento del oscilador será en este caso:

$$x(t) = x_{eq} + \left[C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t} \right], \quad (3.42)$$

con C_1 y C_2 determinados por las condiciones iniciales.

¿Y como es en este caso el comportamiento del oscilador? Bueno, pues fijaros que lo que tenemos es que la posición del oscilador es la suma de su posición de equilibrio más una función que decae exponencialmente con el tiempo². Con lo que tenemos que, una vez que se separa al oscilador de su posición de equilibrio, este trata de llegar de nuevo a él **sin oscilar** (ver Fig. 1).

3. $\omega_0^2 = \gamma^2$: amortiguamiento crítico.

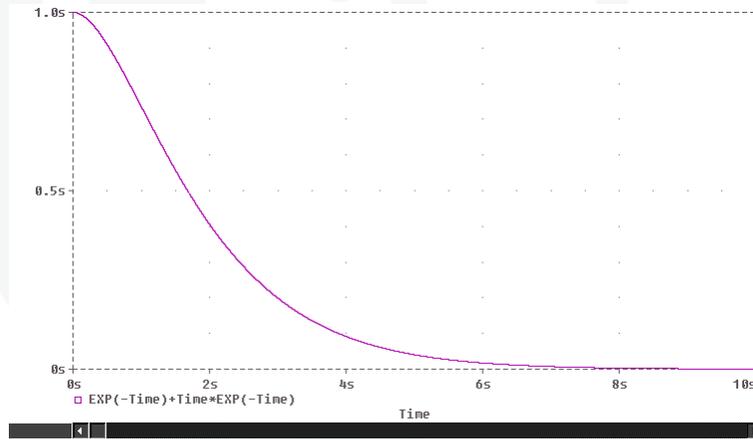


Figura 3.5: Caso con amortiguamiento crítico.

En este caso, las raíces son reales pero idénticas:

$$p_{\pm} = p = -\gamma, \quad (3.43)$$

por lo que la solución homogénea viene dada por la Ec. 3.9:

$$x_{\text{homog}}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t}. \quad (3.44)$$

²En realidad, tenemos la suma de dos exponenciales que decaen, pero una lo hace muchó más deprisa que la otra, con lo que si se espera lo suficiente queda solo aquella que tenga el exponente más pequeño: $-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$.

De nuevo, combinándola con la solución particular tenemos que la posición del oscilador será:

$$x(t) = x_{eq} + (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t}, \quad (3.45)$$

con C_1 y C_2 determinados por las condiciones iniciales.

Fijaros que en este caso volvemos a encontrar que el oscilador, una vez que se separa de su posición de equilibrio, vuelve a ella **sin oscilar**. Pero en este caso, la exponencial es única y más rápida que la solución más lenta del caso sobreamortiguado, por lo que el oscilador tarda menos tiempo en volver a su posición de equilibrio (ver Fig. 3).

Y os preguntareis, ¿y a quién le importa si un oscilador es crítico, sobreamortiguado o inframortiguado? Bueno, pues a mucha gente. Por ejemplo, imaginad que queréis construir una balanza de precisión mediante un resorte elástico. En ese caso os interesará que la constante K del muelle se elija de forma que el amortiguamiento sea lo más cercano al crítico cuando le pongais una masa encima. De ese modo, se consigue que la balanza oscile muy poco y que la medida sea muy precisa y rápida. Por otro lado, imaginad que queréis construir un martillo neumático. En ese caso, os interesará construirlo de modo que el embolo percutor se encuentre lo más infraamortiguado posible, ya que entonces oscilará más veces alrededor de su posición de equilibrio y, por tanto, golpeará más veces.

3.6. El oscilador armónico forzado

Otra variación interesante del oscilador armónico es lo que se llama **oscilador forzado**. Se trata de un oscilador amortiguado normal sobre el que, además, **se aplica una fuerza externa periódica**:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - K(x - x_{eq}) + F_0 \cos(\omega_f t), \quad (3.46)$$

donde b sigue el coeficiente de rozamiento (*dinámico*) y donde la fuerza periódica (con frecuencia ω_f) viene dada por $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$. Igual que hicimos anteriormente, reescribiremos la ecuación de movimiento como:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} + \widehat{F}_0 \cos(\omega_f t), \quad (3.47)$$

donde hemos usado las definiciones de $\gamma = b/(2m)$ y $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ que introdujimos en la sección anterior, y hemos definido $\widehat{F}_0 = F_0/m$.

Primero, vamos a ver como es la solución que describe el movimiento del oscilador en este caso usando los métodos que ya hemos introducido y usado antes. Luego, veremos porqué es importante este caso concreto.

3.6.1. Solución de la ecuación del oscilador armónico forzado

La manera de resolver la Ec. 3.47 es resolver primero la ecuación homogénea y luego sumarle una solución particular. Ahora bien. Fijaros que la ecuación homogénea correspondiente al oscilador forzado es la misma que la que seguía el oscilador amortiguado que resolvimos en la sección anterior. Por lo tanto, nos basta con encontrar una solución particular de la Ec. 3.47 y sumársela a alguna de las tres soluciones que vimos entonces, según se trate de un oscilador infra-, sobre- ó críticamente amortiguado.

Por lo tanto, vamos a concentrarnos sólo en la solución particular que nos hace falta. En este caso no nos vale el truco de buscar una solución constante, ya que en este caso $b(t) = \omega_0^2 x_{eq} + \widehat{F}_0 \cos(\omega t)$ no lo es. La manera de buscarla será por prueba y error. Lo que haremos es suponer que dicha solución tiene una determinada forma general, que depende de algún(os) parámetro(s) desconocido(s), y ajustaremos ese (o esos) para que se verifique la Ec. 3.47. La mejor forma para probar la dicta sólo la experiencia. Y por ello, probaremos con:

$$x_{\text{part}}(t) = B + C \sin(\omega_f t + \phi'), \quad (3.48)$$

ya que es de esperar que, bajo una fuerza periódica, el oscilador se mueva oscilando periódicamente con la misma frecuencia que la fuerza. Los parámetros a ajustar para que se cumpla la Ec. 3.47 son, entonces, B , C y ϕ' .

Para encontrarlos, sustituimos la expresión dada por la Ec. 3.48 en la Ec. 3.47 e imponemos que se cumpla. Para ello, necesitamos conocer la primera y segunda derivada de la solución particular que hemos propuesto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{part}}(t) &= C\omega_f \cos(\omega_f t + \phi'), \\ \ddot{x}_{\text{part}}(t) &= -C\omega_f^2 \sin(\omega_f t + \phi'). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Introduciendo ahora estas expresiones en la Ec. 3.47:

$$\begin{aligned} -C\omega_f^2 \sin(\omega_f t + \phi') + 2\gamma C\omega_f \cos(\omega_f t + \phi') + \omega_0^2 [B + C \sin(\omega_f t + \phi')] &= \\ = \omega_0^2 x_{eq} + \widehat{F}_0 \cos(\omega_f t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ahora, sacamos factor común separadamente a los senos y los cosenos, desarrollándolos previamente usando:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad (3.51)$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[-C(\omega_f^2 - \omega_0^2) \sin \phi' + 2\gamma C\omega_f \cos \phi' - \widehat{F}_0 \right] \cos(\omega_f t) + \\ + \left[-C(\omega_f^2 - \omega_0^2) \cos \phi' + 2C\gamma\omega_f \sin \phi' \right] \sin(\omega_f t) = \omega_0^2 (x_{eq} - B). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Y ya podemos ir eligiendo valores de los parámetros. El más fácil es $B = x_{eq}$, de forma que se anula la parte de la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} & \left[-C(\omega_f^2 - \omega_0^2) \sin \phi' + 2\gamma C \omega_f \cos \phi' - \widehat{F}_0 \right] \cos(\omega_f t) + \\ & + \left[-C(\omega_f^2 - \omega_0^2) \cos \phi' + 2C\gamma \omega_f \sin \phi' \right] \sin(\omega_f t) = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Y ahora, tenemos que elegir C y ϕ' para que se anule también la parte de la izquierda. Tras un poco de álgebra, tediosa pero fácil, se llega a que hemos de elegir:

$$\tan \phi' = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\omega_f \gamma}, \quad C = \frac{\widehat{F}_0}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}, \quad (3.54)$$

que completan la solución particular (recordar Ec. 3.48):

$$x_{part}(t) = x_{eq} + \left(\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \right) \sin(\omega_f t + \phi'). \quad (3.55)$$

Sumando a esta la solución de la homogénea correspondiente (según se trate de un caso infra-, sobre- o críticamente amortiguado), la solución final que nos da la posición del oscilador en función del tiempo:

$$x(t) = x_{eq} + x_{homog}(t) + \left(\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \right) \sin(\omega_f t + \phi'). \quad (3.56)$$

Analicemos ahora este resultado. Lo primero que es importante darse cuenta es que la solución particular que hemos encontrado (Ec. 3.55) corresponde a una **oscilación cuya amplitud no decrece con el tiempo**. Por contra, todas las soluciones homogéneas que encontramos para el oscilador forzado sí tenían una amplitud que decaía exponencialmente con el tiempo. Por ello, si esperamos un tiempo suficientemente largo³, al final **todo lo que quedará será la solución particular**, que gobernará desde entonces el movimiento del oscilador forzado. Es por ello que a la solución homogénea se le suele llamar **transitorio** del movimiento, mientras que a la particular se le llama **estacionario** del movimiento forzado.

³Este tiempo es del orden de $\tau = \gamma^{-1}$, ya que los coeficientes de las exponenciales que obtuvimos eran todos del orden de γ .

3.6.2. Resonancia en amplitud y resonancia en energía

Fijémonos ahora más atentamente en el estacionario que hemos encontrado (Ec. 3.55). Corresponde a una *oscilación que tiene la misma frecuencia que la fuerza externa*, y cuya amplitud viene dada por:

$$C(\omega_f) = \frac{\widehat{F}_0}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}. \quad (3.57)$$

A esta función se le llama **curva de resonancia**. Fijaros que dicha **amplitud depende**, para un amortiguador dado (que tiene, por tanto, valores prefijados de K , b y m y, por tanto, de γ y ω_0), de cual sea la **frecuencia de forzado** ω_f .

Resonancia en amplitud

En el caso que el rozamiento dinámico sea muy pequeño, el denominador va a ser muy cercano a cero si se escoge una frecuencia de forzado $\omega_f \simeq \omega_0$. A este proceso físico se le llama **resonancia en amplitud**. Lo que sucede es que, si la frecuencia de forzado es muy cercana a la frecuencia característica del oscilador (ω_0), la amplitud de las oscilaciones puede hacerse muy grande. Tan grande, que puede representar muchas veces un peligro en muchas aplicaciones prácticas⁴.

Para encontrar la condición exacta de resonancia en amplitud, basta con encontrar cual es la frecuencia de forzado ω_f para la que la amplitud alcanza un máximo. Para ello, derivamos $C(\omega_f)$ con respecto a ω_f y buscamos sus ceros. Luego, miramos en cual de esos ceros, la segunda derivada de $C(\omega_f)$ respecto a ω_f es negativa. El resultado de hacer esto es que la condición de resonancia en amplitudes se alcanza para:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad (3.58)$$

que es muy cercana a ω_0 si el rozamiento (i.e., γ) es pequeño, como decíamos antes.

Resonancia en energía

⁴Por ejemplo, imaginad un tren. Al estar en marcha, las ruedas van a girar con una determinada frecuencia que dependerá de la velocidad del tren. Suponed ahora que las ruedas tienen una pequeña imperfección, de forma que se siente un pequeño golpe cuando la imperfección toca con el raíl. Dicho martilleo periodico actúa como una fuerza periódica sobre el sistema de tracción del tren. Si alguna de las frecuencias características de los materiales o los mecanismos de los que está hecho el tren está cercana a dicha frecuencia de martilleo, las oscilaciones del sistema de tracción pueden aumentar en amplitud y ocasionar que el tren descarrile!

Para algunas aplicaciones concretas, lo importante no es conocer cual es la frecuencia de forzado ω_f que hace máxima la amplitud del oscilador, sino para que frecuencia de forzado se hace máxima la velocidad con la que se produce la oscilación⁵. A esta situación se le llama **resonancia en energía**.

Fijaros que la velocidad del oscilador, una vez domina su movimiento el estacionario, no es mas que:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{\text{part}}(t) = \omega_f C(\omega_f) \cos(\omega_f t + \phi'). \quad (3.59)$$

Por lo tanto, para conocer la frecuencia de forzado a la que se consigue resonancia en energías, basta con calcular el máximo de la función $D(\omega_f) = \omega_f C(\omega_f)$ con respecto a ω_f . Haciendo lo mismo que hicimos antes en el caso de la resonancia en amplitudes, se llega fácilmente a que para que halla resonancia en energía es necesario escoger la frecuencia de forzado como:

$$\omega_f = \omega_0. \quad (3.60)$$

Fijaros que si el amortiguamiento es pequeño (i.e., $\gamma \simeq 0$), comparando Ec. 3.58 y 3.60 se tiene que se alcanza resonancia de energía y de amplitud a (casi) la misma frecuencia.

3.7. Oscilaciones pequeñas

Concluimos este tema discutiendo brevemente una aplicación muy importante del movimiento armónico simple: la descripción de **pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio**.

Como hemos visto anteriormente, el oscilador armónico se genera siempre que actúa sobre un cuerpo una fuerza elástica $F = -K(x - x_{eq})$. Es decir, una fuerza que es **proporcional** a la distancia a su posición de equilibrio. En términos de **energía potencial**, hemos visto que esto corresponde a moverse en una energía potencial del tipo: $U(x) = K(x - x_{eq})^2/2$: una *parábola centrada en la posición de equilibrio* (recordar la Fig. 3.4).

En la práctica, las fuerzas a las que están sometidas los cuerpos no son proporcionales a sus desplazamientos de la posición de equilibrio, ni las energías potenciales son parábolas centradas en la posición de equilibrio. Sin embargo, *si el movimiento del cuerpo es tal que*

⁵Por ejemplo, si estamos construyendo un martillo neumático nos interesará que esté golpee el suelo con la mayor velocidad posible, para que así se transfiera energía más eficientemente y el efecto destructor sea mayor.

no le aleja mucho de la posición de equilibrio, es posible aproximar dicho movimiento por un movimiento armónico simple (ver Fig. 3.7). A eso se le llaman **pequeñas oscilaciones**.

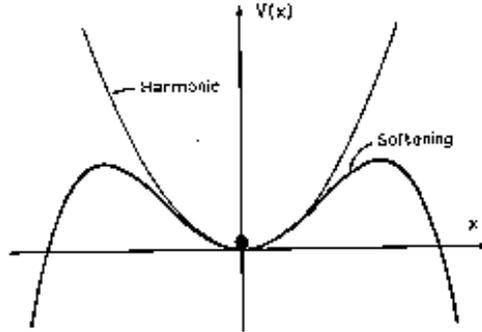


Figura 3.6: Aproximación mediante un movimiento armónico simple de un potencial no-armónico cerca de su posición de equilibrio.

Matemáticamente eso se hace desarrollando en serie de Taylor⁶ la función potencial **en torno a su punto de equilibrio** y quedándose solo hasta segundo orden:

$$U(x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2. \quad (3.62)$$

Fijaros que no aparece entonces ningún término en la primera derivada, ya que en el punto de equilibrio la energía potencial es mínima y, por tanto, *su primera derivada vale cero*. Comparando ahora con la expresión de la energía potencial elástica, ,

$$U_{el}(x) = \frac{1}{2} K (x - x_{eq})^2, \quad (3.63)$$

y obviando la constante $U(x_0)$ está claro que el cuerpo, al ejecutar pequeñas oscilaciones respecto del mínimo en x_0 se comporta como un oscilador armónico con constante elástica

⁶Este tipo de series se estudian en Cálculo. Esencialmente, puede demostrarse que cualquier función continua $f(x)$ puede aproximarse cerca de un punto arbitrario x_0 como:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \quad (3.61)$$

El error que se comete es mayor cuanto más lejos este x de x_0 .

equivalente⁷:

$$K_{eq} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0}. \quad (3.64)$$

Por lo tanto, el cuerpo oscilará con frecuencia característica:

$$\omega_0 = \sqrt{K_{eq}/m} = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0}} \quad (3.65)$$

siempre que no se le aleje demasiado de su posición de equilibrio.

⁷Recordad que el origen de potenciales es arbitrario, ya que sumarle o restarle una constante a la energía potencial no cambia nada!

Capítulo 4

OSCILACIONES Y ONDAS

En los temas anteriores hemos visto que un sistema está en **equilibrio** (o en reposo) cuando la fuerza total que actúa sobre él es **nula**. Así, por ejemplo, un péndulo está en equilibrio cuando está situado en la dirección vertical, o un resorte está en equilibrio cuando su elongación da lugar a una fuerza elástica que compensa el peso que está colgado de él (ver Fig. 1).

Ahora bien, cuando una fuerza externa desplaza (o perturba) al sistema fuera de su posición de equilibrio (por ejemplo, si separamos el péndulo de la vertical, o estiramos o comprimimos el resorte), el sistema puede reaccionar de dos maneras. La perturbación puede ser tal que el movimiento que origine esté siempre localizada en una misma zona del espacio (**oscilación**), o puede propagarse de un lugar a otro (**onda**). Ejemplos de oscilaciones son los que vimos en el tema sobre el oscilador armónico: el péndulo, la masa unida al resorte o los átomos que vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio en una red cristalina. Ejemplos de ondas son las olas que se propagan por la superficie del mar, el sonido que se propaga por el aire, o la luz que se propaga por el (cuasi)-vacío que existe entre la Tierra y el Sol.

En este tema vamos a estudiar en detalle ambos tipos de perturbaciones, tanto oscilaciones como ondas. Veremos que, ambos tipos de movimiento son soluciones de las **mismas** ecuaciones de movimiento del sistema. Y que el obtener una u otra depende de como sean las condiciones iniciales del movimiento.

4.1. Grados de Libertad

Se entiende por **número de grados de libertad** de un sistema al número mínimo de **coordenadas independientes** que es necesario utilizar para describirlo. Así, por

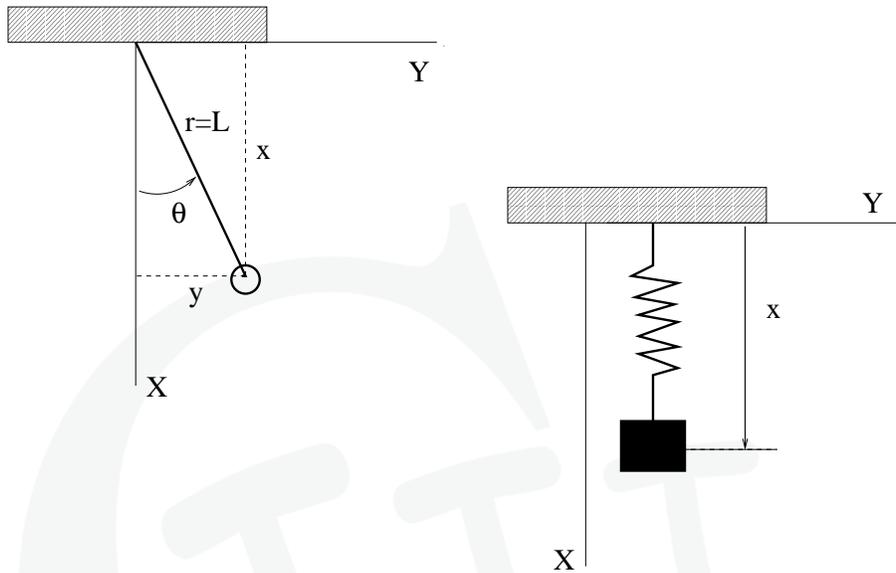


Figura 4.1: Sistemas con 1 grado de libertad.

ejemplo, en el caso del péndulo de la Figura 1 necesita de dos coordenadas cartesianas, x e y , para especificar donde está la masa. Sin embargo, el péndulo se mueve sobre una circunferencia de radio igual a la longitud del péndulo. Por lo tanto, x e y no son independientes, sino que $L^2 = x^2 + y^2$. Por eso, el péndulo tiene **un** sólo grado de libertad. Esto puede verse más claramente si se utilizan para describir la posición de la masa coordenadas polares. Entonces, $r = L$, y basta con especificar θ para decir donde está el péndulo.

En la Figura 2 se muestran ejemplos de sistemas con dos y tres grados de libertad. El sistema de los dos péndulos acoplados (izqda.) tiene dos grados de libertad aunque se necesiten cuatro coordenadas cartesianas para decir donde están las masas: x_1 e y_1 para la primera masa, y x_2 e y_2 para el segundo. Sin embargo, estas cuatro coordenadas tienen dos ligaduras, que las longitudes de los dos péndulos han de ser siempre L_1 y L_2 :

$$L_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad L_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (4.1)$$

Por eso, solo hay dos coordenadas independientes que pueden escogerse como se quiera. En la figura, por ejemplo, se muestra como si se usan polares, es suficiente con escoger los ángulos θ_1 y θ_2 que forma cada péndulo con la vertical.

En cuanto al par de resortes de la derecha de la Fig. 2, el sistema tiene tres grados de libertad si suponemos que el primer resorte solo puede oscilar en la vertical. Bastaría

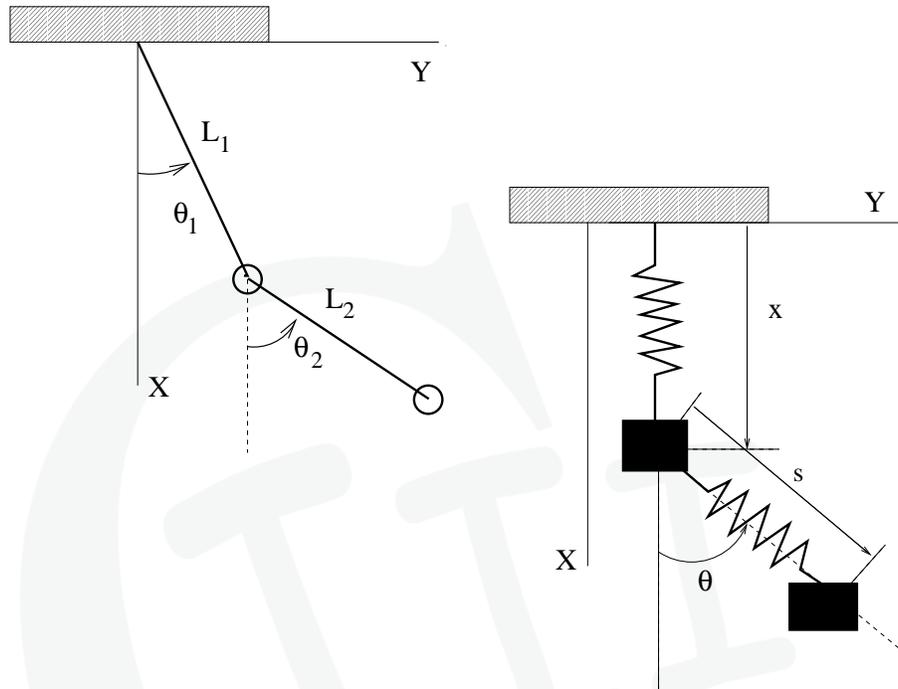


Figura 4.2: Sistemas con 2 (izqda.) y 3(4) (dcha.) grados de libertad.

entonces con especificar x_1 , x_2 e y_2 ó, como se muestra en la figura, x , s y θ . ¿Cuántos grados de libertad tendrá el sistema si permitimos también al primer resorte que se desplace lateralmente? ¿Que coordenadas podremos utilizar para describir el sistema en ese caso?

4.2. Oscilaciones en sistemas con un grado de libertad

Los sistemas con un grado de libertad son aquellos que tienen sólo una parte móvil y cuya posición pueda describirse por una única coordenada. Ejemplos de ellos son la mayoría de los que discutimos al hablar del movimiento armónico simple. Veamos algunos ejemplos en detalle.

4.2.1. El péndulo

El péndulo que se muestra en la Fig.1 tiene por ecuación de movimiento:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta, \quad (4.2)$$

ya que la única fuerza en la dirección tangencial proviene del peso, que se convierte fácilmente en la ecuación del oscilador armónico que vimos en el tema anterior si suponemos pequeñas oscilaciones ($\sin\theta \sim \theta$):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (4.3)$$

La solución del movimiento es, por tanto:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad (4.4)$$

donde la frecuencia propia del movimiento es $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, y la amplitud A y la fase ϕ se determinan por las condiciones iniciales del problema.

4.2.2. Oscilaciones longitudinales en un resorte

Sea el sistema de la Fig. 3. Supondremos que la longitud natural de los muelles es a_0 , y que a es la longitud de los mismos cuando el sistema está en equilibrio¹. Tomaremos como eje de las Z el eje horizontal, y como origen la pared que está más a la izquierda.

Veamos cuál sería la ecuación de movimiento de la masa M . Para ello, consideramos un *desplazamiento virtual* del sistema. Esto no es sino un desplazamiento arbitrario de sus partes (en la Fig. 1, hemos elegido desplazar la masa hacia la derecha, hasta un valor de z tal que $2a - z < a_0$). Consistente con él, calcularemos las fuerzas que aparecen, y construiremos las ecuaciones de movimiento de la masa². Ahora, las fuerzas que aparecen sobre la masa son las que se muestran en la Fig. 3. El signo que hemos puesto entre paréntesis nos dice si la fuerza apunta en la dirección positiva o negativa de las z 's y, por tanto, el signo con el que tiene que ir en la ecuación de movimiento.

¹Fijaros que esto implica que existe una tensión en los muelles cuando el sistema está en equilibrio, igual a $T_0 = K(a - a_0)$

²Y tener en cuenta que el desplazamiento virtual es arbitrario. Uno puede suponer el que quiera y, si es consistente a la hora de calcular las fuerzas, la ecuación de movimiento que resulta es siempre la misma.

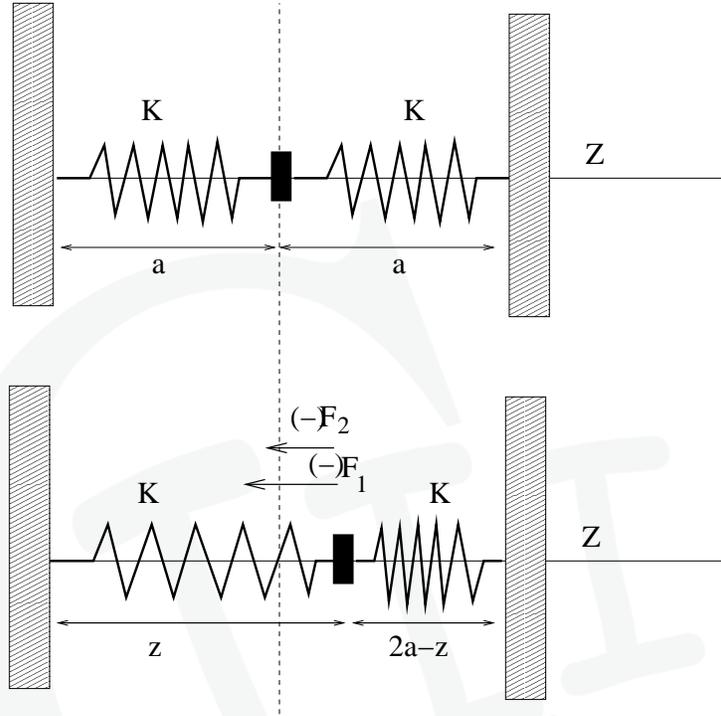


Figura 4.3: Oscilaciones longitudinales en un resorte.

En cuanto a los módulos de F_1 y F_2 , tendremos que el muelle de la izquierda dará lugar a una fuerza con módulo proporcional a la elongación del muelle respecto a su longitud natural:

$$F_1 = K(z - a_0), \quad (4.5)$$

Análogamente, el muelle que se ha comprimido dará lugar a una fuerza con módulo,

$$F_2 = K(a_0 - 2a + z), \quad (4.6)$$

donde hemos escrito el desplazamiento para que salga positivo. Ahora, la ecuación de movimiento de la masa se escribirá incluyendo las fuerzas con su signo correspondiente:

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -K(z - a_0) - K(a_0 - 2a + z) = -2K(z - a). \quad (4.7)$$

o lo que es lo mismo:

$$\ddot{z} + \frac{2K}{M}z = \frac{2Ka}{M}. \quad (4.8)$$

Es decir, es la ecuación de un oscilador armónico que oscila con frecuencia propia $\omega_0 = \sqrt{2K/M}$, pero con el miembro de la derecha diferente de cero. Recordad que esto sucede por que la variable z no representa el desplazamiento de su posición de equilibrio. Como vimos en el tema anterior, es posible convertir la ecuación en una idéntica a la del oscilador armónico si cambiamos de variable:

$$z \rightarrow z' = z - a, \quad (4.9)$$

ya que sabemos, por la figura, que la posición de equilibrio es $z = a$. Para cambiar de variable, basta con sustituir en la Eq. 4.8:

$$z = z' + a, \quad \dot{z} = \dot{z}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}', \quad (4.10)$$

para obtener que:

$$\ddot{z}' + \frac{2K}{M}z' = 0. \quad (4.11)$$

La solución de esta ecuación es, por tanto,

$$z'(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (4.12)$$

donde A y ϕ se determinan de las condiciones iniciales. Y, para obtener $z(t)$ usamos la Eq. 4.10³:

$$z(t) = a + A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (4.13)$$

4.2.3. Oscilaciones transversales en un resorte

Sea el sistema de la Fig. 4, que es idéntico al de la Fig.3 pero en el que vamos a estudiar perturbaciones verticales y no horizontales. Suponiendo de nuevo que la longitud natural de los muelles es a_0 , y que a es la longitud de los mismos cuando el sistema está en equilibrio (en la horizontal), veamos cuál sería la ecuación de movimiento de la masa M . Para ello, escojemos el eje x como el vertical, de modo que $x = 0$ corresponda a la posición de equilibrio.

Suponemos ahora el desplazamiento virtual que se muestra en la figura. En este caso, las fuerzas ejercidas por el resorte van a ser iguales (por ser los dos muelles iguales) y con módulo igual a:

$$F = K(L - a_0) = K(\sqrt{x^2 + a^2} - a_0). \quad (4.14)$$

³NOTA: Fijaros que también podríamos haber resuelto este problema dándonos cuenta que los dos muelles de la figura equivalen a un único muelle con constante $2K$, ya que están conectados en serie!

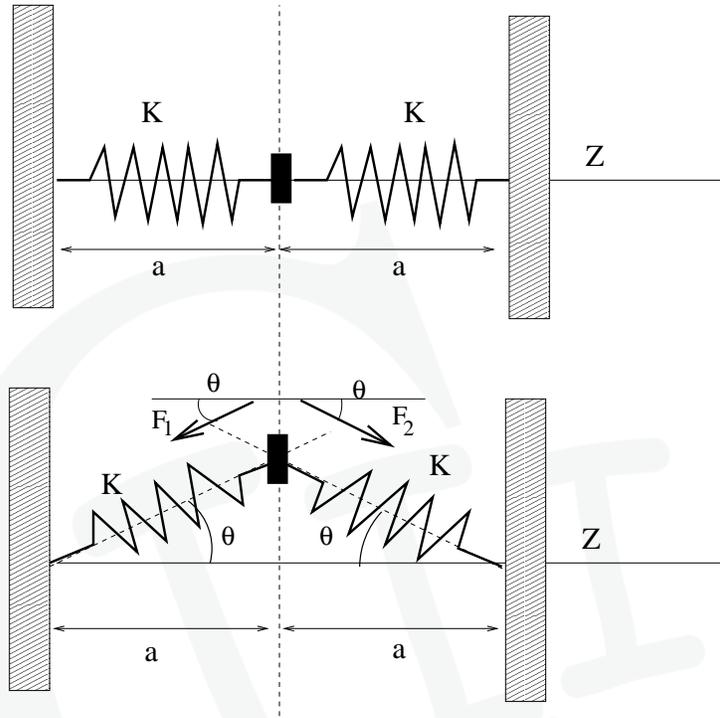


Figura 4.4: Oscilaciones transversales en un resorte.

Ahora bien, las componentes y de ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario, por lo que el único movimiento que existe es en la dirección x . La ecuación de movimiento será, por tanto:

$$M\ddot{x} = -2 \cdot F \cdot \sin\theta = -2 \cdot K(\sqrt{x^2 + a^2} - a_0) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (4.15)$$

donde hemos usado Eq. 4.14 y el hecho de que el seno es cateto opuesto (x) entre hipotenusa (L).

Rearreglando Eq. 4.15 un poco, llegamos a que:

$$\ddot{x} + \frac{2K}{M} \left(1 - \frac{a_0}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) x = 0. \quad (4.16)$$

Esta ecuación no es la del oscilador armónico, ya que el prefactor del segundo término de la parte izquierda de la ecuación no es una constante. Podemos usar entonces la aproximación de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio: $x \ll a$. Entonces,

tenemos que $L^2 = a^2 + x^2 = a^2(1 + (x/a)^2) \simeq a^2$. Por tanto, la Eq. 4.16 se queda en:

$$\ddot{x} + \frac{2K}{M} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) x = 0, \quad (4.17)$$

con lo que el sistema oscila con frecuencia $\omega_0 \simeq \sqrt{2K/M} (1 - a_0/a)^{1/2}$.

4.3. Oscilaciones en sistemas con dos grados de libertad

Como dijimos en la Sec. 4.1, un sistema con dos grados de libertad es aquel que puede describirse totalmente por dos coordenadas independientes cualesquiera. Por ejemplo, el péndulo doble mostrado en la Fig. 2 (izqda.). ¿Cuál será en este caso el tipo de movimiento equivalente a las oscilaciones que acabamos de ver en el caso de sistemas con un sólo grado de libertad? Y más importante... ¿porqué nos preocupa eso? La **razón física** es la más sencilla de razonar. En el caso de los sistemas con un grado de libertad vimos que, si se aplica al sistema una fuerza armónica externa con frecuencia similar a la frecuencia propia de oscilación del sistema, el sistema puede entrar en resonancia. Es decir, la fuerza es capaz de transmitir energía al sistema de manera muy eficiente. Y vimos también que las aplicaciones prácticas de las resonancias son realmente importantes [por ejemplo, el microondas]. ¿Existen resonancias en sistemas de más de un grado de libertad?

La respuesta es que sí, ya que los sistemas con más de un grado de libertad también tienen *frecuencias propias*, para las cuales todas las partes del sistema pueden oscilar simultáneamente en fase. Como veremos, **el número de frecuencias propias distintas del sistema es igual al número de grados de libertad del sistema**. Y al movimiento (oscilatorio) del sistema que tiene lugar con esas frecuencias se le conoce como **modo normal**⁵.

⁴Es interesante escribir la frecuencia de oscilación en el caso transversal recordando que la tensión que había en los muelles en la posición de equilibrio era $T_0 = K(a - a_0)$. De esta forma se obtiene:

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{2T_0}{aM}}, \quad (4.18)$$

que depende, por tanto, de la tensión. Es bueno tener este resultado a mano para cuando veamos las vibraciones en la cuerda, al final del tema.

⁵Fijaros que, si se aplica ahora una fuerza externa armónica cuya frecuencia coincida con cualquiera de estas frecuencias propias, tendremos resonancia y podremos comunicar energía al sistema de manera muy eficiente!

Para entender mejor como se calculan y qué significan estos modos normales y las frecuencias propias asociadas, lo mejor es mirar varios ejemplos concretos. Comenzaremos con las versiones de dos grados de libertad de los dos sistemas que acabamos de estudiar:

4.3.1. Osciladores longitudinales acoplados

Vamos a construir las ecuaciones de movimiento de las dos masas de la Fig. 5. Fijaros que es un sistema de dos grados de libertad, ya que su posición viene determinada por las coordenadas z_1 Y z_2 .

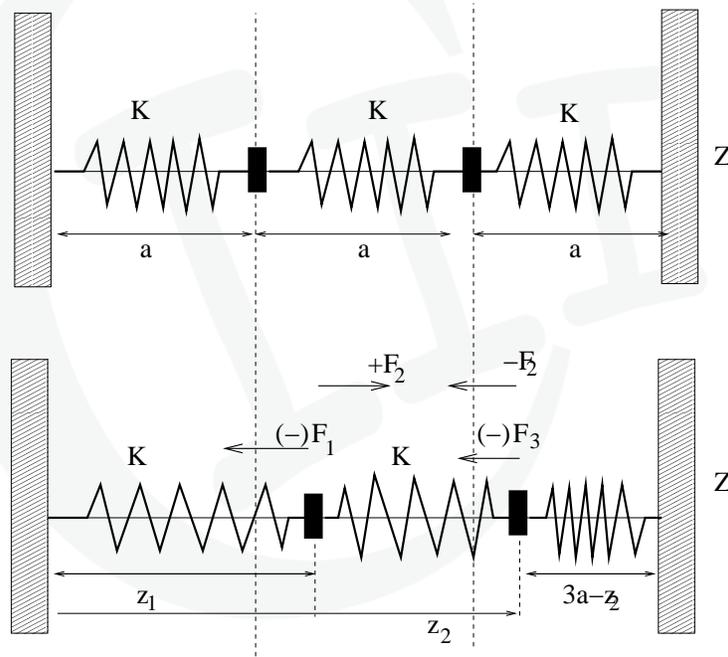


Figura 4.5: Oscilaciones en un sistema de dos osciladores longitudinales.

Fijaros también que las distancias de equilibrio entre las masas es siempre a , mientras que las longitudes naturales de cada muelle son a_0 . Calculemos las fuerzas. Para ello, supongamos el siguiente desplazamiento virtual: que la primera masa se pone en z_1 , y la segunda en z_2 , y supondremos también que $z_1 > a_0$ y que $z_2 - z_1 > a_0$ y que $3a - z_2 < a_0$.

Los sentidos de las fuerzas que aparecen se muestran en la Fig. 5. El módulo de la fuerza que el muelle que está más a la izquierda hace sobre la primera masa será:

$$F_1 = K(z_1 - a_0), \quad (4.19)$$

La segunda fuerza sobre la primera masa la hace el muelle de enmedio. Su módulo será igual a:

$$F_2 = K(z_2 - z_1 - a_0), \quad (4.20)$$

ya que $z_2 - z_1$ es la longitud del muelle intermedio, y a_0 su longitud natural.

La ecuación de movimiento de la primera masa es, incluyendo el signo correcto de cada fuerza:

$$M\ddot{z}_1 = -K(z_1 - a_0) + K(z_2 - z_1 - a_0) = Kz_2 - 2Kz_1. \quad (4.21)$$

En cuanto a la segunda masa, la fuerza que hace sobre ella el muelle de enmedio es igual en módulo que la que hace sobre la primera masa. En cuanto a la fuerza que hace el tercer muelle, será igual en módulo a:

$$F_2 = K(a_0 - (3a - z_2)). \quad (4.22)$$

Por lo tanto, la ecuación para la segunda masa queda:

$$M\ddot{z}_2 = -K(z_2 - z_1 - a_0) + K(3a - z_2 - a_0) = Kz_1 - 2Kz_2 + 3Ka. \quad (4.23)$$

Es decir, las ecuaciones de movimiento del sistema vienen dadas por:

$$\begin{cases} M\ddot{z}_1 = Kz_2 - 2Kz_1 \\ M\ddot{z}_2 = Kz_1 - 2Kz_2 + 3Ka \end{cases} \quad (4.24)$$

que son el equivalente a la Eq. 4.8, pero para el caso de dos grados de libertad.

¿Que hacemos con ésto? Bueno, pensemos en lo que hacíamos en el caso de un grado de libertad para obtener la ecuación del oscilador armónico: tuvimos que cambiar de variable, y usar z' que representaba el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio. En nuestro problema, las posiciones de equilibrio son $z_1^{eq} = a$ y $z_2^{eq} = 2a$. Definiremos, por tanto, dos nuevas variables:

$$z'_1 = z_1 - a, \quad z'_2 = z_2 - 2a, \quad (4.25)$$

de modo que z'_1 y z'_2 dan el desplazamiento de cada masa de su posición de equilibrio. Si escribimos las Eq. 4.24 en términos de estas variables, (recordar, haciendo los cambios $z_1 = z'_1 + a$, $\dot{z}_1 = \dot{z}'_1$ y $\ddot{z}_1 = \ddot{z}'_1$, y para la segunda, $z_2 = z'_2 + 2a$, $\dot{z}_2 = \dot{z}'_2$ y $\ddot{z}_2 = \ddot{z}'_2$):

$$\begin{cases} M\ddot{z}'_1 = Kz'_2 - 2Kz'_1 \\ M\ddot{z}'_2 = Kz'_1 - 2Kz'_2 \end{cases} \quad (4.26)$$

y que son las ecuaciones equivalentes a la Eq. 4.8 del caso con un solo grado de libertad.

Ya estamos en disposición de encontrar los modos normales del sistema. Como dijimos en la introducción, estos modos corresponden a movimientos en los que todas las partes del sistema vibran simultáneamente en fase. Esto, matemáticamente, quiere decir que los movimientos vienen representados por funciones de la forma:

$$z'_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi), \quad z'_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi), \quad (4.27)$$

para la misma frecuencia ω y la misma fase ϕ . Como veremos, solo hay **dos** posibles valores de ω para los que esto es posible, y al movimiento dado por Eq. 4.27 para cada una de estas dos frecuencias se le llama modo normal del sistema.

Para ver que solo hay dos, basta con sustituir la Eq. 4.27 en las ecuaciones de movimiento (Eq. 4.26), y ver cuales son los posibles valores de ω que las hacen compatibles. Para ello, calculamos:

$$\ddot{z}'_1 = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t + \phi), \quad \ddot{z}'_2 = -A_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi), \quad (4.28)$$

y lo metemos todo en la Eq. 4.26:

$$\begin{cases} -MA_1 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) = KA_2 \cos(\omega t + \phi) - 2KA_1 \cos(\omega t + \phi) \\ -MA_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) = KA_1 \cos(\omega t + \phi) - 2KA_2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (4.29)$$

Fijaros que podemos quitar los cosenos, y reagrupar para obtener que:

$$\begin{cases} (2K - M\omega^2)A_1 - KA_2 = 0 \\ -KA_1 + (2K - M\omega^2)A_2 = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Fijaros que este es un sistema lineal, de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si las ecuaciones son independientes, la solución es única. Y como $A_1 = A_2 = 0$ es solución, sería la única y no habría movimiento alguno. Para que esto no suceda, y exista una solución con amplitudes no nulas, las dos ecuaciones han de ser linealmente dependientes. Para ello, el determinante de los coeficientes tiene que ser nulo:

$$\begin{vmatrix} (2K - M\omega^2) & -K \\ -K & (2K - M\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

que, desarrollándolo, es una ecuación de segundo grado para la frecuencia ω :

$$(2K - M\omega^2)(2K - M\omega^2) - K^2 = 0, \quad (4.32)$$

que tiene dos soluciones:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{M}}. \quad (4.33)$$

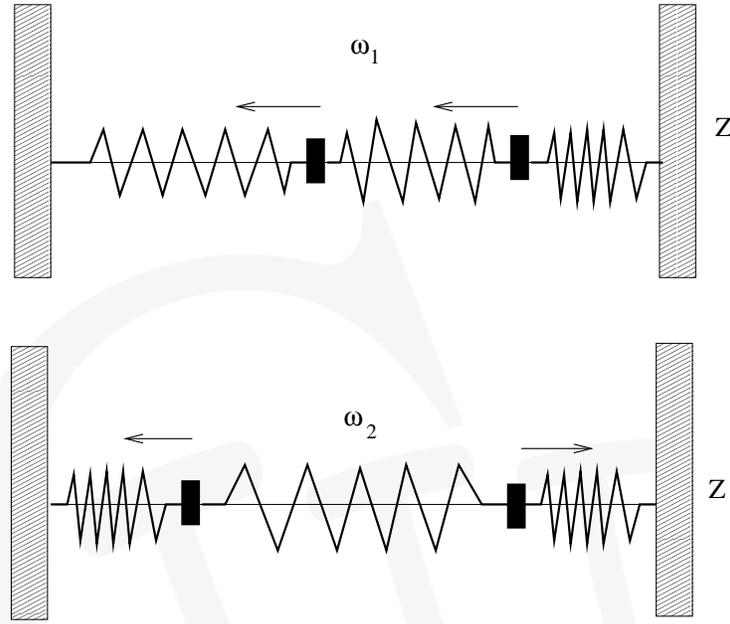


Figura 4.6: Modos normales en un sistema de dos osciladores longitudinales acoplados. Arriba: primer modo normal; Abajo: segundo modo normal.

Estas son, por tanto, las únicas dos frecuencias para las que es posible encontrar un movimiento oscilatorio de las partes del sistema (modos normales).

ω_1 y ω_2 son las **frecuencias características** del sistema de dos grados de libertad. ¿Pero cómo se mueven las masas en cada caso? Para el caso $\omega = \omega_1 = \sqrt{K/M}$, podemos encontrar ahora la relación entre A_1 y A_2 de cualquiera de las dos ecuaciones que aparecen en Eq. 4.30:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{K}{2K - M\omega_1^2} = \frac{K}{2K - K} = 1. \quad (4.34)$$

Es decir, $A_1 = A_2 = A$. Por lo tanto, los desplazamientos de las dos masas serán:

$$z'_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi), \quad z'_2(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi). \quad (4.35)$$

O lo que es lo mismo, $z'_1(t) = z'_2(t)$. El movimiento es como se muestra en la Fig. 6 (arriba). Las dos masas se mueven a izquierda y derecha simultáneamente. Este es el primer modo normal.

El segundo modo normal corresponde a $\omega = \omega_2 = \sqrt{3K/M}$. En este caso, usando de

nuevo cualquiera de las dos ecuaciones que aparecen en Eq. 4.30, obtenemos que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{K}{2K - M\omega_2^2} = \frac{K}{2K - 3K} = -1. \quad (4.36)$$

Es decir, $A_1 = A$ y $A_2 = -A$. El movimiento de las masas es entonces:

$$z_1'(t) = A\cos(\omega_2 t + \phi), \quad z_2'(t) = -A\cos(\omega_2 t + \phi), \quad (4.37)$$

o lo que es lo mismo, $z_1'(t) = -z_2'(t)$. Es decir, cuando la primera masa se mueve hacia la izquierda, la otra lo hace hacia la derecha y viceversa (Fig. 6 (abajo)).

4.3.2. Osciladores transversales acoplados

Ahora, vamos a construir las ecuaciones de movimiento de las dos masas de la Fig. 5, pero cuando se mueven en la dirección transversal (Fig. 7). Fijaros que es de nuevo un sistema de dos grados de libertad, ya que su posición viene determinada por las coordenadas x_1 y x_2 .

Supondremos ahora el desplazamiento virtual que se muestra en la Fig.7, y llamaremos L_1 , L_2 y L_3 a las longitudes de los tres muelles (de izquierda a derecha). Igual que hicimos antes, fijaros que el módulo de la fuerza que hace el primer muelle sobre la primera masa es:

$$F_1 = K(L_1 - a_0). \quad (4.38)$$

El módulo de la fuerza que hace el segundo muelle es:

$$F_1 = K(L_2 - a_0), \quad (4.39)$$

y la del tercer muelle:

$$F_1 = K(L_3 - a_0). \quad (4.40)$$

Igual que en el caso con un grado de libertad, en las oscilaciones transversales, solo actúan las componentes verticales de cada una de estas fuerzas. Estas serán igual a:

$$F_{1y} = K(L_1 - a_0) \cdot \sin\theta_1 = K(\sqrt{a^2 + x_1^2} - a_0) \cdot \frac{x_1}{\sqrt{a^2 + x_1^2}} \simeq K(a - a_0) \frac{x_1}{a}, \quad (4.41)$$

donde hacemos la misma aproximación de pequeñas oscilaciones que hicimos en el caso del oscilador transversal con un grado de libertad: $a \gg x_1, x_2$.

Haciendo lo mismo, podemos calcular las componentes verticales de las otras dos fuerzas:

$$F_{2y} \simeq K(a - a_0) \frac{x_1 - x_2}{a}, \quad F_{3y} \simeq K(a - a_0) \frac{x_2}{a}. \quad (4.42)$$

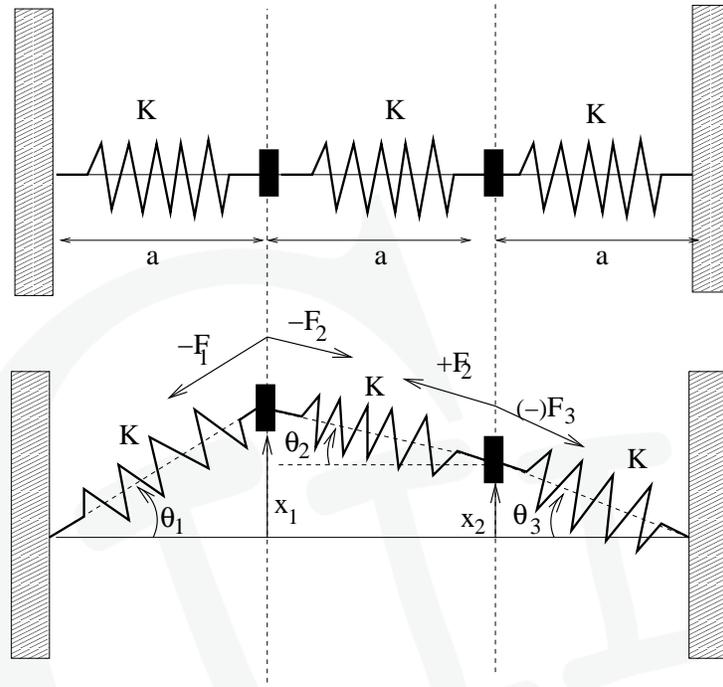


Figura 4.7: Oscilaciones en un sistema de dos osciladores transversales.

Una vez hecho esto, podemos escribir la ecuación de movimiento de la primera masa:

$$M\ddot{x}_1 = -K(a - a_0)\frac{x_1}{a} - K(a - a_0)\frac{x_1 - x_2}{a}, \quad (4.43)$$

donde ambos signos menos aparecen ya que las dos fuerzas tienden a reducir x_1 . Para la segunda masa,

$$M\ddot{x}_2 = -K(a - a_0)\frac{x_2}{a} + K(a - a_0)\frac{x_1 - x_2}{a}, \quad (4.44)$$

donde el signo positivo de la segunda fuerza se pone por que el segundo muelle tira hacia arriba de la segunda masa.

Reescribiendo este par de ecuaciones juntas se llega a:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -\frac{K(a - a_0)}{a} [2x_1 - x_2] \\ M\ddot{x}_2 = -\frac{K(a - a_0)}{a} [-x_1 + 2x_2] \end{cases} \quad (4.45)$$

que son equivalentes a la Eq. 4.17 que ya obtuvimos en el caso de un sólo grado de libertad. Igual que entonces, no tenemos que hacer cambio alguno de variable, ya que x_1 y x_2 sí representan el desplazamiento de la posición de equilibrio de cada masa.

Y ya estamos de nuevo en disposición de buscar las frecuencias propias y los modos normales del sistema ⁶.

Vamos a buscarlos como antes, viendo que valores de ω hacen válidas soluciones del tipo:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi), \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi). \quad (4.46)$$

Para ello, introducimos estas expresiones en la Eq. 4.45 para obtener que:

$$\begin{cases} -MA_1\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\frac{K(a - a_0)}{a} [2A_1\cos(\omega t + \phi) - A_2\cos(\omega t + \phi)] \\ -MA_2\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\frac{K(a - a_0)}{a} [-A_1\cos(\omega t + \phi) + 2A_2\cos(\omega t + \phi)] \end{cases} \quad (4.47)$$

Quitando los cosenos, y reagrupando, obtenemos:

$$\begin{cases} \left[\frac{2K(a - a_0)}{a} - M\omega^2 \right] A_1 - \frac{K(a - a_0)}{a} A_2 = 0 \\ -\frac{K(a - a_0)}{a} A_1 + \left[\frac{2K(a - a_0)}{a} - M\omega^2 \right] A_2 = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Y tenemos el mismo problema que antes. Únicamente, cuando el determinante de los coeficientes es nulo, puede haber soluciones con A_1 y A_2 diferentes de cero. Este determinante da una ecuación cuadrática para ω :

$$\left[\frac{2K(a - a_0)}{a} - M\omega^2 \right] \cdot \left[\frac{2K(a - a_0)}{a} - M\omega^2 \right] - \left(\frac{K(a - a_0)}{a} \right)^2 = 0, \quad (4.49)$$

que tiene como soluciones:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(a - a_0)}{Ma}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3K(a - a_0)}{Ma}}. \quad (4.50)$$

Nótese que la cantidad $K(a - a_0) = T_0$ es la tensión que hay originalmente en los muelles, cuando están en equilibrio. Por eso, vamos a reescribir las frecuencias como:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_0}{Ma}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3T_0}{Ma}}. \quad (4.51)$$

⁶Fijaros que aquí no hay que cambiar de variable, ya que x_1 y x_2 ya describen desplazamientos de la posición de equilibrio, que está en $x_1 = x_2 = 0$.

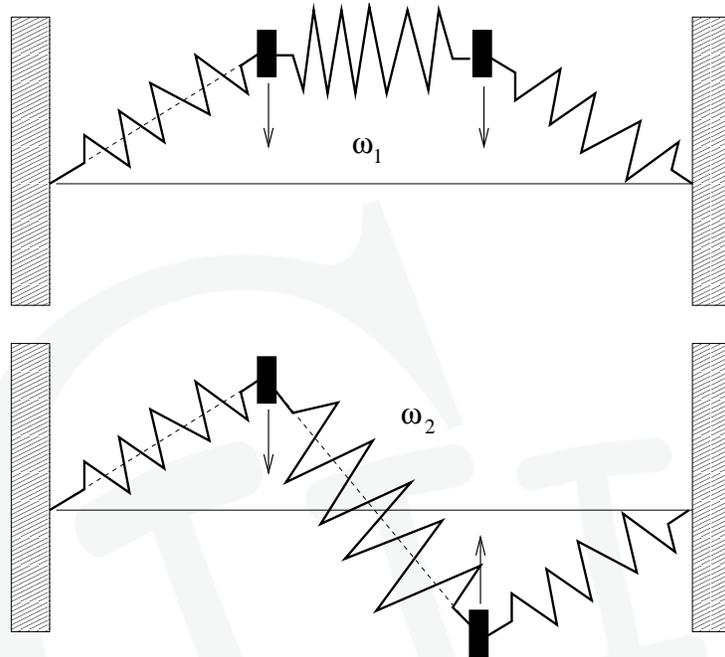


Figura 4.8: Modos normales de un sistema de dos osciladores transversales.

Ahora, para ver como es el movimiento de las masas, hemos de insertar estos valores de las frecuencias en cualquiera de las Eq. 4.48, como ya hicimos en el caso de las oscilaciones longitudinales. El resultado es para:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 1, \quad (4.52)$$

mientras que para

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3T_0}{Ma}} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = -1. \quad (4.53)$$

¿A que movimientos corresponden? Véase la Fig. 8, y pensad un poco.

4.3.3. Importancia de los modos normales

Como ya hemos repetido varias veces, la importancia de los modos normales de un sistema es grande. Desde una perspectiva más física, ya hemos mencionado que a cada

uno de ellos hay asociada una frecuencia propia de oscilación con la que puede resonar una fuente externa. Pero esto no es el único motivo por el que son importantes.

Matemáticamente es posible ver que toda ecuación diferencial de segundo orden, como son todas las ecuaciones de movimiento que hemos visto, tiene sólo **dos soluciones independientes**. Miremos, por ejemplo, el caso del oscilador armónico del tema anterior:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (4.54)$$

Esta ecuación es de segundo orden, por ser su derivada más alta la segunda. Por ello, pudimos entonces escribir su solución general como:

$$x(t) = C_1 \text{sen}(\omega t) + C_2 \text{cos}(\omega t) = A \text{cos}(\omega t + \phi), \quad (4.55)$$

como ya discutimos. La manera de interpretar esto es, fijándonos en la parte intermedia de la igualdad, que tanto $\text{sen}\omega t$ como $\text{cos}\omega t$ son soluciones de la Eq. 4.55. Al ser independientes y ser dos, cualquier otra solución posible (y por tanto, todo movimiento posible del péndulo) es combinación lineal de ambas. De ahí los coeficientes C_1 y C_2 (ó A y ϕ). Cuales son los valores concretos de los dos coeficientes (y, por tanto, como será el movimiento), depende sólo las condiciones iniciales como ya estudiamos.

En el caso de sistemas con dos grados de libertad, las ecuaciones de movimiento que hemos encontrado (por ejemplo, la Eq. 4.26 o la Eq. 4.45) son también de segundo orden. Por ello, si tenemos dos soluciones independientes (los modos normales), cualquier solución de las mismas tiene que ser combinación lineal de ellas. Y fijaros que esto es verdad para cualquier tipo de movimiento permitido por el sistema, aunque no sea oscilatorio! Por ejemplo, en el caso de las oscilaciones transversales (Sec. 4.3.2), la solución más general del movimiento será:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{T_0}{Ma}}t + \phi_1) \\ \cos(\sqrt{\frac{T_0}{Ma}}t + \phi_1) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{3T_0}{Ma}}t + \phi_2) \\ -\cos(\sqrt{\frac{3T_0}{Ma}}t + \phi_2) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Fijaros que quedan cuatro incógnitas por determinar, C_1 , C_2 , ϕ_1 y ϕ_2 , que vienen dadas por las dos posiciones y dos velocidades iniciales de las dos masas.

Por lo tanto, los modos normales no sólo nos dicen cuales son las frecuencias en las que el sistema puede resonar, sino también **nos dan un método para integrar las ecuaciones del movimiento del sistema!**

4.4. Sistema con infinitos grados de libertad. Ecuación de ondas.

En esta sección vamos a estudiar que pasa con los modos normales del sistema cuando el número de grados de libertad aumenta. Es más, vamos a ver que sucede cuando dicho número crece hasta infinito.

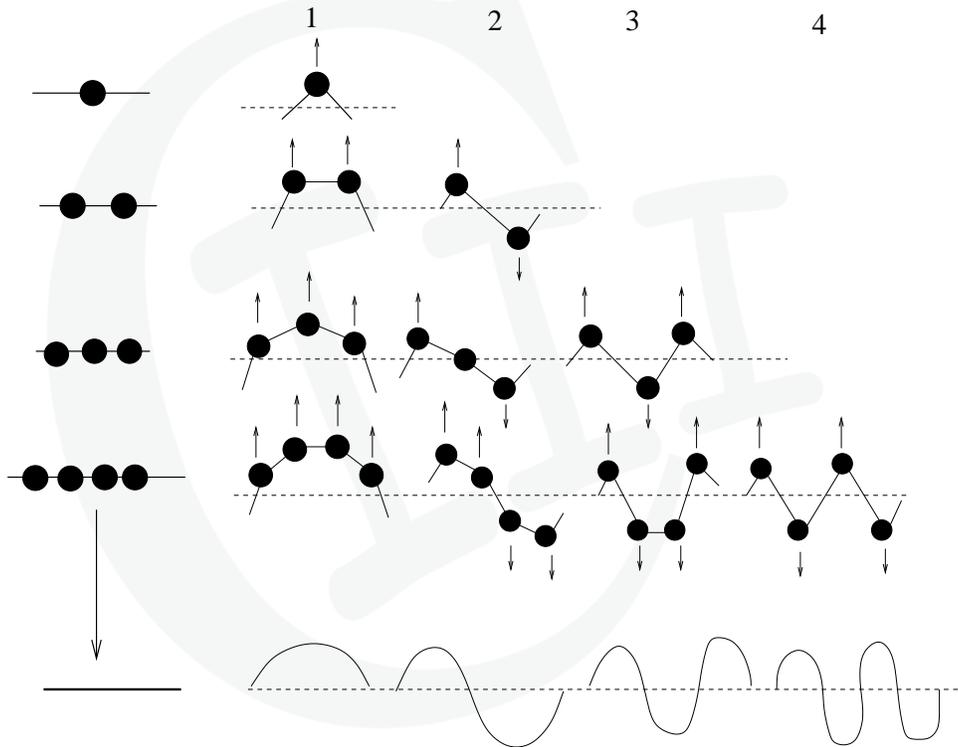


Figura 4.9: Modos normales de sistemas de osciladores transversales con un número creciente de grados de libertad. Límite continuo.

Para hacerlo, vamos a usar un ejemplo concreto: el caso de los osciladores transversales que ya vimos en la Sec. 4.3.2 para dos grados de libertad. Fijaros que, en ese caso, el número de grados de libertad coincide con el número de masas que tenemos acopladas. A medida que dicho número aumenta, tendremos cada vez más masas (ver Fig. 9). Cuando tenemos N , el sistema tiene N grados de libertad y, como ya dijimos, el número de modos normales (vibraciones coherentes en fase de todas las partes del sistema) es también N . Cada modo tiene su propia frecuencia y su propia forma. Por ejemplo, en la Fig. 9 se

muestran los modos normales de los sistemas de osciladores con $N = 1, 2, 3$ y 4 (ver las cuatro primeras filas de la figura). El círculo negro corresponde a la(s) masas, mientras que las líneas negras que los unen, serían los resortes o muelles. Las flechas indican el movimiento de las masas para cada modo normal. Así, por ejemplo, en el caso de un grado de libertad lo único que pasa es que la masa oscila arriba y abajo. En el caso de dos grados de libertad, que estudiamos en la Sec. 4.3.2 hay dos modos, uno en el que las dos masas suben a la vez, y otra que van contrapeadas. A medida que vamos subiendo el número de masas (y resortes) aparecen más modos, como se ve en la figura.

¿Que pasa si vamos al límite en el que hay infinitas masas y resortes? Dicho límite corresponde a una cuerda que puede oscilar transversalmente (última fila de la Fig. 9), y es el caso que vamos a estudiar en esta sección. Mirando cada columna de la figura pueden imaginarse fácilmente cuales van a ser los (infinitos) modos normales de la cuerda que. Como veremos, es fácil clasificarlos usando el número de veces que la cuerda cruza la horizontal (exceptuando sus extremos). Así, el primer modo (columna 1) no cruza ninguna vez, el segundo (columna 2) cruza una vez, el tercero (columna 3) dos veces, y así, hasta infinito. Veamos como se encuentran estas soluciones matemáticamente!

Para hacerlo, seguiremos el mismo camino que en la Sec. 4.3.2 ya recorrimos para encontrar los modos normales del sistema de dos osciladores transversales. Primero, introdujimos coordenadas que nos decían donde estaban los osciladores: las variables x_1 y x_2 . Luego, supusimos un desplazamiento virtual de los osciladores, buscamos las fuerzas que actuaban sobre cada uno de ellos, y construimos la ecuación de movimiento de los mismos. Una vez hecho esto, miramos cuales eran las posibles soluciones oscilatorias que admitían dichas ecuaciones, y veíamos que no valía cualquier valor de ω . Hagamos lo mismo con la cuerda:

4.4.1. Descripción de la posición de la cuerda

Como decíamos, lo primero es ser capaz de decir donde está la cuerda igual que antes localizabamos los osciladores mediante las coordenadas x_1 y x_2 (ver Fig. 7). Fijaros que si en vez de dos, tuvieramos tres osciladores necesitaríamos explicitar tres coordenadas x_1 , x_2 y x_3 . ¿Como cuantificaremos cuánto se ha desplazado la cuerda sobre la horizontal? Fijémonos para ello en la Fig. 10.

En ella, mostramos una cuerda. Para determinar donde está, dividimos la cuerda en pequeños elementos diferenciales de cuerda, de longitud dz . E introducimos una función, $h(z)$, que en el punto z toma el valor de la altura del trocito de cuerda dz que está en dicho punto. Fijaros que la función $h(z)$ no es otra cosa que el límite al que tiende el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ de coordenadas que me da las posiciones respecto a la horizontal de cada uno de N osciladores cuando N va a infinito: el subíndice es sustituido por la

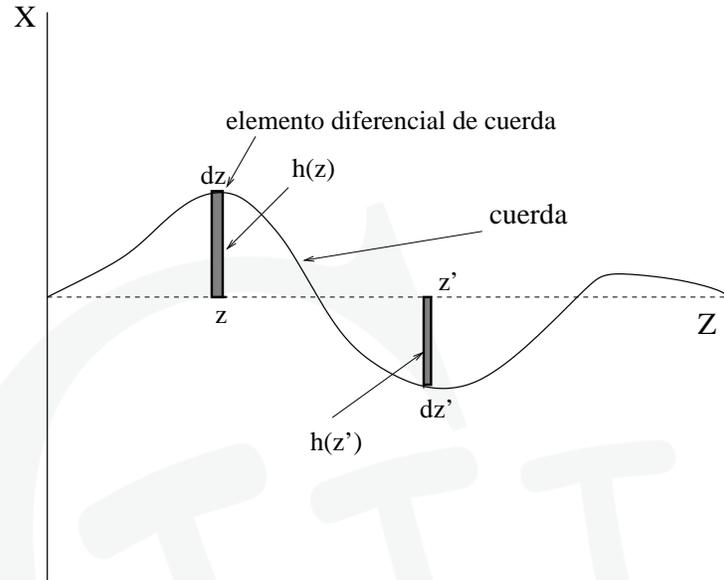


Figura 4.10: Definición de la posición de una cuerda respecto a la horizontal.

variable continua z , y la altura de cada oscilador, x_k , por la función $h(z)$.

Ahora bien, igual que la posición de los osciladores puede cambiar, también puede variar la altura de la cuerda. Por tanto, tendremos que permitir a la función $h(z)$ que sea una función no sólo de z , el punto donde estamos mirando, sino también del tiempo t en que miremos:

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\} \rightarrow h(z, t) \quad (4.57)$$

4.4.2. Ecuación de movimiento de la cuerda: ecuación de ondas

Sigamos recordando como procedíamos en el caso de los osciladores para encontrar los modos normales. Lo que hacíamos era escribir la ecuación de movimiento para cada una de las masas del sistema:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= \dots \text{fuerzas} \dots \\ M\ddot{x}_2 &= \dots \text{fuerzas} \dots \\ M\ddot{x}_3 &= \dots \text{fuerzas} \dots \\ &\dots \dots \dots \\ M\ddot{x}_N &= \dots \text{fuerzas} \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

donde en el lado de la derecha de cada ecuación poniamos las fuerzas que actuaban sobre ese oscilador en concreto.

Ahora, cada uno de los elementos diferenciales de cuerda dz juega el papel de uno de los osciladores. Por lo tanto, tendremos que escribir la ecuación de movimiento de cada elemento de cuerda. Lo primero que nos hace falta es la masa del trozo de cuerda, la cual se puede calcular suponiendo que la cuerda tiene una **densidad lineal de masa** ρ_0 . Por tanto, la masa del trozo de cuerda será $dm = \rho_0 dz$. En cuanto a la aceleración del trozo de cuerda, recordad que su posición (altura) viene dado por $h(z, t)$. La aceleración, que es la segunda derivada de la posición respecto del tiempo. Pero, como h depende de dos argumentos, tendrá que ser una derivada parcial:

$$M\ddot{x}_k \rightarrow \rho_0 dz \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial t^2}. \quad (4.59)$$

Nos falta ahora calcular cual es la fuerza que actúa sobre el mismo trozo de cuerda. Para ello, nos valemos de la Fig. 11:

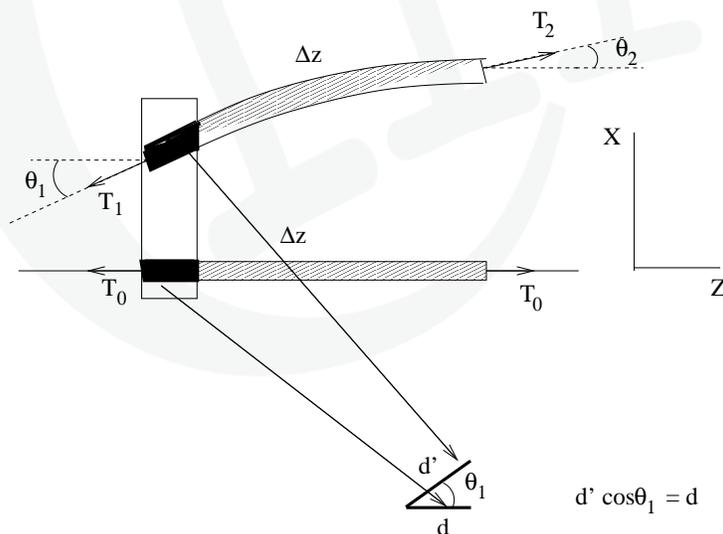


Figura 4.11: Fuerzas que actúan sobre un diferencial de cuerda. **Abajo dcha.:** detalle que muestra la relación geométrica entre la deformación en la cuerda en equilibrio (d) y tras el desplazamiento virtual (d').

En ella, hemos pintado el elemento diferencial de cuerda en equilibrio (abajo) y para un desplazamiento virtual arbitrario (arriba). En equilibrio la cuerda tendrá una tensión

T_0 [similar a la tensión que vimos que había en los muelles del sistema de dos osciladores cuando estaba en equilibrio]. Al desplazarlo, los extremos de la cuerda sentirán tensiones T_1 (izqda) y T_2 (dcha), que formarán además ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal, como se muestra en la figura. Fijaros que el segmento deformado no tiene porqué ser recto y, por ello, los dos ángulos no tienen porqué ser iguales. Lo que nos interesa ahora es la componente vertical resultante de las dos tensiones, que es la que va a ser responsable de que el elemento diferencial de cuerda suba o baje. Esta componente es, de la figura:

$$F_x = T_2 \operatorname{sen}\theta_2 - T_1 \operatorname{sen}\theta_1. \quad (4.60)$$

Ahora tenemos en cuenta dos cosas. Primero, fijaros que la tensión en la cuerda es proporcional a cuanto se ha estirado. Por ello, comparando las longitudes de los segmentos en reposo y estirado (ver el detalle en la parte inferior derecha de la Fig. 11), podemos relacionar las tensiones T_2 (ó T_1) y T_0 , ya que éstas deben guardar entre sí la misma relación que existe entre estos desplazamientos. Se tiene, por tanto, que:

$$T_2 \cos\theta_2 = T_0, \quad \text{y} \quad T_1 \cos\theta_1 = T_0, \quad (4.61)$$

luego, escribiendo T_2 y T_1 en función de T_0 podemos reescribir la Eq. 4.60 como:

$$F_x = T_0 \tan\theta_2 - T_0 \tan\theta_1. \quad (4.62)$$

Y segundo: recordando cuál es el significado geométrico de la derivada, fijaros que:

$$\tan\theta_2 = \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_2 \quad \text{y} \quad \tan\theta_1 = \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_1. \quad (4.63)$$

Por ello, podemos reescribir Eq. 4.60 como:

$$F_x \simeq T_0 \left[\left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_2 - \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_1 \right], \quad (4.64)$$

que nos dice que la fuerza que siente, en la dirección vertical, el segmento de cuerda dz situado en el punto z , depende de las derivadas de h respecto a z en los puntos $z - dz/2$ y $z + dz/2$.

Ya estamos en condiciones de escribir la ecuación de movimiento para el elemento diferencial de cuerda dz sin más que igualar el producto de masa por aceleración dado por la Eq. 4.59 con la fuerza que acabamos de calcular:

$$\rho_0 dz \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial t^2} = T_0 \left[\left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_2 - \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_1 \right]. \quad (4.65)$$

Para acabar, vamos a pasar ahora a la derecha ρdz , con lo que la ecuación de movimiento para dz se convierte en:

$$\frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\left[\frac{\partial h}{\partial z} \Big|_2 - \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_1 \right]}{dz}, \quad (4.66)$$

y fijaros que, si tomamos ahora el límite en el que el trocito de cuerda dz se hace infinitamente pequeño ($dz \rightarrow 0$), la segunda fracción no es sino la segunda derivada de la altura respecto a z de h en el punto z :

$$\frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial z^2}. \quad (4.67)$$

Bueno, pues esta es la ecuación que buscamos: **la ecuación de ondas**. Y fijaros que no es más que la expresión que toma la segunda ley de Newton para la cuerda en cuestión. Por tanto, es la forma que toma el límite continuo del conjunto de ecuaciones de movimiento (Eq. 4.58) para el conjunto de N osciladores transversales.

4.4.3. Buscando los modos normales

Llegamos entonces al último paso. ¿Cómo buscamos ahora los modos normales de la cuerda? En el caso de los dos osciladores transversales, una vez que teníamos las dos ecuaciones (acopladas) de movimiento (ver Eq. 4.45) nos pusimos a buscar si existía alguna solución en el que los dos osciladores oscilaran en fase. Para ello, buscamos soluciones del tipo (ver Eq. 4.46):

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi), \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi), \quad (4.68)$$

de forma que la posición de ambos osciladores variara con el mismo coseno.

En el caso de la cuerda vamos a hacer lo mismo. Vamos a coger la ecuación de ondas (Eq. 4.67), que juega el papel de las Eq. 4.45, y vamos a buscar soluciones que sean las equivalentes a la Eq. 4.68, y que representen a movimientos en que la cuerda entera oscile en fase. ¿Qué forma tomarán las soluciones que representan este tipo de movimiento? Como hemos dicho antes, en el caso de la cuerda, la posición (altura) de cada elemento de cuerda dz lo da $h(z, t)$. Por lo tanto, si las posiciones de todos los elementos de la cuerda tienen que variar con el mismo coseno, $h(z, t)$ tiene que tener la forma:

$$h(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \phi). \quad (4.69)$$

Es decir, fijaros que lo que hemos hecho ha sido sustituir el conjunto de amplitudes de los N osciladores $\{A_1, A_2, \dots\}$ por la función $A(z)$ que me da la amplitud con la que oscila el elemento de cuerda dz que está situado en z . Es decir, $A(z)$ es a estas amplitudes como $h(z)$ era a la posición de cada oscilador $x_k(t)$!

Igual que ya pasaba en el caso de los dos osciladores, el suponer una forma concreta para el desplazamiento de éstos no significa que tal desplazamiento pueda ser realizado por el sistema. En el caso de la cuerda, la forma para $h(z, t)$ dado por la Eq. 4.69 solo representará un movimiento oscilatorio permitido para la cuerda si es capaz de ser solución de la ecuación de ondas (Eq. 4.67). El exigir este hecho va imponer condiciones sobre los posibles valores de ω (es decir, nos dará las frecuencias propias de vibración de la cuerda) y sobre la forma de $A(z)$ (que nos dará la forma de los modos que ya intuimos en la última fila de la Fig. 9). De esta forma, encontraremos los modos normales de la cuerda.

Bueno, pues procedamos. Para ver que condición impone sobre la forma dada por Eq. 4.69 el forzarla a ser solución de la ecuación de ondas basta con sustituirla en la Eq. 4.67. Para ello, necesitamos calcular primero:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \phi), \quad (4.70)$$

y también,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \cos(\omega t + \phi). \quad (4.71)$$

Ahora, lo metemos en la ecuación de ondas (Eq. 4.67):

$$-\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \phi) = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \cos(\omega t + \phi). \quad (4.72)$$

Fijaros que podemos eliminar los cosenos, con lo que nos queda que las formas permitidas para $A(z)$ serán aquellas que verifiquen:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + \omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z) = 0. \quad (4.73)$$

Bueno. Lo primero que llama la atención es que esta ecuación es formalmente idéntica a la del oscilador armónico: tenemos que la segunda derivada de A (respecto de z) más una constante positiva ($\omega^2 \rho_0 / T_0$) por A es igual a cero. Cierto es que la derivada no es respecto al tiempo t , sino respecto a la coordenada espacial z , pero a parte de eso la ecuación es formalmente idéntica. Y por tanto, la solución será la misma, sin más que cambiar t por z :

$$A(z) = A \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{T_0}} \omega z \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{T_0}} \omega z \right). \quad (4.74)$$

Y fijaros que, de momento, hemos podido proceder sin que aparezca una condición concreta que limite las posibles frecuencias. Es decir, la Eq. 4.74 es en principio válida para cualquier valor de ω . Antes de proceder, discutamos un poco que significa esta solución. En concreto, fijémonos en la cantidad:

$$k \equiv \sqrt{\frac{\rho}{T_0}} \omega. \quad (4.75)$$

Esta cantidad juega el papel de la antigua frecuencia ω_0 del oscilador armónico. Pero fijaros que la variable independiente ahora no es el tiempo, sino la distancia z . Por tanto, el significado físico de k es parecido a la frecuencia, pero en el espacio. Es decir, si la frecuencia nos daba el número de ciclos que oscilaba la masa en un segundo, k nos da el número de máximos que nos encontramos en $A(z)$ cuando nos movemos un metro a lo largo de la cuerda. Se le llama **número de onda**. Asociada a ella, y de forma totalmente análoga a como se calcula el periodo de una señal, se introduce la **longitud de onda**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (4.76)$$

que nos da la distancia que hay que recorrer en la cuerda para pasar de un máximo al siguiente (o dos mínimos, o dos puntos cualesquiera en el mismo estado de oscilación).

Bueno, pues ¿dónde está entonces la condición que me va a decir cuales son los valores de ω están permitidos? Bueno, pues de fijarse en los **extremos de la cuerda**.

Extremos fijos:

Supongamos primero que la cuerda tiene una longitud L , y que está fija por sus dos extremos (es decir, para $z = 0$ y para $z = L$). Bueno, en este caso solamente tienen sentido físico aquellas funciones $A(z)$ que verifiquen que $A(0) = A(L) = 0$. ¿Por qué? Pues porque como $A(z)$ da el desplazamiento vertical del trozo de cuerda que esta situado en z , no puede moverse en los extremos!

Bueno, pues vamos a ver que pasa cuando requerimos que la Eq. 4.74 verifique estas condiciones en los bordes de la cuerda. Primero, si evaluamos la Eq. 4.74 en $z = 0$ tenemos que el seno desaparece y el coseno da uno. Por tanto, para que $A(0)$ pueda ser cero, tenemos que elegir que $B = 0$. De esta forma la Eq. 4.74 se reduce a:

$$B = 0 \Rightarrow A(z) = A \sin(kz). \quad (4.77)$$

Ahora, impondremos que el otro extremo de la cuerda esté también fijo: $A(L) = 0$. Entonces, Eq. 4.77 implica que se tiene que cumplir que:

$$A(L) = A \sin(kL) = 0. \quad (4.78)$$

Bueno, pues claramente ya no podemos escoger $A = 0$, ya que nos quedamos sin solución. Por lo tanto, la única manera en que esto es posible si k toma alguno de los siguientes valores:

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.79)$$

de forma que el seno se anule.

Fijaros que esto implica que la cuerda puede oscilar sólo con un número infinito, pero numerable, de frecuencias. Ciertamente, recordado que k y ω están relacionados por la Eq. 4.75, tenemos que los valores posibles de la frecuencia son:

$$\omega_n = k \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.80)$$

cada uno de los cuales corresponde a un modo normal de oscilación de la cuerda.

¿Y cómo son la forma de estos modos? Pues viene dada por:

$$A_n(z) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}z + \phi\right). \quad (4.81)$$

Estas formas son las que ya intuimos en la última columna de la Fig. 9. Fijaros también que, escribiendo $k = 2\pi/\lambda$ como se obtiene que las únicas funciones $A(z)$ permitidas son aquellas para las que:

$$L = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}. \quad (4.82)$$

Es decir, aquellas que tienen una longitud de onda tal que **cabe un número entero de medias longitudes de onda entre los dos extremos fijos**. La forma de los modos normales, indexados según el entero n se muestran en la Fig. 12.

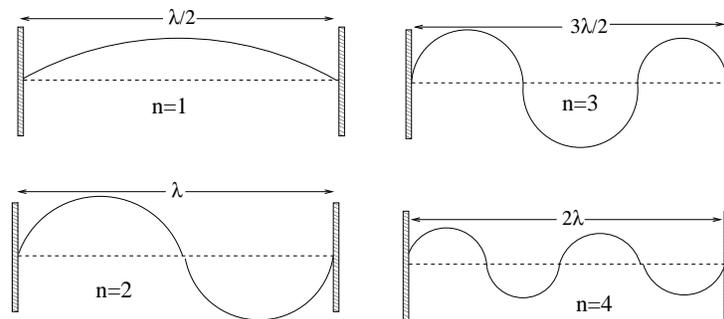


Figura 4.12: Modos normales en una cuerda con extremos fijos.

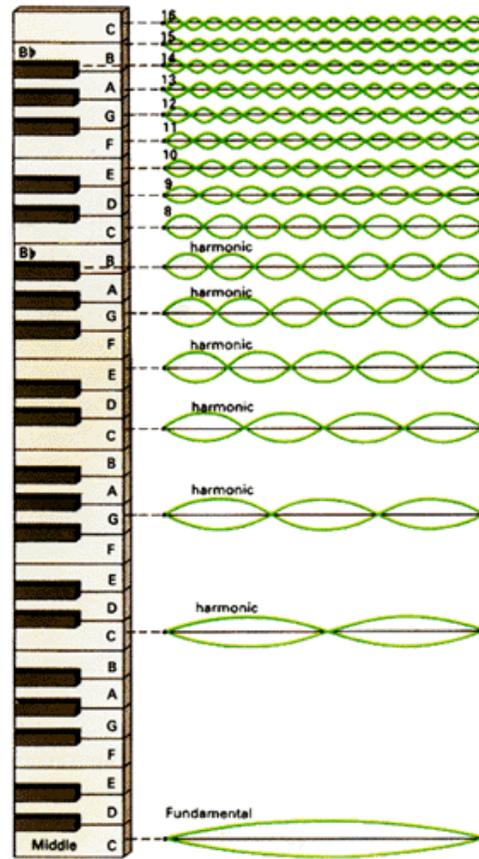


Figura 4.13: Escala armónica de un piano.

Fijaros que todos estos modos normales son precisamente lo que da lugar a los armónicos de una cuerda de guitarra o de una cuerda de piano (ver Fig. 4.4.3).

Extremos libres:

También consideraremos el caso en que uno de los extremos de la cuerda está libre. Es decir, que no exista sobre el fuerza alguna. Recordando la Eq. 4.64, que nos daba la fuerza que existía en la dirección vertical sobre un elemento arbitrario de cuerda dz situado en z , tendremos que para el elemento de cuerda situado en $z = L$ la fuerza sería:

$$F_x(L) \simeq -T_0 \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_L, \quad (4.83)$$

ya que en el otro extremo (el punto (2) de la Eq. 4.64) ya no hay cuerda ni, por tanto, tensión alguna. Fijaros que esta fuerza es cero sólo si se cumple que:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_L = 0, \quad (4.84)$$

lo que significa que el extremo de la cuerda **ha de ser siempre perpendicular a la dirección vertical**. En el caso de los modos normales definidos por la Eq. 4.74, esto se traduce en imponer a $A(z)$ que cumpla:

$$\frac{dA}{dz}(L) = 0. \quad (4.85)$$

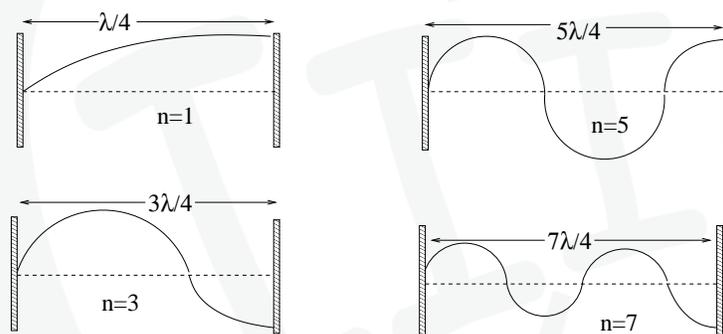


Figura 4.14: Modos normales en una cuerda con un extremo libre en $x = L$.

Veamos entonces como cambian los modos normales si suponemos que el extremo de la cuerda en $z = 0$ es fijo, mientras que el de $z = L$ es libre. Primero, volvemos a la solución general obtenida para los modos normales (Eq. 4.74). Entonces, exigir que $A(0) = 0$ nos vuelve a dejar con una forma para la función $A(z)$ del tipo dado por la Eq. 4.77. Pero ahora, la segunda condición, que la derivada se anule en L implica que:

$$\frac{dA}{dz}(L) = Ak\cos(kL) = 0, \quad (4.86)$$

lo cual limita los posibles valores del número de onda a:

$$kL = n\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.87)$$

Es decir, solamente existen los modos normales con n impar. La forma de estos modos es fácil de obtener si reescribimos la condición para k en términos de la longitud de onda:

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow L = n\frac{\lambda}{4}, \quad (4.88)$$

con n impar (ver Fig.14).

PREGUNTA: ¿Cómo serán los modos normales en el caso de que los dos extremos de la cuerda estuviesen libres?

4.4.4. Más allá de la cuerda vibrante

La importancia de la Ecuación de Ondas (Eq. 4.67) en Física e Ingeniería es enorme. El motivo es porque en muchos otros sistemas físicos, la evolución temporal y espacial de una perturbación del sistema respecto al equilibrio está gobernada por la misma ecuación. Por ejemplo, considerad un tubo horizontal lleno de un líquido, cerrado por dos tapas en sus extremos. En el equilibrio, dicho líquido tiene una presión p_0 (que juega el papel de T_0 en la cuerda). Supongamos ahora que golpeamos uno de los extremos. Esto hace que la presión en el líquido cerca de la pared se eleve por encima del valor de equilibrio hasta p . De esta forma, si llamamos $\delta p(z, t)$ a la cantidad que describe cuanto ha cambiado la presión en el fluido en el punto z (a lo largo del eje del cilindro) e instante t respecto al valor p_0 , es fácil ver que esta cantidad evoluciona según la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2}, \quad (4.89)$$

donde $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ es la velocidad del sonido (ρ_0 es la densidad del fluido, y γ es una constante característica del fluido.)

Esta es, de nuevo, la ecuación de ondas. Y es fácil encontrar, de manera totalmente análoga a como hicimos en la cuerda, cuales son los modos normales del fluido. También son las condiciones que han de verificarse en los extremos las que los determinan. Así, si las tapas del cilindro son rígidas, tiene que verificarse que $\delta p(0, t) = \delta p(L, t) = 0$ (L es la longitud del tubo). El caso del extremo libre se da aquí si la tapa fuera elástica, pudiendo entonces vibrar. La condición entonces en $z = L$ sería:

$$\left. \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} \right|_L = 0, \quad (4.90)$$

absolutamente idéntica a la que ya vimos en la cuerda.

¿Cómo son entonces los modos normales de presión en el fluido contenido por cilindro? Bueno, si las tapas son rígidas, corresponden a los que se muestran en la Fig. 12, pero donde la variable que se representa es ahora δp y no h . Es decir, fijándose en el segundo modo normal ($n = 2$), tendremos que cuando la presión sube por encima de p_0 en la mitad izquierda, baja por debajo de p_0 en la parte derecha, y se mantiene con valor p_0 en el punto medio y en los dos extremos. Luego, la parte izquierda baja por debajo de

p_0 mientras que la derecha baja, y así, sucesivamente. Con que frecuencia pasa esto, pues con la que permite el modo normal $n = 2$, que será $\omega_2 = 2\pi c_s/L^7$.

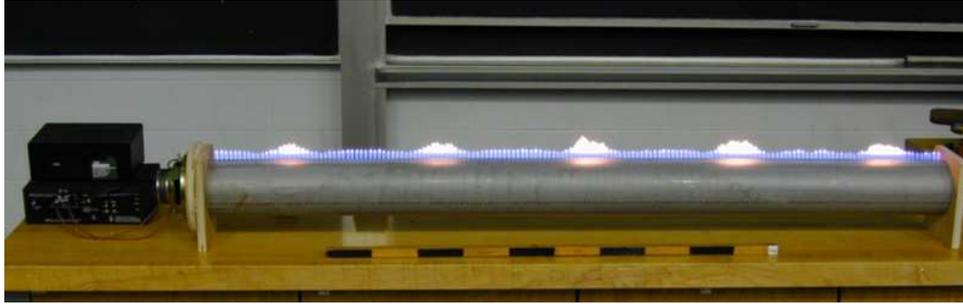


Figura 4.15: Modos normales de presión en un tubo de gas.

Un ejemplo se puede ver en la Fig. 15. En ella, se tiene un gas inflamable en un tubo dispuesto horizontalmente. En su parte izquierda hay un compresor que perturba periódicamente el tubo. Se hace variar la frecuencia del compresor para que coincida con la frecuencia de un modo normal de la presión del gas en su interior. Para ver el modo normal, se produce una chispa en su interior que inflama el gas, siendo más intensa la llamarada en los lugares donde la presión (y por tanto la cantidad de gas) es mayor. ¿De que modo normal se trata?

Ecuaciones similares se encuentran también para perturbaciones de la altura del mar respecto al suelo del océano (las *olas*), o la propagación de ondas electromagnéticas (la *luz*) y muchos otros sistemas ⁸.

4.5. Ondas

Bueno, como dijimos al principio del tema, en un sistema físico que se perturba ligeramente de su posición de equilibrio pueden aparecer oscilaciones (modos normales) y ondas. En las primeras, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio. En las segundas, la perturbación se propaga a lo largo del sistema. La diferencia entre ambos conceptos se ilustra, usando el ejemplo de la cuerda, en la Fig. 16.

⁷¡Comprobarlo vosotros, siguiendo el mismo camino que seguimos en el caso de la cuerda vibrante para encontrar las frecuencias y números de onda de cada modo!

⁸Ejemplos relativos a la propagación de la luz serán objeto, precisamente, de parte de la asignatura de Física II.

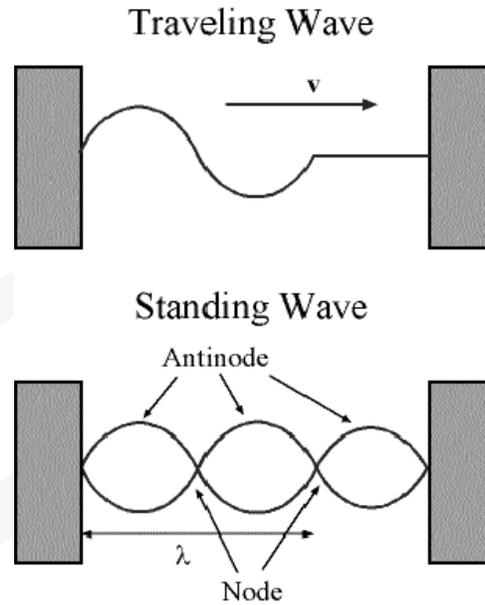


Figura 4.16: Onda progresiva (arriba) y modos normal (abajo) en una cuerda con extremos fijos.

En la parte inferior de la figura se muestra uno de los modos normales de la cuerda, el $n = 3$ concretamente, ya que tiene 2 ceros (nodos) y caben en la longitud de la cuerda tres medias longitudes de onda. Fijaros que la cuerda oscila alrededor de su posición de equilibrio como un todo y que no hay propagación a lo largo de la cuerda, ya que los nodos de la cuerda están siempre en el mismo sitio. Por este motivo, a los modos normales se les llama también **ondas estacionarias**. En la figura superior, sin embargo, se perturba el extremo de la cuerda y la perturbación se propaga a lo largo de esta con velocidad v , desplazándose el cero (nodo) hacia la derecha. A estas ondas se les llaman **ondas progresivas**.

En este tema estudiaremos cuando aparecen ondas progresivas, y cual es su relación con las ondas estacionarias. Veremos que, en general, si se perturba un sistema aparecen ondas progresivas. Sin embargo, si dicha perturbación es periódica y coincide su frecuencia con alguna frecuencia característica del sistema (es decir la de algún modo normal), el sistema se pone a oscilar en dicho modo normal y cesa la propagación.

Pero antes, veamos algunos aspectos importantes de las ondas progresivas.

4.5.1. Expresión formal de una onda progresiva

La primera cosa que es importante recordar es que tanto ondas progresivas como ondas estacionarias son soluciones de la ecuación de ondas. El motivo es que la ecuación de ondas es la formulación para la cuerda de la segunda ley de Newton y, por tanto, cualquier movimiento posible tiene que ser solución de ella.

Si recordais, el buscar los modos normales u ondas estacionarias, lo primero que hicimos es pensar que forma tendría que tener una oscilación colectiva de todas las partes de la cuerda. Vimos que era la dada por (Eq. 4.69, que repetimos aquí):

$$h(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \phi), \quad (4.91)$$

y que representaba el hecho de que el elemento de cuerda situado en z oscila con amplitud $A(z)$, pero todos ellos lo hacen en fase (de ahí que lleven todos el mismo mismo coseno temporal). Una vez conocida la expresión formal que describía el fenómeno que nos interesaba, la metíamos en la ecuación de ondas, Eq. 4.67, para ver cuáles de todas las posibles expresiones dadas por la Eq. 4.91, eran también soluciones reales (los modos normales) permitidas por la cuerda vibrante.

Para encontrar ondas progresivas haremos algo parecido. Miraremos primero cual será la forma funcional que tiene que tener una perturbación que se propague por la cuerda con velocidad v . Y luego, la meteremos en la ecuación de ondas para ver, de todas ellas, cuales son las que pueden existir realmente en la cuerda. Para ello, hagamos lo siguiente: supongamos que, para $t = 0$, hemos provocado una perturbación en la cuerda que tiene una forma arbitraria, como la que se muestra en la parte izquierda de la Fig. 17:

$$h(z, 0) = f(z). \quad (4.92)$$

Supongamos ahora que esta perturbación se mueve hacia la derecha con velocidad v constante (ver parte derecha de la Fig. 17). Entonces, en un tiempo t , la perturbación se habrá movido hacia la derecha una distancia $z = vt$, pero no ha cambiado de forma. Por ello, el valor de la perturbación en el punto z en el tiempo t , $h(z, t)$, tiene que ser la misma que la que había inicialmente en el punto que resulta de moverse hacia atrás una distancia $-vt$ desde z . Es decir:

$$h(z, t) = f(z - vt). \quad (4.93)$$

Bueno, pues resulta que ésta es la expresión más general de una perturbación que se propaga con velocidad v hacia la derecha. Y fijaros que la función f es arbitraria, luego la Eq. 4.93 describe cualquier tipo de perturbación que se nos ocurra, por rara que sea.

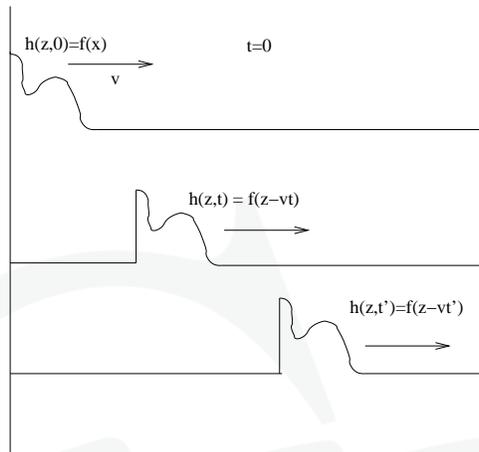


Figura 4.17: Perturbación propagándose hacia la derecha con velocidad v .

¿Cómo se sabe entonces si una función $h(z, t)$ corresponde a una onda progresiva? Bueno, pues **si depende de z y t a través de la combinación $z - vt$** . v nos daría entonces la velocidad de propagación, y el $(-)$ nos dice que se propaga hacia la derecha ⁹.

4.5.2. Velocidad de propagación de una onda progresiva

Ahora bien, el hecho de que la Eq. 4.93 tenga que verificar la Ecuación de Ondas para poder describir un movimiento de la cuerda, ¿implica alguna restricción sobre la función f ? En el caso de los modos normales que vimos antes, encontramos con que la amplitud $A(z)$ del modo no podía ser cualesquiera. Sin embargo, en el caso de las ondas arbitrarias, resulta que la Eq. 4.93 verifica la Ecuación de Ondas **para toda función f !** Para verlo, basta con sustituirla en la Eq. 4.67 que repetimos aquí:

$$\frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 h(z, t)}{\partial z^2}. \quad (4.94)$$

Fijaros que, aplicando la regla de la cadena, y renombrando al argumento de f usando $\eta = z - vt$, se tiene que:

$$\frac{\partial f(z - vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.95)$$

⁹Si se propagase hacia la izquierda, dependería de z y t a través de la combinación $z + vt$, como se ve fácilmente si considerais el mismo argumento que antes, pero que la perturbación se mueva inicialmente hacia la izquierda.

y por tanto que

$$\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-v \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] = -v \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] = -v \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2}. \quad (4.96)$$

Haciendo lo mismo se puede calcular fácilmente la derivada espacial:

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial z} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.97)$$

y por tanto que

$$\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2}. \quad (4.98)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la Eq. 4.94:

$$v^2 \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.99)$$

que impone la única restricción sobre la Eq. 4.93 de que la velocidad de propagación venga dada por:

$$v = \pm \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (4.100)$$

donde el signo (+) corresponde a las que se propagan hacia la derecha, y el signo (−) a las que van hacia la izquierda.

Por lo tanto, la forma de la perturbación que se propague por la cuerda puede ser arbitraria, pero la velocidad con la que se puede propagar es **determinada por el medio**.

4.5.3. Ondas de propagación armónicas

Se llaman ondas de propagación armónicas a una onda de propagación en la que la función f que aparece en la Eq. 4.93 es un seno o un coseno:

$$h(z, t) = A \cos [k(z - vt)]. \quad (4.101)$$

Fijaros que ésta expresión es solución de la ecuación de ondas (Eq. 4.94) ya que depende de z y t en la combinación $z - vt$. Corresponde, por tanto, a una onda que se propaga hacia la derecha ($z > 0$) con velocidad constante v . Fijaros que también le hemos incluido

un número de ondas k . Veamos que significa. para ello, imaginarnos que tomamos una "foto" de la perturbación en el instante inicial $t = 0$. En ese momento, la forma de la perturbación es:

$$h(z, 0) = A \cos [kz]. \quad (4.102)$$

Es decir, un coseno en el espacio. Por lo tanto, k es el **número de ondas** que vimos antes, y nos dice cuántos máximos tiene la onda por unidad de longitud. La longitud de onda λ , que da la distancia entre dos máximos consecutivos, vendrá dada entonces por $\lambda = 2\pi/k$.

Pero la Eq. 4.101 describe a un coseno de longitud de onda λ que se mueve con velocidad v hacia la derecha. Por tanto, la amplitud de la perturbación en un punto concreto del espacio cambia con el tiempo. Fijémonos, por ejemplo, en lo que pasa en el origen $z = 0$. En el, se tiene que el valor de la perturbación es:

$$h(0, t) = A \cos [-kvt] = A \cos [-kvt]. \quad (4.103)$$

Es decir, la perturbación varía en el origen entre A y $-A$, con una frecuencia temporal $\omega = kv$. El lapso de tiempo o **periodo** que pasa entre que existe un máximo (o un mínimo, o un cero, o lo que sea) en el origen, y que vuelve a haber otro viene dado entonces por $T = 2\pi/\omega$.

Por lo tanto, en una onda armónica hay cinco cantidades importantes: 1) la velocidad a la que se propaga, v ; 2) su número de onda k ; 3) su longitud de onda λ ; 4) su frecuencia ω y 5) su periodo T . Y sólomente hay dos independientes, que se pueden escoger como se quiera. Por ejemplo, si fijamos v y λ tenemos que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad T = \frac{\lambda}{v}. \quad (4.104)$$

Algunas relaciones importantes a recordar son ¹⁰:

$$\frac{\omega}{k} = v; \quad \lambda \nu = v; \quad \frac{\lambda}{T} = v, \quad (4.105)$$

donde $\nu = \omega/2\pi$ es la frecuencia medida en Herzios (s^{-1}).

4.5.4. Relación de ondas estacionarias y ondas progresivas

Bueno, y hemos visto ya que en la cuerda hay ondas progresivas y ondas estacionarias. ¿Son cosas absolutamente diferentes, o existe alguna relación entre ellas? Pues la respuesta

¹⁰Demostradlas!

es la segunda. Están intrínsecamente relacionadas. Veamos primero geoméricamente cual es esta relación. Para ello, fijaros en la Fig. 18. En ella, aparecen distintas "fotos" (desde la instantánea (a) hasta la (k)) de la evolución temporal del siguiente proceso: en (a), un pulso armónico avanza a lo largo de una cuerda de longitud L desde la izquierda con velocidad v . Recordad que de todas las cantidades que introdujimos antes, dos se podían elegir arbitrariamente. Elegiremos, además de v , la longitud de onda λ de la onda progresiva. Y lo haremos de tal forma que se cumpla que $L = \lambda/2$. Recordad también que esta era la condición que vimos se cumplía para el primer armónico de la cuerda.

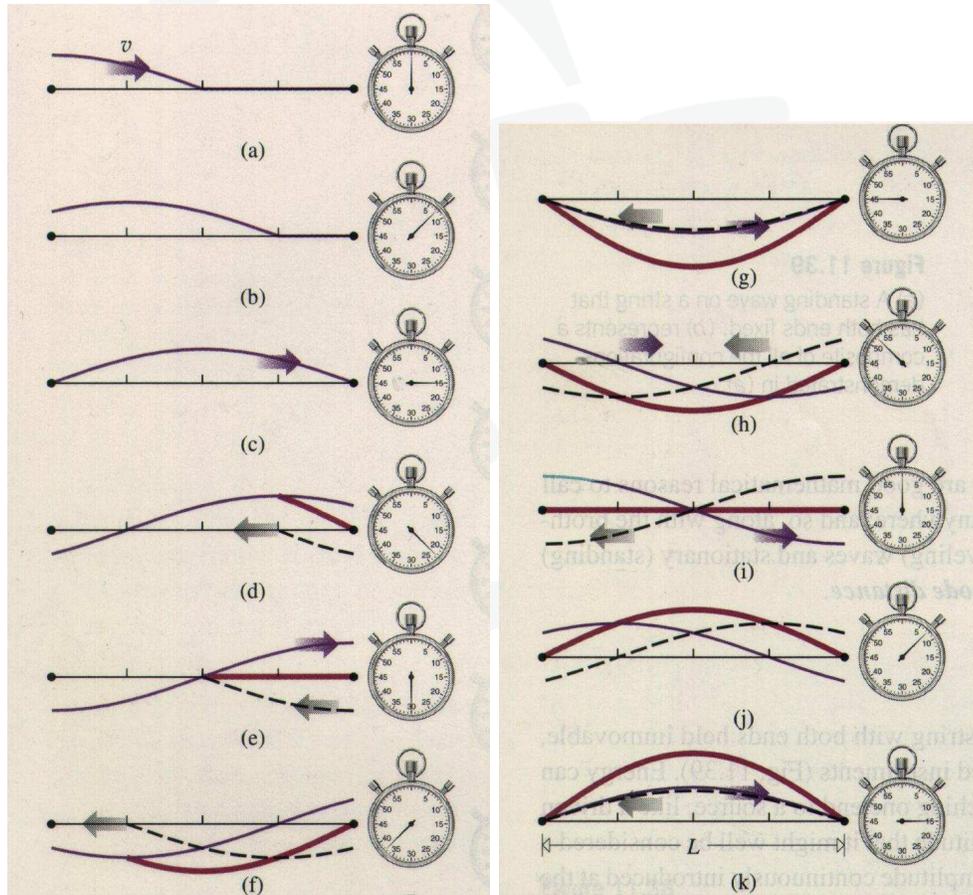


Figura 4.18: Relación entre onda progresiva y onda estacionaria.

Gracias a esta elección, cuando la onda llega al extremo derecho de la cuerda, la amplitud de oscilación en ambos extremos es cero (instantánea (c)). Ahora bien, la cuerda

no existe mas alla de $z = L$, y por eso se la onda incidente refleja hacia atrás. Pero fijaros que lo hace comenzando una nueva media longitud de onda, que se marca con línea de trazos en la instantánea (d). La suma de esa onda reflejada con la incidente se muestra con un trazo grueso y rojo. En la instantánea (e), la onda reflejada ya ha llegado a la mitad de la cuerda. Fijaros que, la suma de la reflejada y la incidente hace que no haya oscilación, en ese instante, en la mitad derecha de la cuerda. En la instantánea (g) la onda reflejada llega a $z = 0$, el extremo izquierdo de la cuerda. A partir de aquí, las ondas reflejada e incidente van a derecha e izquierda de forma que la onda resultante es el primer armónico de la cuerda vibrante (instantáneas (h) a (k)).

Fijaros que el motivo por el que esto ha pasado es porque la longitud de onda de la onda progresiva se ha elegido a propósito para que **tanto la onda incidente como la reflejada son siempre cero en los extremos de la cuerda!** Si no, la onda incidente y la reflejada, al sumarse para dar la onda resultante marcada con trazo rojo, se destruirían la una a la otra y no se vería nada. Sólomente si se escoge la longitud de onda de la onda progresiva de forma que $L = n\lambda/2$, para algun n , se obtiene una onda estacionaria o un modo normal de la cuerda.

Este hecho es común en muchos sistemas. Por ejemplo, en las ondas de presión que antes veíamos dan lugar al sonido. Así, si pensais de nuevo en la guitarra, el buen o mal sonido de la guitarra lo da la caja de resonancia donde van sujetas las cuerdas. Cuando las cuerdas vibran (en alguno de los armónicos de las cuerdas vibrantes que hemos visto), estas transmiten la vibración a la caja de resonancia, de forma que en el aire en su interior se transmiten ondas progresivas de presión que rebotan en las paredes de la caja. Si la guitarra es buena, se formarán ondas estacionarias (en este caso tridimensionales), las cuales pueden observarse usando por ejemplo técnicas holográficas (ver Fig. 19).

Para acabar con esta sección, veamos como se demuestra matemáticamente el hecho de que dos ondas progresivas que avanzan en direcciones contrarias pueden dar lugar a una onda estacionaria. Sean las dos ondas:

$$h_1(z, t) = A \cos(kz - kvt) \quad \text{y} \quad h_2(z, t) = A \cos(kz + kvt), \quad (4.106)$$

donde $h_1(z, t)$ y $h_2(z, t)$ van respectivamente hacia la derecha e izquierda con velocidad v . La onda resultante será:

$$\begin{aligned} h_R(z, t) = h_1(z, t) + h_2(z, t) &= A \cos(kz - kvt) + A \cos(kz + kvt) = \\ &= A \cos(kz) \cos(kvt) + A \operatorname{sen}(kz) \operatorname{sen}(kvt) + \\ &+ A \cos(kz) \cos(kvt) - A \operatorname{sen}(kz) \operatorname{sen}(kvt) = \\ &= 2A \cos(kz) \cos(kvt), \end{aligned} \quad (4.107)$$

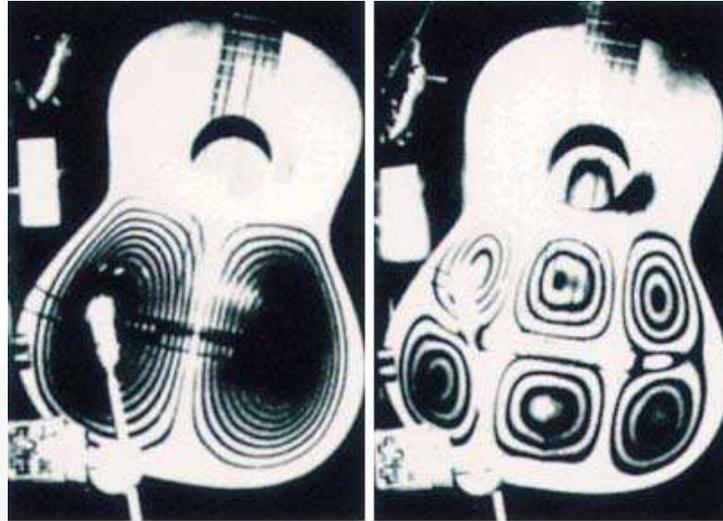


Figura 4.19: Ondas estacionarias de presión en la caja de resonancia de una guitarra.

donde hemos usado que $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$. Por tanto, la onda resultante tiene la forma de una oscilación colectiva de frecuencia ω y amplitud:

$$A(z) = 2A \cos(kz). \quad (4.108)$$

Si se escogiera ahora el número de onda k (o su longitud de onda asociada λ , o su frecuencia asociada ω) de forma que se verifique la Eq. 4.79 (o la Eq. 4.82, o la Eq. 4.80), h_R correspondería a un modo normal de una cuerda de longitud L .

En la ducha: Un último ejemplo en el que la composición de una onda reflejada y otra incidente da lugar a una onda estacionaria podeis comprobarlo vosotros en la ducha. Para ello, basta con cantar o silbar variando el tono suavemente. La onda sonora (presión del aire) que emitireis rebotará en la pared de la ducha y en la mampara de cristal. Para el valor de frecuencia correspondiente a alguno de los armónicos, veréis como de repente la intensidad del canto/silbido sube bruscamente y se oye muy claramente (ver Fig. 20).

4.5.5. Paquetes de ondas: Velocidad de fase y velocidad de grupo

En las secciones anteriores hemos estudiado el comportamiento de ondas progresivas armónicas, y hemos visto que venían caracterizadas por varias cantidades: su velocidad



Figura 4.20: Ondas estacionarias sonoras (de presión) en la ducha.

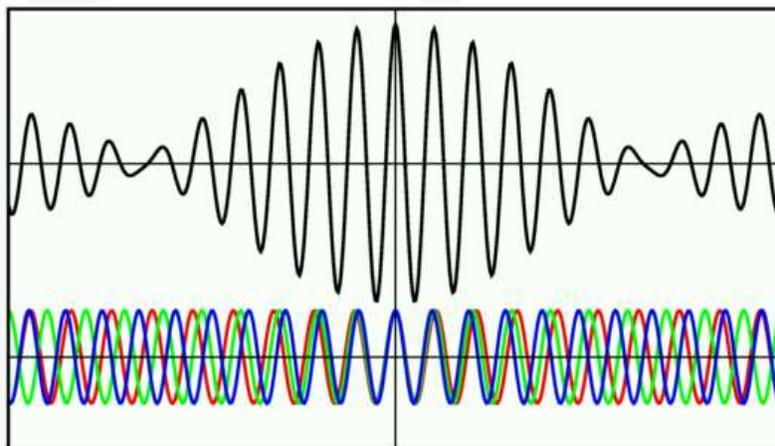


Figura 4.21: Formación de un paquete de ondas mediante suma de ondas armónicas.

v , su número de onda k , su longitud de onda λ , su frecuencia ω y su periodo T , de las que sólo se pueden escoger dos de ellas al azar, y el resto vienen dadas por éstas. Fijaros sin embargo que las ondas armónicas no representan perturbaciones reales, ya que son infinitas tanto en el espacio como en el tiempo. Ciertamente, si uno toma, como ya hicimos antes, una 'instantánea' para un tiempo dado (por ejemplo $t = 0$) de una onda armónica se obtiene una expresión del tipo:

$$h(z, 0) = A \cos(kz), \quad (4.109)$$

que se extiende desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$. Asimismo, si miramos como es la perturbación sentida por un punto cualquiera de la onda (por ejemplo, $z = 0$), vimos que obteníamos:

$$h(0, t) = A \cos(kvt), \quad (4.110)$$

que comienza en $t = -\infty$ y acaba en $t = +\infty$.

Ahora bien, las ondas reales tienen principio y fin, tanto en el espacio como en el tiempo. Por lo tanto, ¿cuál es el motivo de estudiar las ondas armónicas, que son ondas *idealizadas*, no reales? Bueno, pues porque puede demostrarse matemáticamente que cualquier onda "física", limitada en el espacio y en el tiempo, puede escribirse como combinación lineal de ondas armónicas (ver Fig. 20). Al resultado de sumar todas estas ondas armónicas se le llama **grupo** o **paquete de ondas**.

Hay al menos dos cosas curiosas de estos paquetes de ondas, aparte de que tengan un tamaño y/o una vida finita. La primera es que pueden propagarse con una velocidad diferente a la de los elementos armónicos de que se componen. A esta velocidad se le llama **velocidad de grupo**, en contraste con la velocidad de sus componentes armónicas que se llama **velocidad de fase**.

Para entender mejor este concepto, veamos un ejemplo. Nos limitaremos al más sencillo, en el que vamos a sumar dos ondas armónicas:

$$h(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A \cos(k_2 z - \omega_2 t), \quad (4.111)$$

que hemos supuesto de igual amplitud para agilizar el cálculo. Fijarnos que la velocidad a la que se propaga cada componente armónica viene dada por $v_{fase} = \omega_1/k_1 = \omega_2/k_2$, como vimos en la sección anterior (recordad que ω y k no podían ser independientes para la onda armónica, ya que su cociente tenía que ser la velocidad de propagación que venía impuesta por el medio.)

Ahora, para ver la onda que resulta, recordar que la suma de dos cosenos se puede reescribir como dos veces el coseno de la semisuma de sus argumentos por el coseno de la semidiferencia de los mismos:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right). \quad (4.112)$$

Por tanto, tenemos que la onda dada por la Eq. 4.111 es igual a:

$$h(z, t) = 2A \cos \left(\left[\frac{k_1 - k_2}{2} \right] z - \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right] t \right) \cdot \cos \left(\left[\frac{k_1 + k_2}{2} \right] z - \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right] t \right) \quad (4.113)$$

A las distintas cantidades que aparecen en esta expresión las vamos a llamar:

$$\begin{aligned} k_{mod} &\equiv \frac{k_1 - k_2}{2}, & \omega_{mod} &\equiv \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ k_{av} &\equiv \frac{k_1 + k_2}{2}, & \omega_{av} &\equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{aligned} \quad (4.114)$$

de forma que tenemos que el paquete de ondas (Eq. 4.113) se escribe:

$$h(z, t) = 2A \cos(k_{mod}z - \omega_{mod}t) \cdot \cos(k_{av}z - \omega_{av}t) \quad (4.115)$$

El aspecto que tiene esta onda se muestra en la Fig. 21:

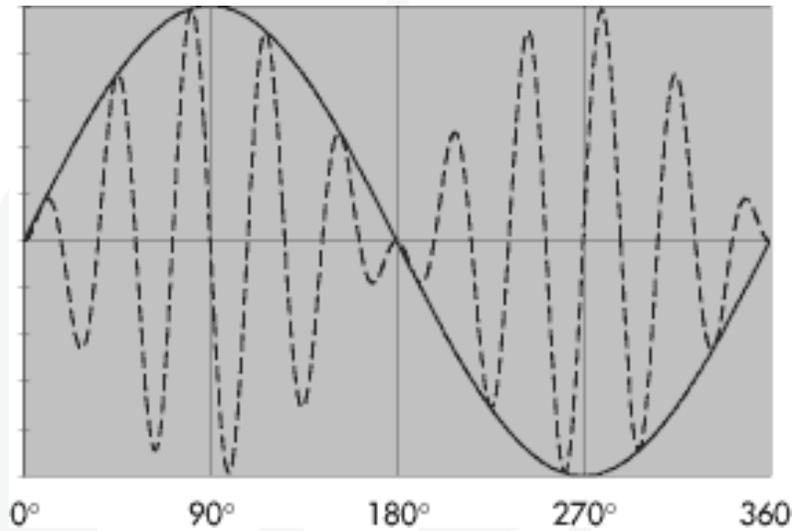


Figura 4.22: Suma de dos señales seno de frecuencias parecidas.

Capítulo 5

ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

La Electrostática se ocupa del estudio de las interacciones o fuerzas que aparecen entre *cargas* eléctricas (o distribuciones de ellas) **en reposo** relativo ¹.

5.1. La carga eléctrica.

La **carga eléctrica** es el concepto básico sobre el que se construye la Electricidad y el Magnetismo, del mismo modo que la **masa** era la cantidad básica sobre la que se construía la Mecánica. Pero de la misma manera que la Mecánica no nos decía que era la masa, sino sólo como se comportaba, el Electromagnetismo nos dice como se comportan las cargas, y no lo que son.

Las primeras experiencias con cargas eléctricas estuvieron asociadas al frotamiento: así, si frotamos dos trozos de caucho con un trozo de piel, veremos que se repelen entre sí. Por otro lado, si frotamos dos varas de vidrio con un paño, veremos que también se repelen mutuamente. Sin embargo, la vara de vidrio frotada y la vara de caucho frotada se atraen entre sí. Benjamin Franklin supuso que una estaba cargada **negativamente** y la otra **positivamente**, y estableció que objetos cargados del mismo signo se repelían, y cargados de signos diferentes se atraían. Se equivocó sin embargo, ya que pensaba que sólo existían cargas negativas, y el que un cuerpo estuviera cargado positiva o negativamente se debía sólo al exceso o defecto de éstas. Hoy sabemos que existen cargas negativas (electrones, descubiertos experimentalmente por J.J. Thomson en 1896) y positivas (protones, descu-

¹Cierto es que, debido a estas fuerzas dichas cargas se mueven, dejando de estar en reposo. En la asignatura de Física II, se verá que estas cargas en movimiento también interaccionan entre sí mediante los llamados campos magnéticos, que están intrínsecamente relacionados con los campos eléctricos que veremos en este tema.

biertos por E. Rutherford en 1922). Estas son, además, los elementos básicos del átomo: un núcleo central donde se acumulan los protones (junto con otras partículas neutras, los neutrones, que hacen de *pegamento* entre ellas y que fueron descubiertos por J. Chadwick en 1932), alrededor del cual orbitan los electrones, en igual número al de protones en el núcleo. ¿Qué sucedía con nuestras varas? Pues que al frotar la vara de caucho sobre la piel, la vara *robaba* electrones de la piel, adquiriendo una carga neta negativa (ya que hay más electrones que protones). En el caso de la vara de vidrio, la seda se *llevaba* electrones del vidrio, con lo que la vara se queda con una carga positiva neta (hay más protones que electrones).

Los electrones son **unidades elementales** de carga, que ni se destruyen ni se dividen en otras menores. Por lo tanto, la carga total siempre se conserva (**Ley de conservación de la carga.**). La carga de un electron es $q_e = -e = -1,6 \times 10^{-19}C$ y es la cantidad de carga más pequeña que puede encontrarse libre ². (Por lo tanto cualquier carga eléctrica existente ha de ser un múltiplo entero de e .) Además son fácilmente transferidos de un objeto a otro, o conducidos a través de un material (como un cable de cobre, por ejemplo). Según un material tenga tendencia a que se le quiten/añadan electrones o a conducirlos, se habla de materiales **aislantes** (como el vidrio o el caucho) o **conductores** (como el cobre y los metales).

5.2. La ley de Coulomb.

La ley de Coulomb establece la fuerza con la que se atraen/repelen dos cargas eléctricas. Fue medida por primera vez por Charles Coulomb a finales del s. XVIII, y puede escribirse, en forma vectorial como:

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = K \frac{q' \cdot q}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} (\vec{r}' - \vec{r}) \quad (5.1)$$

siendo $\vec{F}_{q' \rightarrow q}$ la fuerza que la carga q' (situada en \vec{r}') hace sobre la carga q (situada en \vec{r}).

De la Ec. 5.1 puede verse que el módulo de la fuerza decrece como el cuadrado de la distancia entre las dos cargas, $|\vec{r}' - \vec{r}|$. También el que la fuerza está dirigida según la recta que une a las dos cargas, y que su sentido depende del signo del producto $q \cdot q'$. Por lo tanto, las cargas se repelen si tienen igual signo, y se atraen si tienen signos contrarios. El valor de la constante $K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$ en el sistema M.K.S.

²Los protones tienen la misma carga que los electrones, pero positiva, $q_p = e = 1,6 \times 10^{-19}C$; y aunque leais que están compuestos de otras partículas más pequeñas con cargas más pequeñas que e , llamadas *quarks*, ¡es imposible encontrar estas partículas sueltas!

MODELO DEL ATOMO DE HELIO

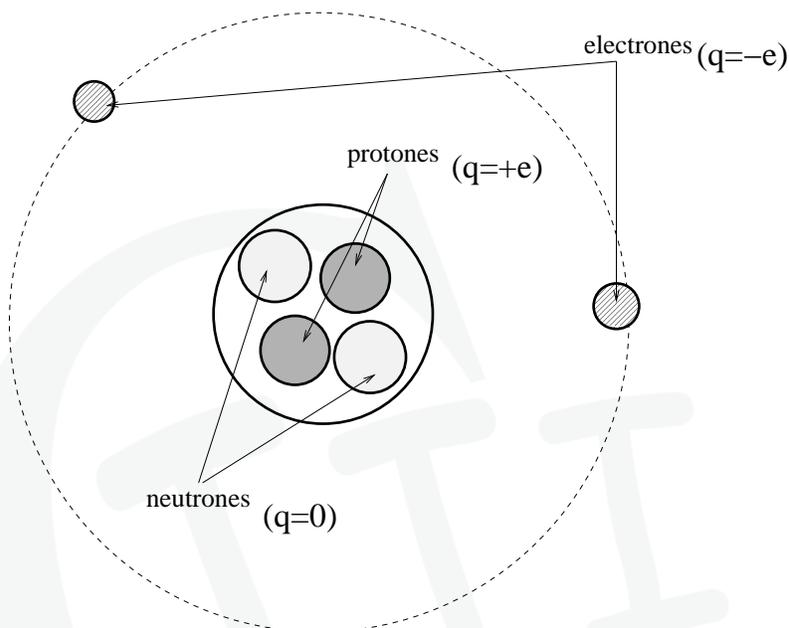


Figura 5.1: Modelo del átomo de Helio con dos protones y dos neutrones. Notar que no está a escala, ya que el radio de la órbita electrónica es mucho mayor que el tamaño del núcleo. Aproximadamente, la visión desde el núcleo hacia los electrones sería comparable a la de una hormiga ...¡desde el centro del campo de fútbol del estadio Santiago Bernabeu!

Nótese también que la fuerza de Coulomb que la carga q hace a su vez sobre q' es igual, aplicando la Ec. 5.1, a $\vec{F}_{q \rightarrow q'} = -\vec{F}_{q' \rightarrow q}$, ya que lo único que cambia es la dirección del vector que va desde la carga que hace la fuerza a la que la recibe, manteniéndose la distancia la misma. Se cumple por tanto la tercera ley de Newton, la **ley de acción y reacción**, en la interacción entre cargas.

Es importante, finalmente, darse cuenta de que la expresión de la fuerza de Coulomb es muy similar a la de la fuerza gravitatoria que aparece entre dos masas, m' y m :

$$\vec{F}_{m' \rightarrow m}^g = G \frac{m \cdot m'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.2)$$

Sin embargo, ambas difieren en que **no existen masas negativas**, con lo que la gravitatoria es siempre atractiva. Además, las fuerzas eléctricas son mucho mayores, ya que $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

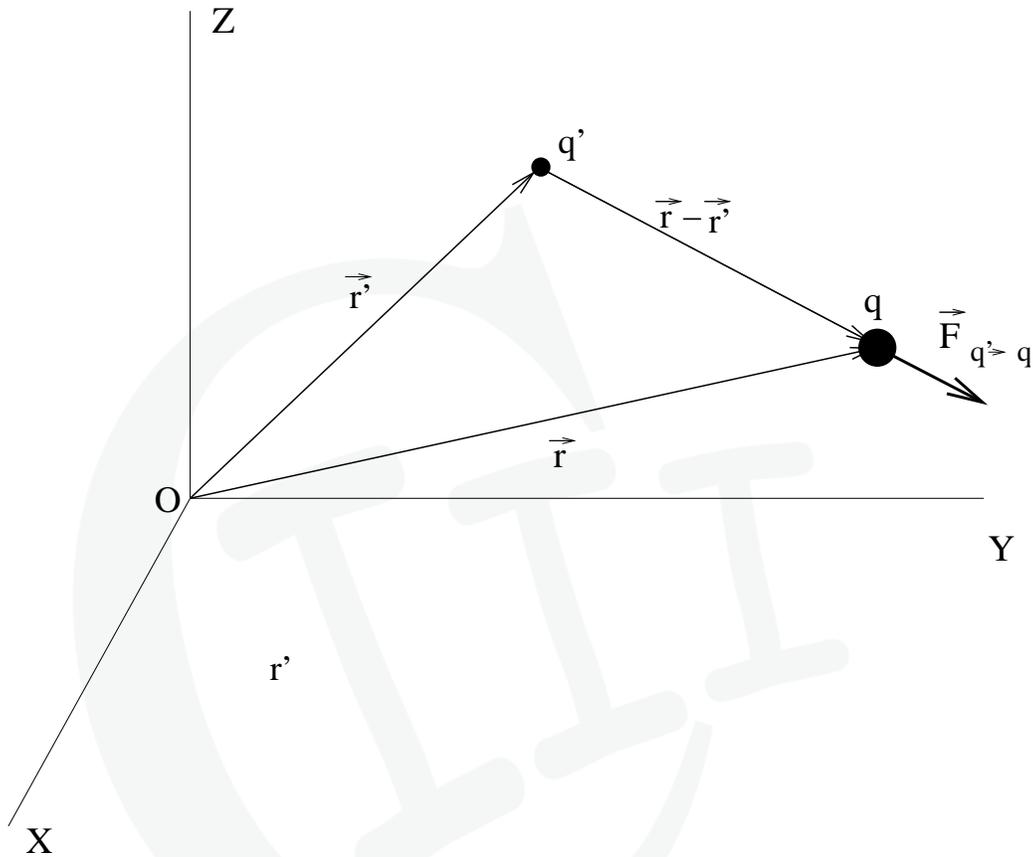


Figura 5.2: Fuerza de Coulomb.

- **Ejercicio:** Calcular la razón entre la fuerza de repulsión de dos electrones debido a la fuerza de Coulomb, y la atracción debida a la fuerza gravitatoria, teniendo en cuenta que la masa del electron $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kgr}$.
- **Ejemplo:** Sea una carga $q_1 = 1C$ situada en el punto $\vec{r}_1 = (-1, 1, 3)$. ¿Cuál será la fuerza que ejercerá sobre otra carga $q_2 = -2C$ situada en $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$?

Necesitamos calcular el vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, -1, 0) - (-1, 1, 3) = (3, -2, -3)$, que va de la carga q_1 a la q_2 . Ahora, el módulo de éste es $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$, que será igual a la distancia entre las cargas. Por lo tanto, la fuerza que experimenta q_2

será:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = 9 \times 10^9 \times \frac{1 \cdot (-2)}{(\sqrt{22})^3} (3, -2, -3) N \quad (5.3)$$

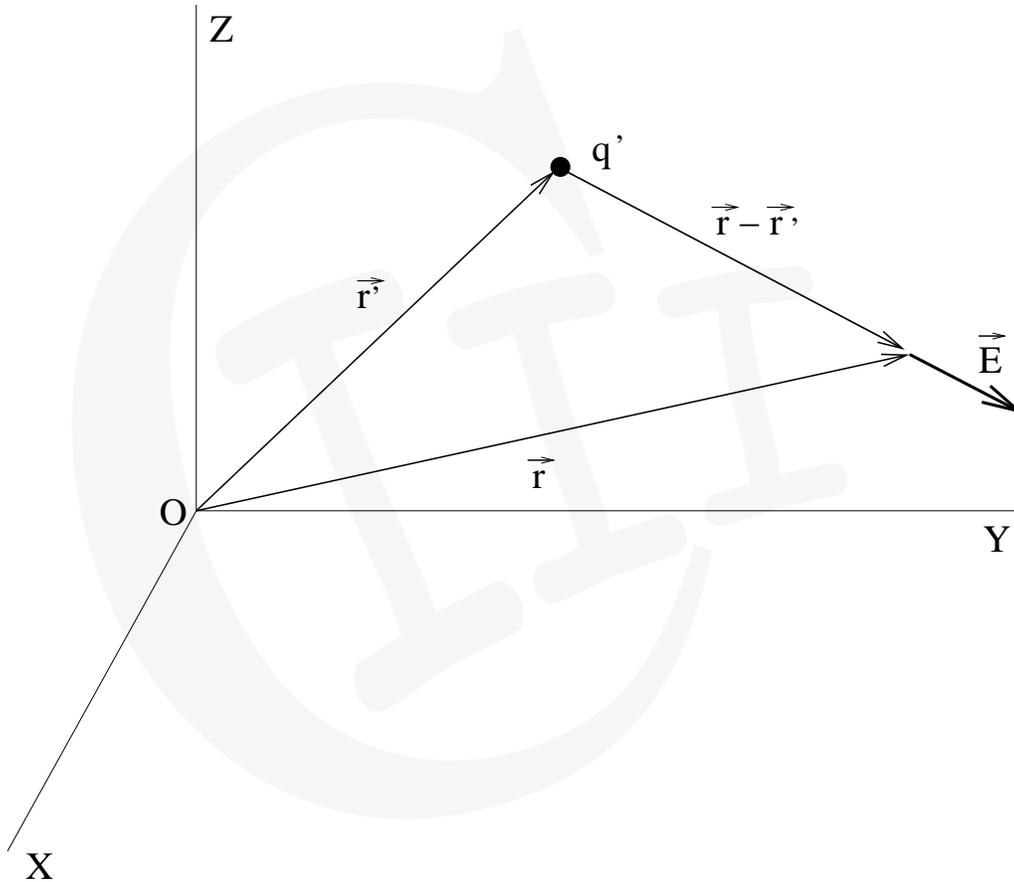


Figura 5.3: Campo eléctrico creado por la carga q' en el punto \vec{r} .

5.3. El campo eléctrico

Volviendo de nuevo al símil mecánico de la gravitación, es conocido por todos que la Tierra ejerce una fuerza sobre la Luna, aunque esté a muchos millones de kilómetros de distancia. Del mismo modo, cualquier carga ejerce una fuerza sobre cualquier otra

carga que este separada de la primera en el espacio. Pero, ¿cómo es esto posible, sin que ambas cargas estén en contacto? ¿Cómo se transmite la fuerza a través del espacio? ¿y con qué velocidad lo hace? En el caso gravitatorio, este problema se resuelve suponiendo que la Tierra crea un *campo gravitacional* que llena todo el espacio. Este campo vectorial (sea lo que sea) es *percibido* por cualquier otra masa, que *siente* entonces la fuerza de atracción gravitatoria.

De manera similar, supondremos que toda carga eléctrica llena también el espacio con un **campo eléctrico**, que dará lugar a una fuerza en el momento que otra carga esté presente. Puesto que dicho campo es creado por la carga eléctrica original, no depende de si existe o no una segunda carga que reciba la fuerza. Por todo ello, el **campo eléctrico** creado por una carga q' situada en el punto \vec{r}' **en cualquier otro punto** \vec{r} del espacio se define, matemáticamente, como el siguiente campo vectorial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.4)$$

De esta forma, el campo es independiente de la existencia de una segunda carga q , estando totalmente determinado por la carga que lo crea, q' . La fuerza que la carga q experimenta en presencia del campo es ahora dada por $\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, cuando dicha carga está en el punto \vec{r} .

• **Ejemplo:** Sea una carga $q_1 = 1C$ situada en el punto $\vec{r}_1 = (-1, 1, 3)$. ¿Cuál será el campo eléctrico que dicha carga creará en el punto $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$? ¿Y la fuerza que ejercería sobre otra carga $q_2 = -2C$ que se sitúe en \vec{r}_2 ?

Necesitamos de nuevo calcular el vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, -1, 0) - (-1, 1, 3) = (3, -2, -3)$, que va de la carga que crea el campo al punto donde lo queremos calcular. Ahora, el módulo de éste es $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$, la distancia de la carga q' al punto \vec{r} . Por lo tanto, el campo creado en \vec{r}_2 por q_1 es:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = 9 \times 10^9 \times \frac{1C}{(\sqrt{22})^3} (3, -2, -3) N/C \quad (5.5)$$

Para hallar ahora la fuerza sobre q_2 , basta con hacer: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$, que es el mismo resultado del ejemplo de la sección anterior.

5.3.1. Líneas de fuerza

Todo campo vectorial, y en concreto el campo eléctrico, se representa usualmente mediante el concepto de **línea de fuerza** o **línea de campo**. Puesto que la fuerza que expe-

rimenta una carga q en presencia de un campo eléctrico \vec{E} viene dada por $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, es evidente que el campo eléctrico en un punto coincide con la fuerza que experimentaría una carga unidad ($q = +1C$) en dicho punto. Por lo tanto es posible ver "la estructura" del campo abandonando una carga unidad en su presencia y viendo como se mueve dicha carga. Las trayectorias que seguiría dicha carga unidad cuando se la abandona en puntos diversos son lo que se llaman líneas del campo. Se caracterizan por que el vector campo eléctrico es siempre *tangente a dichas líneas en cada punto*, propiedad que se utiliza para calcularlas matemáticamente. Como ejemplo, en la Fig. 5.4 se representan las líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga positiva o una negativa (imaginaros la trayectoria que seguiría un protón abandonado en dicho campo y ver como coincidiría con las líneas).

Más adelante volveremos a referirnos a las líneas de fuerzas del campo eléctrico (al hablar del Teorema de Gauss), y también a sus **fuentes** y **sumideros**. Éstos no son otros que las cargas eléctricas ya que, como se ve en las figuras, todas las líneas del campo eléctrico **nacen en alguna carga positiva** y **mueren en alguna negativa**.

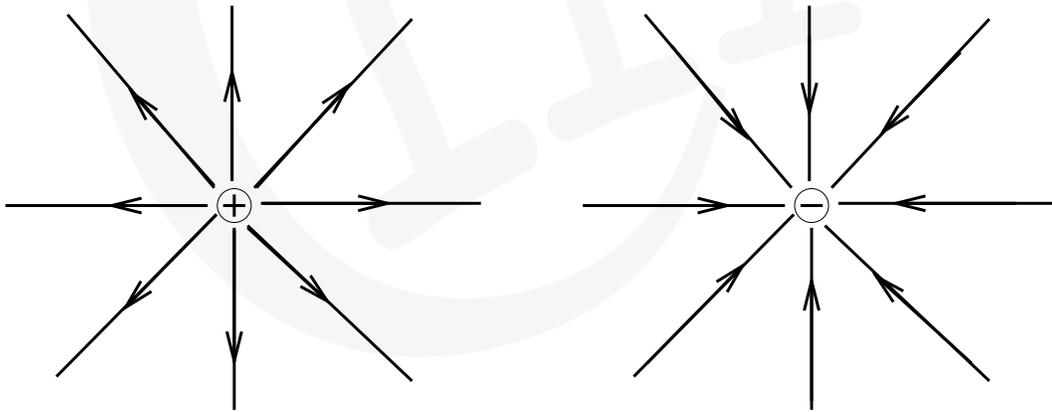


Figura 5.4: Representación por líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga positiva (arriba, izquierda) y otra negativa (arriba, derecha).

5.4. Principio de superposición

Puesto que la fuerza de Coulomb no es intrínsecamente diferente a cualquier otra fuerza de las que estudiamos anteriormente en el bloque Mecánica, también podemos

usar el **principio de superposición** para calcular la fuerza que experimenta una carga en presencia de otras muchas:

La fuerza total ejercida sobre una carga eléctrica q por un conjunto de cargas que denotaremos por $\{q_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, será igual a la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por cada carga q_i sobre la carga q :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N F_{i \rightarrow q}(\vec{r}) \quad (5.6)$$

donde la fuerza $\vec{F}_{i \rightarrow q}$ que la carga q_i ejerce sobre la carga q ha de ser calculada usando la Ec. 5.1.

Puesto que, como hemos visto, el campo eléctrico puede entenderse como la fuerza de Coulomb que experimentaría la unidad de carga, dicho principio puede extenderse también a la determinación de campos eléctricos, sin más que dividir la anterior igualdad por la carga que recibe la fuerza, q . De esta forma, el Principio de Superposición se formula también para campos eléctricos:

El campo eléctrico total creado por un conjunto de cargas $\{q_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ en un punto arbitrario, será igual a la suma vectorial del campo eléctrico creado por cada carga q_i en dicho punto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N E_i(\vec{r}) \quad (5.7)$$

donde el campo $\vec{E}_i(\vec{r})$ creado por la carga q_i en el punto \vec{r} ha de ser calculado usando la Ec. 5.4.

• **Ejemplo:** Sean cuatro cargas de $1C$ situadas en los vértices de un cuadrado de lado 2, uno de cuyos vértices coincide con el origen. ¿Cuanto vale el campo eléctrico en el centro del cuadrado? ¿Y cual sería la fuerza que experimentaría una carga $q = -1C$ situado en dicho centro?

Para hacerlo, primero cogemos un sistema de ejes en el que los ejes X e Y coincidan con dos lados del cuadrado (ver Fig. 5.5). De esta forma, las posiciones de las cuatro cargas son: $\vec{r}_1 = (0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 2)$, $\vec{r}_3 = (2, 0)$, $\vec{r}_4 = (2, 2)$. El punto donde nos piden el campo es el centro del cuadrado, y por tanto: $\vec{r} = (1, 1)$. Necesitamos ahora el campo creado por cada carga en dicho centro, para lo cual tengo que calcular los vectores $\vec{r}_{ci} = \vec{r} - \vec{r}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. La solución es: $\vec{r}_{c1} = (1, 1)$, $\vec{r}_{c2} = (1, -1)$, $\vec{r}_{c3} = (-1, 1)$ y $\vec{r}_{c4} = (-1, -1)$. Es

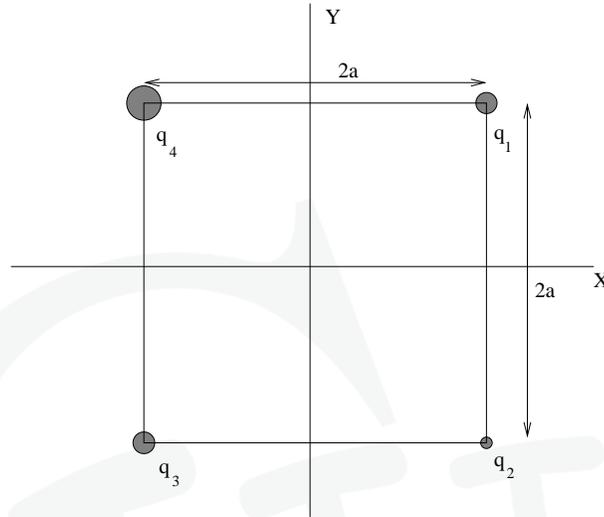


Figura 5.5: Esquema del ejemplo.

fácil ver que el módulo de todos ellos es $\sqrt{2}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = K \frac{1}{(\sqrt{2})^3} [(1, 1) + (1, -1) + (-1, 1) + (-1, -1)] = 0 \quad (5.8)$$

La fuerza sobre la carga $-1C$ en dicho punto será por tanto nula, puesto que el campo eléctrico creado por las cuatro cargas en el centro es cero. Fijaros que tal solución tiene sentido físico, ya que todas las cargas van a tirar con la misma fuerza de la carga negativa hacia ellas, con lo que se compensan las fuerzas dos a dos.

5.5. Distribuciones de carga continua: densidad de carga

Existen muchos casos de interés práctico donde no conocemos la posición concreta de cada carga, sino que sabemos como están repartidas **en promedio** en una línea, una superficie o un volumen a través de una función **densidad de carga**. Dicha densidad se construye del siguiente modo: supongamos que tenemos un volumen muy grande en el que tenemos carga distribuida de manera arbitraria. Dividimos dicho volumen en pequeños elementos de volumen, $\Delta V'$, cada uno de los cuales está centrado en algún punto \vec{r}' dentro del volumen (ver Fig. 5.6). Si ΔQ es la cantidad de carga encerrada en cada $\Delta V'$,

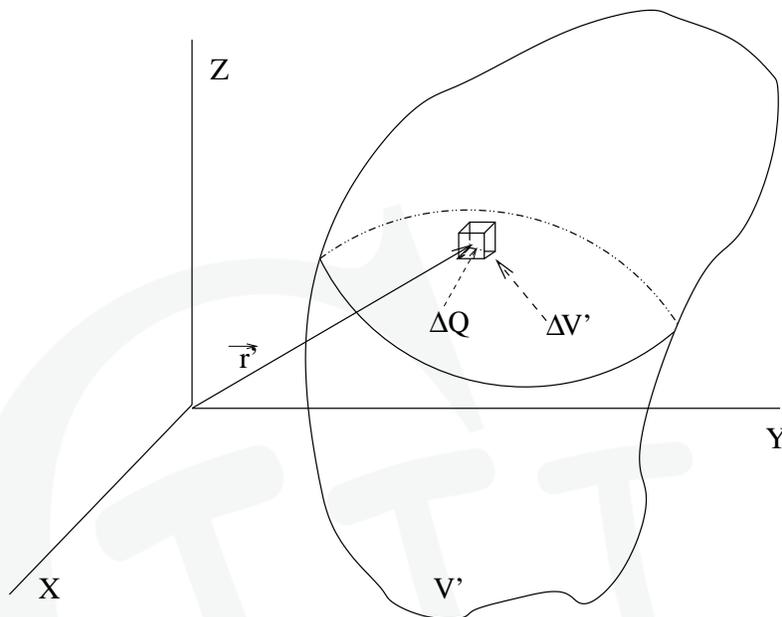


Figura 5.6: Esquema del proceso de definición de la densidad de carga en un volumen.

la densidad con la que la carga está repartida en dicho elemento de volumen será igual a $\Delta Q/\Delta V'$. La **densidad de carga** se define entonces en cada punto del volumen, \vec{r}' , haciendo que dichos volúmenes se hagan muy pequeños ³:

$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V'} \quad (5.9)$$

Puede hacerse lo mismo con una superficie o una línea. La superficie se dividiría en pequeños elementos de superficie, $\Delta S'$, y la densidad superficial de carga se definiría como:

$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S'} \quad (5.10)$$

En la línea, tendremos pequeños elementos de longitud $\Delta l'$, con lo que la densidad lineal de carga viene dada por:

$$\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l'} \quad (5.11)$$

³Pero no tanto como para que no tengamos todavía muchas cargas individuales dentro de $\Delta V'$, ya que si tomamos elementos de volumen suficientemente pequeños, puede que no haya ninguna carga dentro!

• **IMPORTANTE:** Fijaros que, en la práctica, no tendréis que construir la densidad de carga de este modo. En la mayoría de los casos, la densidad de carga será una función ya dada por las condiciones del problema. Sin embargo, éste es el modo adecuado de entender que significa dicha función.

5.6. Cálculo del campo eléctrico producido por distribuciones de carga continua

Para calcular el campo creado por una **distribución continua de carga** aplicaremos el principio de superposición del siguiente modo. Comenzaremos con el caso en que la carga está repartida dentro de un volumen, V' , de acuerdo a una función densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r}')$.

Cada uno de los diferenciales de volumen $\Delta V'$ en los que descompondremos el volumen V' estará situado en el punto \vec{r}' , y contendrá una cantidad de carga $\Delta Q = \rho(\vec{r}')\Delta V'$. El campo que dicho diferencial de volumen creará en un punto \vec{r} se obtiene aplicando la Ec. 5.4:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.12)$$

El campo total creado por **todo el volumen** será, aplicando el principio de superposición, la suma del campo creado por cada uno de estos diferenciales de volumen. Pero en el límite en el que $\Delta V \rightarrow 0$, esto equivale a calcular una integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iiint_v dV \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.13)$$

Análogamente pueden deducirse expresiones para **distribuciones de carga sobre una superficie**. En el primer caso, se divide la superficie en elementos de superficie $\Delta S'$, cada uno de los cuales estará situado en una posición \vec{r}' dentro de la superficie, conteniendo una carga $\Delta Q = \sigma\Delta S'$. El campo que dicho elemento creará en el punto \vec{r} será:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\sigma(\vec{r}')\Delta S'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.14)$$

y aplicando de nuevo el principio de superposición, el campo total es la suma (integral)

sobre todos los elementos de superficie:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iint_S dS' \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.15)$$

Finalmente, **para una distribución de carga sobre una curva**, dividiremos la misma en pequeños elementos de longitud $\Delta l'$, cada uno de los cuales estará situado en una posición \vec{r}' y que contendrán una carga $\Delta Q = \lambda \Delta l'$. El campo que dicho elemento de longitud crea en el punto \vec{r} será:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\lambda(\vec{r}') \Delta l'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.16)$$

e integrando a todos los elementos de longitud que forman la distribución lineal tenemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_l dl' \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.17)$$

Como puede verse, la deducción formal de las Eqs. 5.17, 5.15 ó 5.13 no es difícil, requiriendo simplemente la aplicación del principio de superposición que vimos anteriormente. Sin embargo, la resolución de las integrales que aparecen en esas tres ecuaciones puede resultar muy complicada. En muchos casos, su cálculo requiere la elección correcta del sistema y ejes de coordenadas que debemos usar para describir la distribución de carga de que se trate. En dicha elección, tiene mucho que ver las posibles simetrías del sistema. Así, si la distribución de carga tiene *alguna simetría de traslación a lo largo de alguna dirección*, las integrales podrán normalmente resolverse más fácilmente si se usan **coordenadas cartesianas**, *haciendo coincidir dicha dirección de simetría con alguno de los ejes coordenados*. De igual forma, si la distribución de carga tiene *alguna simetría de rotación*, será normalmente recomendable utilizar **coordenadas cilíndricas** (o **polares**). Finalmente, si la distribución tiene *simetría esférica*, será recomendable el escoger **coordenadas esféricas**.

• **Ejemplo 1: Campo creado por un hilo rectilíneo e infinito cargado con una densidad lineal de carga constante, λ , en cualquier punto del espacio**

Este es claramente un problema en la que la carga está distribuida sobre una curva (una línea), y debemos por tanto aplicar la Ec. 5.17. El problema tiene simetría cilíndrica alrededor del eje que contiene al hilo, ya que tiene simetría de rotación alrededor de él, y de

traslación a lo largo de él (por ser infinito). Por ello, escogemos coordenadas cilíndricas, con el eje Z coincidente con el hilo (ver Fig. 5.7). Una vez hecho esto, es fácil escribir los valores de los distintos elementos que aparecen en la integral de la Ec. 5.17:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \\ \vec{r}' &= z'\vec{u}_z \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (z - z')\vec{u}_z + r\vec{u}_r \\ dl' &= dz'\end{aligned}\tag{5.18}$$

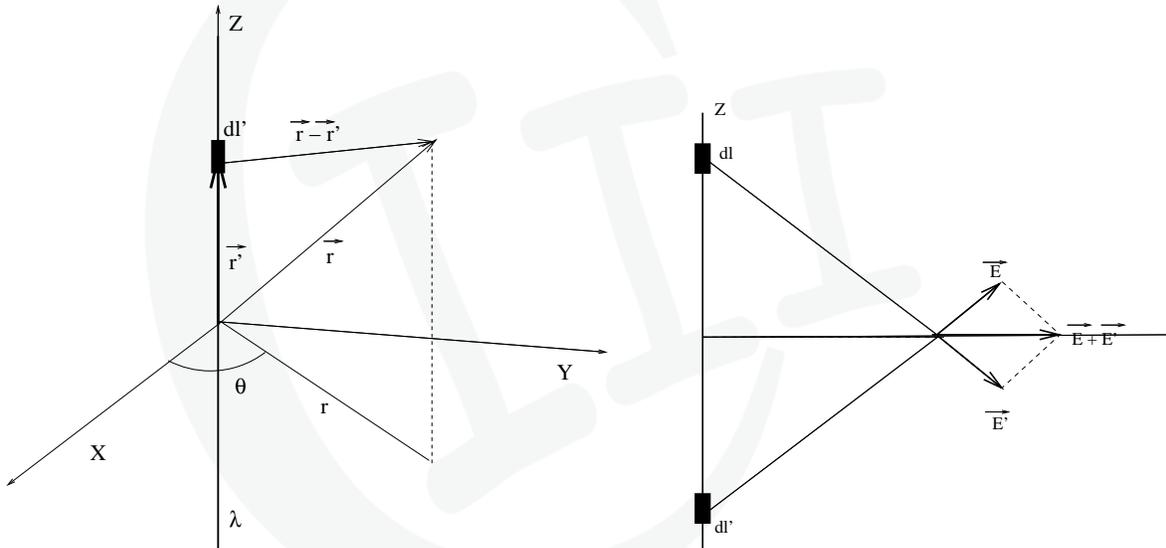


Figura 5.7: Esquema del hilo infinito del Ejemplo 1. Derecha: Anulación de la componente z de la integral que aparece en la Ec. 5.21

Expliquemos cada uno por separado con ayuda de la Fig. 5.7. Primero, \vec{r} da la posición del punto donde queremos calcular el campo creado por el hilo. Puesto que dicho punto es arbitrario, tenemos que usar la expresión general del radio vector en cilíndricas. Sin embargo, \vec{r}' da la posición de los diferenciales de longitud en los que vamos a dividir el hilo. Puesto que el hilo coincide con el eje Z , todos sus puntos tienen necesariamente coordenada $r' = 0$, lo que explica la forma que hemos escogido para \vec{r}' .

Hasta aquí todo es sencillo, y lo hubiera sido también si hubiésemos escogido otro sistema de coordenadas (cartesianas, por ejemplo). La importancia de escoger bien las coordenadas aparece más bien al escribir la forma de dl' , el diferencial de longitud que

recorre la distribución de carga. El diferencial de longitud dl' ha de formarse a partir de los diferenciales de longitud asociados a las tres coordenadas del sistema que se haya escogido. En el caso de coordenadas cartesianas, estos son dx' , dy' y dz' . En el caso de coordenadas cilíndricas, son dr' , dz' y $r'd\theta'$. Ahora, si hemos escogido bien el sistema de coordenadas para nuestro problemas, veremos que cuando nos movemos a lo largo del hilo únicamente variará **una de las coordenadas**. En el caso de las coordenadas que hemos escogido nosotros, solo varía dz' . Por lo tanto, es un buen sistema de coordenadas y pondremos $dl' = dz'$.

Una vez hecho todas estas elecciones, es fácil construir la integral dada por la Ec. 5.17:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_l \frac{\lambda dz'}{|(z - z')^2 + r^2|^{3/2}} [r\vec{u}_r + (z - z')\vec{u}_z]. \quad (5.19)$$

Ahora, para concluir, hemos de escoger los límites de la integral. Para ello, vemos entre que valores tiene que variar z' para recorrer toda la distribución de carga. En nuestro caso, como el hilo es infinito, tiene que hacerse entre $-\infty$ y $+\infty$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz'}{|(z - z')^2 + r^2|^{3/2}} [r\vec{u}_r + (z - z')\vec{u}_z]. \quad (5.20)$$

Fijaros ahora que se trata de una integral que puede dividirse en dos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{|(z - z')^2 + r^2|^{3/2}} r\vec{u}_r + K\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{|(z - z')^2 + r^2|^{3/2}} (z - z')\vec{u}_z, \quad (5.21)$$

donde hemos sacado la densidad de carga λ fuera de la integral ya que es una cantidad constante. Ahora, puede verse fácilmente que la segunda integral es nula. Para ello, basta con notar que estamos integrando una función impar en z' entre límites simétricos ($\pm\infty$). Por tanto, la integral es cero. Una segunda manera de verlo es fijándose en la parte derecha de la Fig. 5.7. En ella se muestra que, por ser el hilo infinito, la componente vertical del campo asociada a cualquier diferencial de longitud que esté por encima del punto P definido por \vec{r} , se compensa con la de su simétrico por debajo del hilo, con lo que el campo sólo puede tener componente radial [Y si no veis ninguna de estas dos explicaciones, hacer la integral explícitamente y ver que da cero!]. Por lo tanto, el campo que queremos calcular viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = Kr\vec{u}_r\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{|(z - z')^2 + r^2|^{3/2}}. \quad (5.22)$$

donde hemos usado que $r\vec{u}_r$ depende solo del punto donde calculamos el campo, y no cambia al variar z' sobre el hilo.

La integral que queda puede calcularse usando la igualdad tabulada:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (5.23)$$

Para ello, basta con hacer el cambio de variable:

$$z'' = z - z'; \quad dz' = -dz'' \quad (5.24)$$

en la Ec.5.22, e invertir los límites de la integral para obtener:

$$\vec{E}(\vec{r}) = Kr\vec{u}_r\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz''}{(z''^2 + r^2)^{3/2}} = Kr\vec{u}_r\lambda \left[\frac{z''}{r^2 \sqrt{z''^2 + r^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\frac{K}{r}\vec{u}_r\lambda. \quad (5.25)$$

Por lo tanto, y usando que $K = 1/4\pi\epsilon_0$, el campo creado por nuestro hilo infinito en cualquier punto del espacio es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r. \quad (5.26)$$

• **Ejercicio:** Fijaros que este problema también tiene simetría de traslación a lo largo del eje que contiene al hilo. ¿Cómo se haría escogiendo coordenadas cartesianas y haciendo que el hilo coincida con alguno de los ejes coordenadas (por ejemplo, el eje Y)?

• **Ejemplo 2: Campo creado por un aro circular cargado con una densidad lineal de carga constante, λ , en cualquier punto del eje perpendicular al aro que pasa por su centro**

De nuevo, nos enfrentamos a un problema en la que la carga está distribuída sobre una curva (una circunferencia), y debemos por tanto aplicar la Ec. 5.17. El problema tiene simetría de giro alrededor del eje que pasa por el centro del aro, pero no tiene simetría cilíndrica. Sin embargo, sigue siendo conveniente escoger coordenadas cilíndricas, haciendo coincidir el eje z con el eje de simetría. Si hacemos esto (ver Fig. 5.8), los valores de los distintos elementos que aparecen en la integral de la Ec. 5.17 son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z\vec{u}_z \\ \vec{r}' &= R\vec{u}_r \\ \vec{r} - \vec{r}' &= z\vec{u}_z - R\vec{u}_r \\ dl' &= Rd\theta' \end{aligned} \quad (5.27)$$

Expliquemos de nuevo por separado, con la ayuda de la Fig 5.8, estos valores. \vec{r} da la posición del punto donde queremos calcular el campo creado por el aro. Puesto que dicho

punto pertenece al eje Z , tendremos que $r = 0$. En cuanto a \vec{r}' , que da la posición de los diferenciales de longitud en los que vamos a dividir el aro, están todos contenidos en el plano $Z = 0$, y por tanto $z' = 0$. Además, están contenidos en una circunferencia de radio R , con lo que tendremos que $r' = R$.

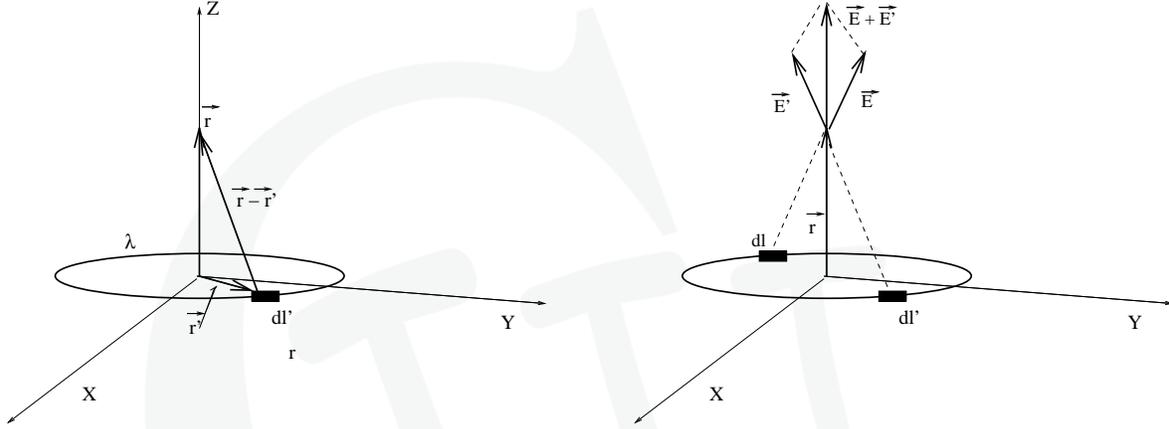


Figura 5.8: Esquema del aro del Ejemplo 2. Derecha: Anulación de la componente radial de la integral que aparece en la Ec. 5.29.

Finalmente, fijaros ahora que el diferencial dl' , que hay que formar usando dr' , dz' y $r'd\theta'$, toma de nuevo una forma muy sencilla gracias a la buena elección de coordenadas: al movernos a lo largo del aro sólo cambia el ángulo θ , ya que $z' = 0$ y $r' = R$!

Por lo tanto, la integral que nos da el campo será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_l \frac{\lambda R d\theta'}{|z^2 + R^2|^{3/2}} [-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z]. \quad (5.28)$$

y, poniendo los límites de integración teniendo en cuenta que θ' cambia entre 0 y 2π al recorrer todo el aro, nos queda que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta'}{|z^2 + R^2|^{3/2}} (-R\vec{u}_r) + K \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta'}{|z^2 + R^2|^{3/2}} z\vec{u}_z. \quad (5.29)$$

De nuevo, es fácil ver que la primera de las dos integrales es cero (¿por qué? Ver parte derecha de la Fig. 5.8). La segunda es muy fácil de calcular, si sacamos primero de la integral todo lo que no depende de θ' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\lambda R}{|z^2 + R^2|^{3/2}} z \vec{u}_z \int_0^{2\pi} d\theta' = \frac{2\pi K \lambda R z}{|z^2 + R^2|^{3/2}} \vec{u}_z. \quad (5.30)$$

Escribiendo esta expresión de nuevo en términos de ϵ_0 nos queda que el campo que buscamos es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_z. \quad (5.31)$$

• **Pregunta:** En el ejemplo 1 vimos que el problema podía hacerse también en coordenadas cartesianas. ¿Es eso también posible para el caso del aro? ¿Por qué no?

• **Ejemplo 3: Campo creado por un disco circular cargado con una densidad superficial de carga constante, σ , en cualquier punto del eje perpendicular al disco que pasa por su centro**

Este problema es muy similar al ejemplo dos, ya que tiene la misma simetría (simetría de giro alrededor del eje que pasa por el centro del disco), pero la carga está distribuida sobre una superficie (el círculo), por lo que debemos aplicar la Ec. 5.15. Escogemos, por tanto, coordenadas cilíndricas, haciendo coincidir el eje z con el eje de simetría. Si hacemos esto (ver Fig. 5.9), los valores de los distintos elementos que aparecen en la integral de la Ec. 5.15 son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z \vec{u}_z \\ \vec{r}' &= r' \vec{u}_r \\ \vec{r} - \vec{r}' &= z \vec{u}_z - r' \vec{u}_r \\ dS' &= r' d\theta' dr' \end{aligned} \quad (5.32)$$

Fijaros (ver Fig. 5.9) que \vec{r} , la posición del punto donde queremos calcular el campo, no ha cambiado respecto al caso del aro del ejemplo 2. En cuanto a \vec{r}' , que dará ahora la posición de los diferenciales de superficie en los que vamos a dividir el disco, siguen todos contenidos en el plano $Z = 0$ como en el caso del aro, y por tanto $z' = 0$. Pero ahora, ya no están contenidos en una circunferencia de radio R , sino que pueden encontrarse en cualquier punto del disco. Por lo tanto, tendremos que $0 \leq r' \leq R$.

Finalmente, para formar ahora el diferencial dS' , hay que hacerlo usando los diferenciales asociados a las coordenadas dr' , dz' y $r'd\theta'$. De nuevo, si hemos elegido bien las coordenadas, veremos que solo dos de ellas varían al movernos por la distribución de carga. En el caso del disco, dr' y $r'd\theta'$, y el diferencial dS' se forma como el producto de ellos.

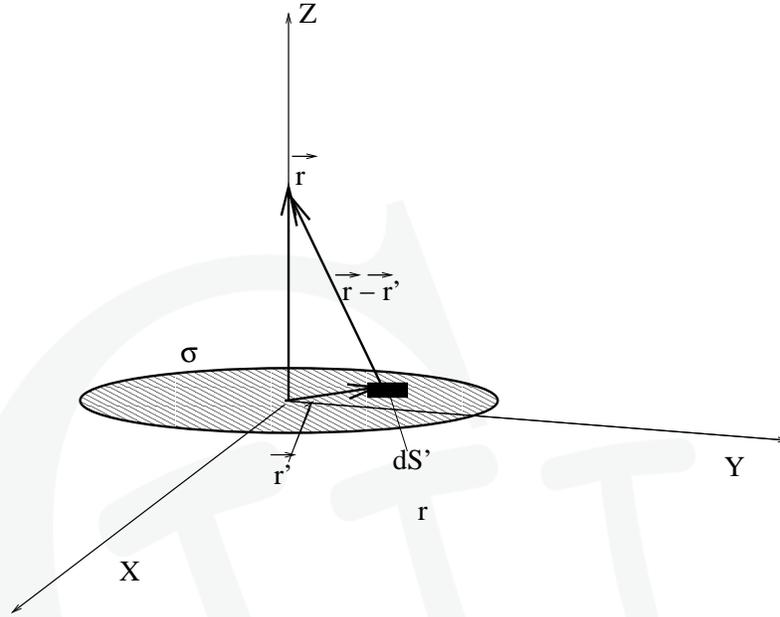


Figura 5.9: Esquema del disco del Ejemplo 3.

Por lo tanto, la integral que nos da el campo creado por el disco en su eje será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \frac{\sigma r' dr'}{|z^2 + r'^2|^{3/2}} [-r' \vec{u}_r + z \vec{u}_z]. \quad (5.33)$$

donde hemos puesto los límites de integración teniendo en cuenta que θ' cambia entre 0 y 2π y r' entre 0 y R al recorrer todo el disco, y donde hemos separado los diferenciales adecuadamente. De nuevo, es fácil ver que la primera de las dos integrales es cero por argumentos de simetría (¿por qué?). La segunda es muy fácil de calcular, si sacamos primero de la integral todo lo que no depende de θ' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sigma z \vec{u}_z \int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta', \quad (5.34)$$

de forma que la integral angular da un prefactor 2π :

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K \sigma z \vec{u}_z \int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}. \quad (5.35)$$

Para hacer la integral radial, usamos que:

$$\int \frac{xdx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad (5.36)$$

de forma que el campo queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K \sigma z \vec{u}_z \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + r'^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{u}_z, \quad (5.37)$$

donde hemos reescrito de nuevo $K = 1/4\pi\epsilon_0$.

• **Ejemplo 4: Campo creado por un cilindro de altura h y radio R cargado con una densidad volumétrica de carga constante, ρ , en cualquier punto exterior al cilindro del eje perpendicular a sus bases que pasa por su centro**

Este problema es el inmediatamente superior en dificultad a los vistos en los ejemplos 2 y 3, que mantiene la misma simetría (simetría de giro alrededor del eje que pasa por el centro de las bases). Ahora, la carga está distribuida sobre un volumen (el cilindro), y por ello debemos aplicar la Ec. 5.13. Escogemos, una vez más, coordenadas cilíndricas, haciendo coincidir el eje z con el eje de simetría. Además, arbitrariamente, elegimos el centro de coordenadas en el centro del cilindro. Si hacemos esto (ver Fig. 5.10), los valores de los distintos elementos que aparecen en la integral de la Ec. 5.15 son:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z\vec{u}_z \\ \vec{r}' &= r'\vec{u}_r + z'\vec{u}_z \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (z - z')\vec{u}_z - r'\vec{u}_r \\ dV' &= r'd\theta' dr' dz' \end{aligned} \quad (5.38)$$

Los cambios aparecen en el vector \vec{r}' que nos dice donde están situados los diferenciales de volumen en los que se descompone el cilindro (ver Fig. 5.10). Como ya no tienen que estar restringidos al plano $Z = 0$ (a diferencia de los ejemplos 2 y 3), es necesario considerar ahora la posibilidad de que $-h/2 \leq z' \leq h/2$. En cuanto al diferencial dV' , hay que hacerlo usando los diferenciales asociados a las coordenadas dr' , dz' y $r'd\theta'$. En este caso no hay dudas. Es el producto de los tres.

Por lo tanto, la integral que nos da el campo creada por el cilindro en su eje será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-h/2}^{h/2} dz' \int_0^R \frac{\rho r' dr'}{|(z - z')^2 + r'^2|^{3/2}} [-r'\vec{u}_r + (z - z')\vec{u}_z]. \quad (5.39)$$

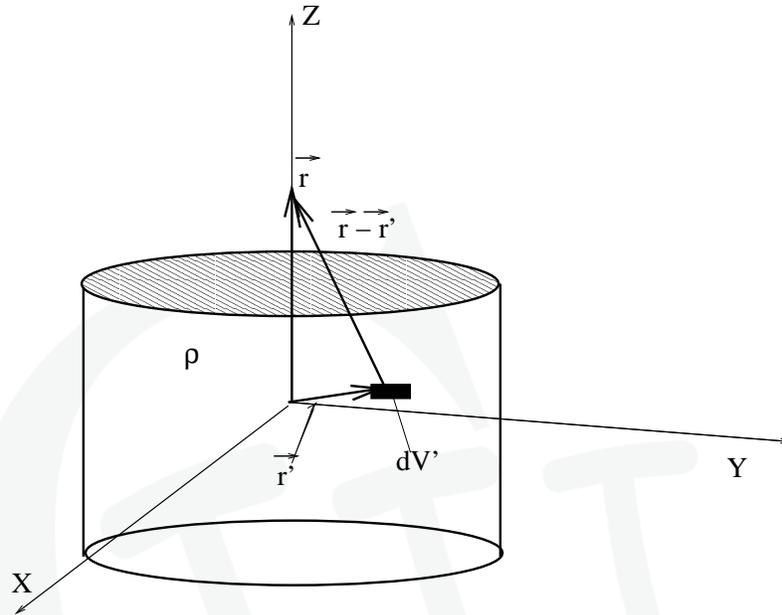


Figura 5.10: Esquema del cilindro del Ejemplo 4.

donde hemos puesto los límites de integración teniendo en cuenta que θ' cambia entre 0 y 2π , que $-h/2 \leq z' \leq h/2$ y que r' varía entre 0 y R al recorrer todo el cilindro, y donde hemos separado los diferenciales adecuadamente. De nuevo, es fácil ver que la primera de las dos integrales es cero por argumentos de simetría (¿por qué?). La segunda es muy fácil de calcular, si sacamos primero de la integral todo lo que no depende de θ' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\rho\vec{u}_z \int_{-h/2}^{h/2} dz'(z - z') \int_0^R \frac{r' dr'}{|(z - z')^2 + r'^2|^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta', \quad (5.40)$$

de forma que la integral angular da otra vez un prefactor 2π :

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K\rho\vec{u}_z \int_{-h/2}^{h/2} dz'(z - z') \int_0^R \frac{r' dr'}{|(z - z')^2 + r'^2|^{3/2}}. \quad (5.41)$$

Ahora, fijaros que la integral radial es la misma que ya hicimos en el ejemplo 3 (ver Ec. 5.36, y hacer $z - z' = a$ y $x = r'$), con lo que podemos reescribirla así:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K\rho\vec{u}_z \int_{-h/2}^{h/2} dz'(z - z') \left[-\frac{1}{\sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} \right]_0^R, \quad (5.42)$$

o, evaluando los límites:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K \rho \vec{u}_z \int_{-h/2}^{h/2} dz' \left[\frac{z - z'}{|z - z'|} - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]. \quad (5.43)$$

Falta ahora por calcular las integrales en z' . La primera es muy sencilla, ya que la función $(z - z')/|z - z'|$ vale $+1$ para $z > z'$ y -1 para $z < z'$. Puesto que nos piden el campo en puntos exteriores al cilindro, esta función vale siempre $+1$ (si el punto está por encima del cilindro) o -1 (si está por debajo). Por ello, la integral es igual a $\pm h$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi K \rho \vec{u}_z \left[\pm h - \int_{-h/2}^{h/2} dz' \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]. \quad (5.44)$$

En cuanto a la segunda, hacemos primero el cambio de variable:

$$z - z' = z'' \quad dz' = -dz'', \quad (5.45)$$

de forma que:

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz' \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} = \int_{z-h/2}^{z+h/2} dz'' \frac{z''}{\sqrt{z''^2 + R^2}} = \left[\sqrt{z''^2 + R^2} \right]_{z-h/2}^{z+h/2} \quad (5.46)$$

donde hemos aplicado la primitiva,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (5.47)$$

Metiendo todo ello en la ecuación para el campo (Ec.5.44), y usando que $K = 1/4\pi\epsilon_0$, se obtiene la expresión final:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\pm h - \sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + R^2} + \sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + R^2} \right] \vec{u}_z. \quad (5.48)$$

Como puede verse, las cosas se van haciendo más y más complicadas, sobre todo al atacar problemas bi- y tri-dimensionales. Aún más difíciles resultan los siguientes ejercicios, que hay que realizar en coordenadas esféricas:

Ejercicio: Calcular el campo creado por una carcasa esférica hueca de radio R , cargada con densidad superficial constante σ , en un punto arbitrario *interior* a la esfera.

Ejercicio: Calcular el campo creado por una esfera maciza de radio R , cargada con densidad volumétrica constante ρ , en un punto arbitrario *exterior* a la esfera.

5.7. Teorema de Gauss para el campo eléctrico

Como puede verse del ejemplo 4 de la sección anterior, así como de los ejercicios con simetría esférica que propusimos al final del tema anterior, el cálculo del campo eléctrico creado por una distribución de carga puede ser muy complicado o, cuanto menos, tedioso desde el punto de vista matemático. Sin embargo, en problemas con *un alto grado de simetría*, existe otro camino mucho más sencillo para calcular el valor de estos campos. El precio a pagar es, sin embargo, un más alto grado de abstracción en la descripción de las interacciones entre las cargas. El beneficio de esta descripción va mucho más allá que el proporcionarnos con una herramienta útil para calcular campos, aunque no ahondaremos en sus ventajas en este curso.

En esta sección estudiaremos los elementos básicos de esta descripción, para lo cual necesitaremos echar mano de conceptos tales como: *líneas de fuerza, flujo, fuentes y sumideros del campo*, todos ellos tomados originalmente de la Física de Fluidos. Algunos de ellos ya los hemos encontrado antes (las líneas de fuerza, y las fuentes y sumideros del campo eléctrico, que son las cargas). Veamos entonces que significa el concepto de *flujo* de un campo vectorial.

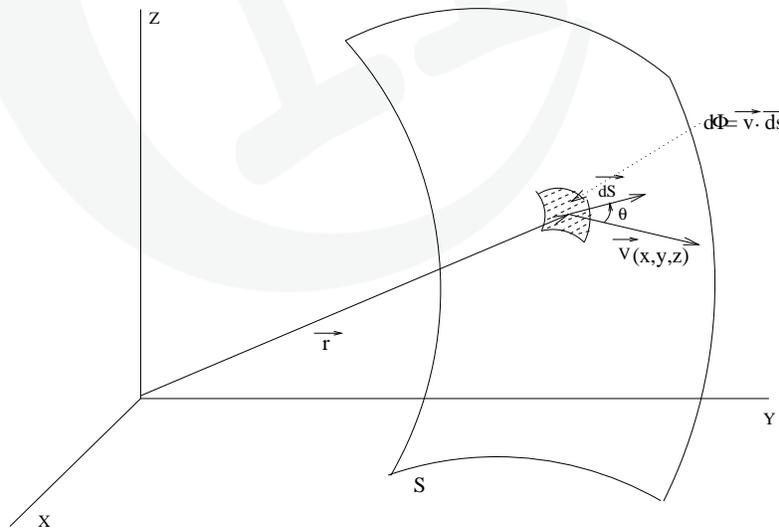


Figura 5.11: Flujo de un vector.

5.7.1. Definición matemática de flujo de un campo vectorial a través de una superficie arbitraria.

Como decíamos antes, el concepto de **flujo de un campo vectorial** aparece por primera vez en Física de Fluidos. Se usa, en ese caso, para cuantificar la cantidad de fluido que atraviesa una superficie arbitraria S en la unidad de tiempo cuando dicho fluido se mueve siguiendo un campo de velocidades dado. Veamos cómo se define.

Para ello, suponemos inicialmente que existe un fluido que llena una región del espacio cualquiera. El volumen que ocupa el fluido se divide en pequeños diferenciales de volumen, dV , suficientemente pequeños como para poder considerar que las partículas que contienen están distribuidas uniformemente en ellos, moviéndose todas ellas con igual velocidad. Es posible cuantificar cuantas de éstas partículas hay en cada punto del espacio definiendo una función **densidad de partículas**, n . Se construye desplazando el diferencial de volumen por toda la región del espacio y contando cuantas partículas, dN , quedan dentro de él en función de su posición (como veis, su significado es totalmente análogo al de la densidad de carga que vimos anteriormente). Luego se define $n(x, y, z)$ de modo que se cumpla que $dN(x, y, z) = n(x, y, z)dV$. El fluido tiene también asociado un campo de velocidades, $\vec{v}(x, y, z)$, que dice cual es la velocidad a la que se mueve el elemento de volumen dV cuando se sitúa en el punto (x, y, z) . La trayectoria que dicho elemento seguiría si se dejara en un punto define las **líneas de fuerza** del campo \vec{v} ⁴.

Supongamos que queremos ahora saber cuantas partículas atraviesan una superficie arbitraria S en la unidad de tiempo (ver Fig. 5.11). Para ello dividimos la superficie en pequeños elementos de superficie, dS , suficientemente pequeños como para que podamos considerarlos planos. Recordando que una superficie cualquiera puede siempre representarse por un vector⁵, representaremos cada uno de estos elementos de superficie por un vector \vec{dS} . Si somos ahora capaces de calcular el número de partículas que atraviesa cualquiera de esos elementos de superficie en que hemos dividido S , sumando el número de partículas que atraviesa cada uno de ellos podemos calcular el flujo total de partículas a través de la superficie total S .

Para calcular el flujo de partículas a través del elemento de superficie dS situado en (x, y, z) fijémonos en la Fig. 5.12. El valor de la velocidad en el punto donde está situado

⁴Fijaros que esto es lo mismo que lo que decíamos para el campo eléctrico \vec{E} , cuando decíamos que es posible obtener sus líneas de fuerza sin más que abandonar un protón en su presencia y seguir su trayectoria!

⁵Dicho vector ha de ser perpendicular a ella y tener por módulo lo que valga la superficie, como vimos al hablar del producto vectorial de dos vectores en el tema 1.

el diferencial de superficie será $\vec{v}(x, y, z)$, y podremos suponerla constante sobre todo dS , puesto que es muy pequeño. Recordando ahora en que en un tiempo Δt , el espacio recorrido a velocidad constante V es igual a $V\Delta t$, tendremos que sólo aquellas partículas del fluido que estén contenidas en el area rayada de la figura atravesarán dS . Como el volumen del trozo rallado será $V dS \cos\theta \Delta t$ ⁶, el número de partículas contenidas en él será igual a $n V dS \cos\theta \Delta t = n \Delta t \vec{V} \cdot \vec{dS}$. Por lo tanto el flujo de partículas que es la cantidad de partículas que pasa por unidad de tiempo será: $d\Phi = n \vec{V} \cdot \vec{dS}$.

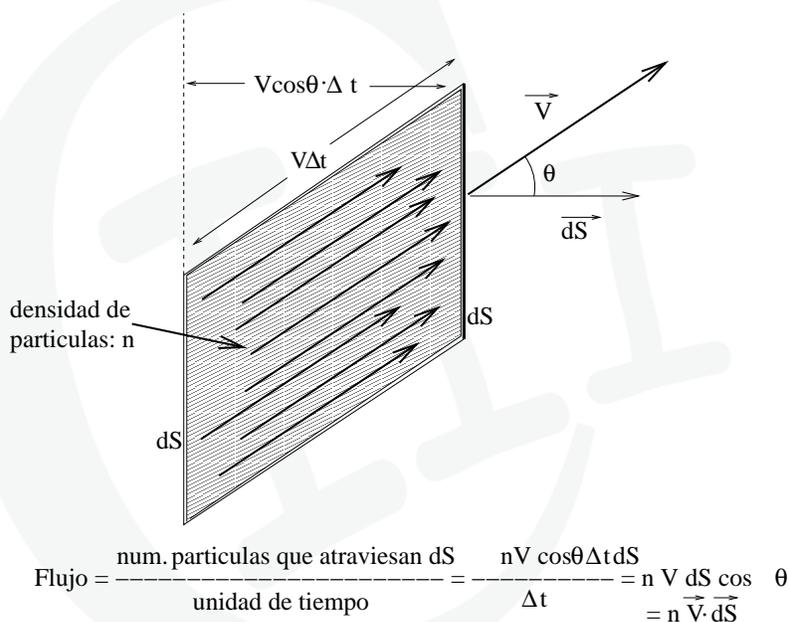


Figura 5.12: Flujo de un vector (detalle).

Para calcular ahora el flujo total de partículas a través de la superficie total basta sumar a todos los elementos de superficie en los que la dividimos. O lo que es lo mismo, integrar:

$$\Phi = \iint_S n \vec{V} \cdot \vec{dS}. \quad (5.49)$$

En el caso del campo eléctrico \vec{E} (ó de cualquier otro campo vectorial arbitrario) se define, por analogía al caso del campo de velocidades del fluido, el flujo a través de una

⁶Recordad que el área de un paralelogramo es siempre base por altura!

superficie arbitraria S como:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.50)$$

¿Qué significa físicamente? Recordemos que las líneas de campo eléctrico coincidían con las trayectorias descritas por un protón abandonado en presencia de dicho campo en algún punto, del mismo modo que las líneas del campo de velocidades del fluido, \vec{v} , coinciden con las trayectorias de los diferenciales de volumen arrastrados por él. Por lo tanto el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie será grande si muchas de estas líneas la atraviesan y pequeño si lo hacen pocas. Se interpreta por tanto como una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie dada.

• **IMPORTANTE:** En muchos casos, la superficie a través de la cual queremos calcular el flujo de un campo será **cerrada**. Por **superficie cerrada** se entiende una superficie que encierra un volumen V , y hay que distinguirlas de lo que se llaman **superficies abiertas**, que no encierran ningún volumen. Por ejemplo, la superficie exterior de un cubo es una superficie cerrada (encierra el volumen del cubo), pero cada una de las caras del cubo es una superficie abierta, ya que no encierran nada! Otra manera de definir las es diciendo que la superficie es cerrada si carece de un contorno, mientras que las superficies abiertas si lo tienen (por ejemplo, los bordes de la cara del cubo que antes mencionábamos).

En cuanto a la notación, el flujo a través de una superficie cerrada se denota por:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.51)$$

Por último, fijaros que una superficie cerrada siempre puede dividirse en superficies abiertas: así, la superficie exterior del cubo puede dividirse en seis caras cuadradas, que son abiertas. Igualmente, una esfera, que es cerrada, puede dividirse en dos casquetes semiesféricos (abiertos) si la partimos en dos a través de algún círculo máximo (meridiano). Entonces, se cumple que el flujo a través de la superficie cerrada es igual a la suma de los flujos a través de cada una de las componentes abiertas que la forman. Así, llamando S_1 y S_2 a las superficies de los dos casquetes semiesféricos en que dividimos la esfera, tendremos que:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.52)$$

• **Ejemplo:** calcular el flujo del campo vectorial $\vec{E}(x, y, z) = 2zy \vec{i} + 3xz^2 \vec{j} - 2y \vec{k}$

a través del cuadrado, contenido en el plano YZ delimitado por los puntos $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 0)$ (ver Fig. 5.13).

La solución es sencilla. Fijaros que el vector $d\vec{S}$ es, en este caso, perpendicular al cuadrado y dirigido según el eje X . Como la coordenada x permanece constante para todos los puntos del cuadrado (e igual a 0), formamos el vector como:

$$d\vec{S} = dydz\vec{i}. \quad (5.53)$$

Por lo tanto,

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = 2zy \, dydz, \quad (5.54)$$

y el flujo que nos piden se obtiene resolviendo la integral:

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^1 2zy \, dydz = 2 \int_0^1 zdz \int_0^1 ydy = 2 \int_0^1 zdz \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \int_0^1 zdz = \frac{1}{2}. \quad (5.55)$$

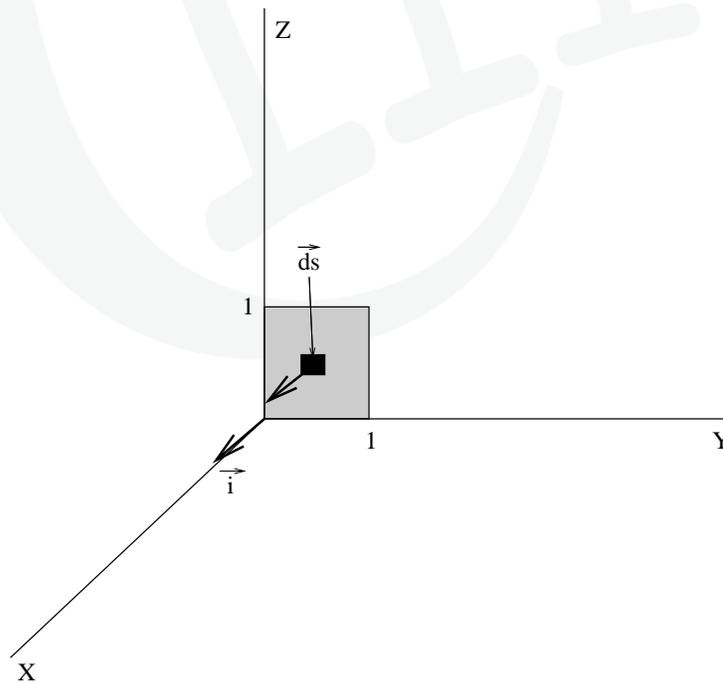


Figura 5.13: Superficie del ejemplo, y construcción del vector $d\vec{S}$.

5.7.2. Cálculo de flujos en el caso de que el campo vectorial forme un ángulo constante con la superficie.

En muchos casos de interés práctico suele darse que el campo vectorial cuyo flujo a través de una superficie queremos calcular forme *un ángulo constante* con dicha superficie. En ese caso, la expresión del flujo se simplifica a:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \cos \theta \iint_S |\vec{E}| dS, \quad (5.56)$$

donde θ es el ángulo que forman \vec{E} y $d\vec{S}$. Esta integral es más fácil de realizar, ya que no tenemos que preocuparnos de como cambia la orientación de ambos vectores a la hora de hacer la integral.

Esta situación se simplifica aún más si el campo vectorial *tiene el mismo módulo* sobre todos los puntos de la superficie. En ese caso, se tiene que:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| \cos\theta \iint_S dS = |\vec{E}| \cos\theta S, \quad (5.57)$$

donde S es el área de la superficie.

Los ejemplos más importantes en que \vec{E} es constante en módulo (no en dirección) y forma un ángulo constante con $d\vec{S}$ son aquellos en los que el campo tiene simetría esférica o cilíndrica, y calculamos su flujo a través de ciertas esferas o cilindros.

• Flujo de campos con simetría esférica a través de esferas

En problemas con simetría *esférica* es común encontrarse con un campo \vec{E} dirigido en la dirección radial desde un cierto centro, O , y cuyo módulo dependa sólo de la distancia al punto O , r :

$$|\vec{E}(\vec{r})| = E(r). \quad (5.58)$$

Por lo tanto, si queremos calcular el flujo de dicho campo a través de una esfera de radio R centrada en el mismo centro, se cumple que \vec{E} es paralelo a $d\vec{S}$ en todos los puntos de la esfera (ver Fig. 5.14 (izquierda)). Por tanto, el flujo a través de la esfera vendrá entonces dado por:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = E(R) \oiint_S dS = E(R) S = E(R) 4\pi R^2. \quad (5.59)$$

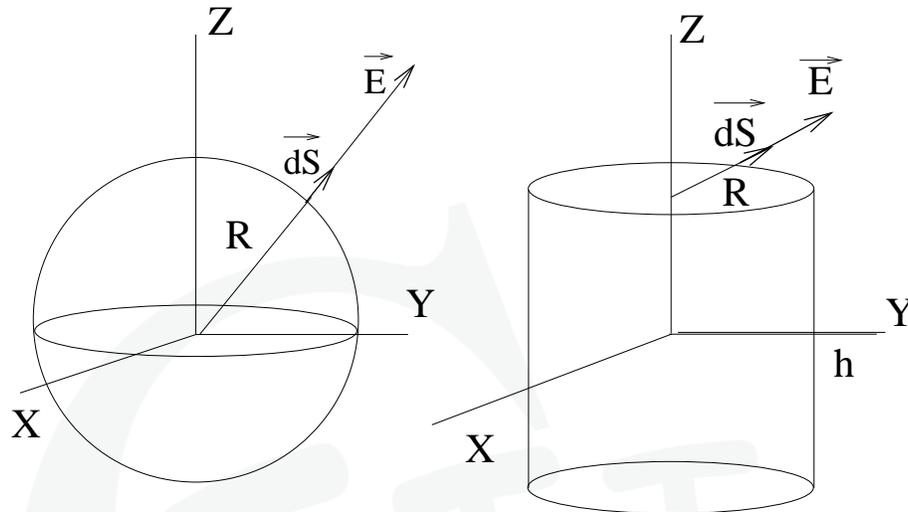


Figura 5.14: Ejemplos de campos eléctricos que verifican $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$: a través de una esfera (derecha) y de una superficie cilíndrica (izquierda).

• Flujo de campos con simetrías cilíndricas a través de un cilindro

Otro caso similar al anterior y muy común en problemas con simetría *cilíndrica*, es el de un campo eléctrico dirigido según la dirección radial en coordenadas cilíndricas, y cuyo módulo depende sólo de la distancia radial a dicho eje. En ese caso, el flujo de dicho campo a través de una superficie cilíndrica de radio R y altura h , y con eje dirigido según el eje z (ver Fig. 5.14 (derecha)) es realmente fácil de calcular:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{lateral} E dS = E(R) 2\pi R h. \quad (5.60)$$

donde el flujo a través de las bases es cero por ser $d\vec{S}$ y \vec{E} perpendiculares.

5.7.3. Teorema de Gauss para el campo eléctrico

Tras esta introducción de las herramientas matemáticas, volvamos a la descripción de los campos eléctricos que nos ocupaba. En concreto, nos concentraremos en lo que se llama el **teorema de Gauss** para el campo eléctrico, que no es sino una expresión matemática que nos dice cuánto vale el flujo del campo \vec{E} , creado por alguna distribución de carga, a través de una **superficie cerrada** arbitraria S .

Antes de dar la expresión matemática para este flujo fijaros que, puesto que el flujo no es sino una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan una superficie, el flujo de un campo eléctrico *a través de una superficie cerrada* será **nulo** a menos que se **creen** o se **destruyan** líneas de campo en el interior de la misma. Si no, todas las líneas que entren en la superficie por algún lado salen de nuevo por algún otro lado, y el flujo neto es nulo. Para visualizar esto, en la Fig. 5.15 se muestran las líneas de campo creadas por una pareja de cargas positiva y negativa. Consideramos entonces tres superficies cerradas: a la izquierda, una esfera que engloba a la carga positiva; a la derecha, una esfera que engloba a la carga negativa; y arriba, una esfera que no engloba a ninguna carga. Fijaros que el flujo neto de líneas que atraviesa la última es cero, ya que todas las líneas que entran vuelven a salir.

Sin embargo, el flujo a través de la superficie esférica es positivo cuando engloba a la carga positiva, y negativo cuando engloba a la negativa. Matemáticamente esto se entiende ya que, en el caso por ejemplo de la esfera que engloba a la carga positiva, el vector campo \vec{E} y el vector $d\vec{S}$ forman siempre menos de 90 grados y, por tanto, su producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$. En el caso de la esfera que rodea a la carga negativa, el campo \vec{E} va dirigido hacia dentro de la superficie mientras que $d\vec{S}$ apunta hacia afuera. Por ello, $\vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$.

La deducción matemática del Teorema de Gauss no vamos a darla aquí ⁷. Nos limitaremos a dar el resultado final, que nos dice que el flujo del campo \vec{E} a través de una superficie cerrada arbitraria, S , es proporcional a la *carga total encerrada por dicha superficie*, Q_S :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (5.61)$$

donde $\epsilon_0 \equiv 1/4\pi K$ ⁸. Como dijimos, sólo es diferente de cero si la superficie engloba alguna carga; y es positivo si la carga total englobada lo es, y negativo en caso contrario.

5.7.4. Aplicación del Teorema de Gauss al cálculo de campo eléctricos en sistemas con alto grado de simetría

El **teorema de Gauss** es una herramienta de gran utilidad para calcular campos eléctricos en casos en los que la distribución de carga que los crea tiene alguna simetría sencilla, casi siempre cilíndrica o esférica. El concepto de **simetría** es uno de los más importantes en Física, y permitirá simplificar enormemente muchos problemas. Recordemos aquí algunas definiciones que ya vimos en la parte de Cinemática.

⁷Al final de esta sección se incluye un material adicional en la que se muestra de donde se obtiene.

⁸Recordad que $K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$

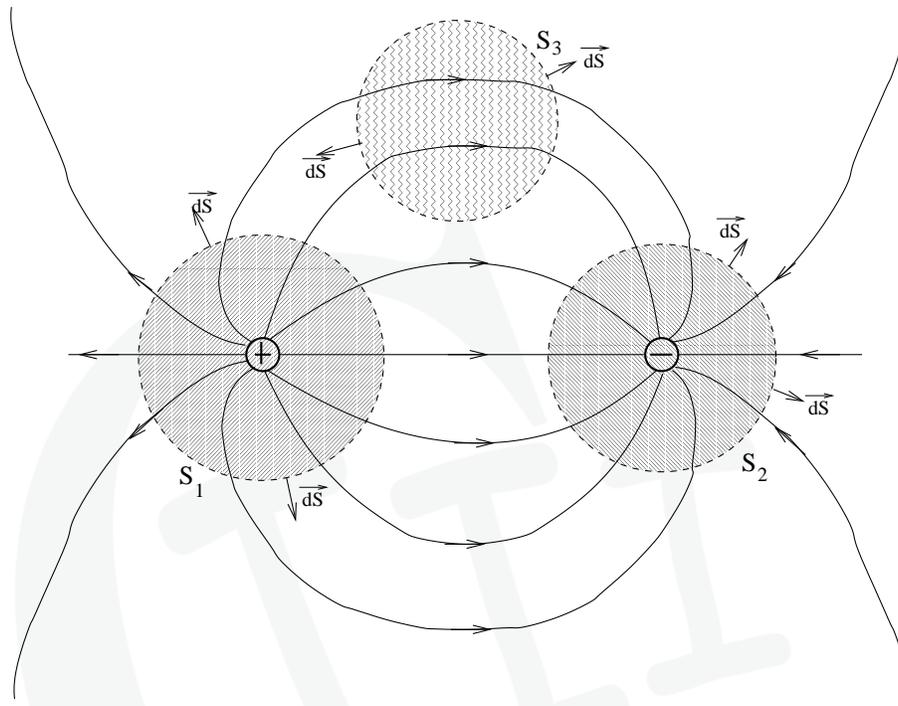


Figura 5.15: Flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada.

Diremos que la distribución de carga tiene **simetría cilíndrica** si: 1) es invariante bajo **rotaciones alrededor de algún eje**, que se conoce como **eje de revolución** y 2) es invariante bajo **traslaciones a lo largo de dicho eje**. Por ejemplo, un hilo infinito y rectilíneo, cargado uniformemente, tiene simetría cilíndrica porque es invariante bajo rotaciones alrededor del eje que contiene al mismo hilo y bajo traslaciones a lo largo de dicho eje. De igual modo, si distribuimos carga uniformemente en un cilindro infinito, ésta es invariante bajo rotaciones alrededor del eje generatriz del cilindro y bajo traslaciones a lo largo del mismo eje.

Diremos que la distribución de carga tiene **simetría esférica** si es invariante bajo rotaciones alrededor de **cualquier eje** que atraviese un punto, conocido como **centro**. Por ejemplo, en el caso de una distribución de carga uniforme en una esfera maciza, la distribución es invariante bajo rotaciones alrededor de cualquier eje que pase por el centro de la esfera. Lo mismo puede decirse de una distribución de carga uniforme sobre una cascará esférica.

¿Cómo se utiliza ahora el teorema de Gauss para calcular el campo creado por una distribución de carga dada con este tipo de simetrías? Pues la estrategia se basa en hacer uso de la siguiente propiedad: si la distribución tiene simetría esférica o cilíndrica, entonces el módulo del campo eléctrico que crea solo puede depender de la coordenada r :

$$|\vec{E}(\vec{r})| = E(r) \quad (5.62)$$

siendo r la distancia al centro en el caso esférico, y la distancia al eje en el cilíndrico. Veamos como utilizar este hecho, en combinación con el Teorema de Gauss, para calcular el valor del campo eléctrico en los dos ejemplos siguientes:

• **Ejemplo 1 [simetría cilíndrica]: Campo creado por un hilo cargado infinito con densidad de carga lineal uniforme λ (ver Ejemplo 1, Ley de Coulomb)**

El problema tiene simetría cilíndrica, ya que cualquier rotación alrededor del eje que contiene al hilo deja el problema invariante. Por lo tanto, debido a la simetría cilíndrica de la distribución se cumple que $|\vec{E}(\vec{r})| = E(r)$: es decir, el campo tendrá igual módulo en todos aquellos puntos que estén a la misma distancia del eje. Fijaros que el lugar geométrico de todos estos puntos es superficie cilíndrica de radio r , cuyo eje coincide con el hilo.

En segundo lugar, es importante darse cuenta de que el campo creado por el hilo en cualquier punto del espacio, \vec{r} , está dirigido necesariamente en la dirección radial respecto al eje formado por el hilo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r. \quad (5.63)$$

Para verlo, basta con pensar en que la componente del campo eléctrico no dirigida en la dirección radial, creada por cualquier elemento de longitud del hilo que esté por encima del plano que contiene al punto, será cancelado por el elemento simétrico respecto a dicho plano que esté por debajo de éste (ver parte derecha de la Fig. 5.7).

Por lo tanto, sólo nos resta calcular su módulo. Para ello, nos aprovechamos de que el Teorema de Gauss nos dice que, para cualquier superficie cerrada S , el flujo a su través tiene que ser igual a la carga que encierre (dividida por ϵ_0). Por tanto, si escogemos una superficie con una forma tal que permita calcular este flujo aun sin saber la expresión del módulo del campo eléctrico, podremos deducir el valor del módulo del campo de aplicar el Teorema de Gauss. En el caso de este problema dicha superficie es un cilindro de radio r , ya que en para esta superficie, los vectores \vec{E} y $d\vec{S}$ son paralelos y el módulo del campo \vec{E} que no conocemos es constante sobre la superficie, con lo que puede sacarse de la integral

del flujo:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \oiint_S dS = E(r)2\pi rh, \quad (5.64)$$

donde h es la longitud del cilindro que mantenemos de momento. En cuanto a la carga contenida en dicho cilindro será:

$$Q_S = \lambda h \quad (5.65)$$

Luego, usando el Teorema de Gauss para despejar el valor del módulo del campo, llegamos a:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0\pi r} \vec{u}_r, \quad (5.66)$$

que deberíais comparar con el Ejemplo 1 que hicimos al poner en práctica con la ley de Coulomb (ver Ec. 5.26). Claramente, el cálculo es mucho más sencillo aplicando el Teorema de Gauss, que calculando las engorrosas integrales que tuvimos que resolver entonces.

• **Ejemplo 2 [simetría esférica]:** Campo creado por una esfera mazica cargada con densidad de carga de volumen ρ .

El problema tiene ahora simetría esférica, ya que si rotamos la esfera alrededor de cualquier eje que pase por el centro de la misma, se mantiene invariante. Ahora, la simetría nos permite saber que de nuevo $|\vec{E}(\vec{r})| = E(r)$ y que, además, el campo eléctrico va a tener dirección radial desde el centro de la esfera cargada (como se ve por argumentos totalmente análogos al caso del hilo infinito):

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r. \quad (5.67)$$

Para aprovecharnos de esta información y calcular el valor de $E(r)$ usando el Teorema de Gauss vamos a elegir superficies con forma de esferas que pasen por el punto r donde queramos calcular $E(r)$, y que esten centradas en el centro de la esfera cargada. El motivo es que el vector $d\vec{S}$ perpendicular a estas superficies es paralelo al vector \vec{E} en cada punto de la esfera y, además, $E(r)$ es constante sobre ellas. Por eso, el flujo del campo eléctrico a través de esta esfera de radio r puede calcularse aunque no se sepa que vale $E(r)$:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)4\pi r^2. \quad (5.68)$$

Para aplicar ahora el Teorema de Gauss necesitamos calcular la carga contenida dentro de la superficie que hemos escogido. Ésta será, sin embargo, diferente si $r > R$ o $r < R$.

Si $r > R$, toda la carga de la esfera cargada está dentro de la segunda esfera:

$$Q_s = Q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (5.69)$$

Si $r < R$, entonces tendremos que solo parte de la carga de la esfera cargada estará dentro de la segunda esfera. Podemos calcularla por una regla de tres, sabiendo que en una esfera de radio R hay una carga total Q , en una de radio r tendremos:

$$Q_s = Q \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \right) / \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (5.70)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\rho = Q / \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)$.

Por tanto, al aplicar el teorema de Gauss igualando la Eq. 12 con la 13 ó la 14, tendremos dos valores diferentes para el módulo del campo, $E(r)$, según queramos calcularlo en un punto que esté dentro o fuera de la esfera cargada:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}, & r > R \\ \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^3}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & r < R \end{cases} \quad (5.71)$$

Es realmente pedagógico comparar la simplicidad de la solución de este ejemplo usando el Teorema de Gauss, con la del cálculo del mismo campo usando la ley de Coulomb.

5.8. Fuentes escalares del campo eléctrico: operador divergencia

En la primera sección del bloque de Electrostatica vimos como se calculaba el valor del campo $\vec{E}(\vec{r})$ si se conocía la distribución de las fuentes del campo (es decir, las cargas positivas y negativas en las que nacen/mueren las líneas de fuerza) a través de la densidad de carga ρ . Bastaba con usar *la ley de Coulomb*. En esta sección vamos a tratar de resolver el problema inverso: cómo pueden localizarse las fuentes del campo eléctrico si uno conoce la expresión del campo eléctrico a que dan lugar. Es decir, si uno sabe que $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x, y, z) \vec{i} + E_y(x, y, z) \vec{j} + E_z(x, y, z) \vec{k}$, donde las funciones E_x , E_y y E_z conocidas, ¿donde están situadas las cargas que lo crean?. Para ello, necesitaremos introducir un operador diferencial nuevo, el *operador divergencia*.

5.8.1. El operador divergencia

El operador **divergencia** es un operador diferencial de la misma familia que el operador gradiente y el operador rotacional que ya hemos discutido anteriormente. A diferencia de éstos, la divergencia es un operador que **actúa sobre un campo vectorial \vec{E} y produce como resultado un campo escalar** que se denota como $\nabla \cdot \vec{E}$, y que tiene como expresión:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (5.72)$$

en coordenadas cartesianas.

• **Ejemplo:** Calcular la divergencia del campo vectorial $\vec{E}(x, y, z) = 2zy \vec{i} + 3xyz^2 \vec{j} - 2zy \vec{k}$.

Para ello, basta con aplicar la definición anterior:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3xz^2 - 2z, \quad (5.73)$$

que es, como se dijo antes, una **función escalar**.

5.8.2. Fuentes escalares del campo eléctrico

Se llaman **fuentes escalares** de un campo cualesquiera a los puntos donde su divergencia es diferente de cero. En el caso del campo eléctrico, *dichas fuentes escalares son precisamente las cargas eléctricas que lo crean*. De esta forma, la divergencia del campo será positiva donde se localicen las cargas positivas, y negativa donde estén las cargas negativas, y será nula en los demás puntos del espacio. En concreto, se cumple que,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.74)$$

expresión que se conoce como **la forma diferencial del Teorema de Gauss**. Por ello, si conocemos la expresión de un campo eléctrico, la densidad de carga que lo crea puede obtenerse como $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})$.

• MATERIAL ADICIONAL⁹

⁹Podeis obviar lo que resta de la sección; sólo lo incluyo para completar la discusión para el que tenga curiosidad de entender cómo se demuestra que la divergencia del campo eléctrico permite realmente localizar donde están las cargas.

¿Por qué es esto así? Bueno, pues recordemos primero que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es, por el Teorema de Gauss, igual a la carga encerrada en dicha superficie (salvo una constante):

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (5.75)$$

Y esto es verdad para cualquier superficie cerrada. Ahora, pensemos en lo siguiente. Si yo quiero saber si en un punto \vec{r} hay carga, puedo hacer lo siguiente. Considero un diferencial de volumen dV que contenga a dicho punto. Supongamos que tiene la forma de un paralelogramo con lados dx , dy y dz como el que se muestra en la Fig. 5.16 (lo que sigue es independiente de la forma del diferencial de volumen, por lo que he elegido la forma más simple). La superficie exterior de dicho cubo S_{dV} es una superficie cerrada y, por tanto, el flujo del campo eléctrico a través del diferencial nos tiene que dar (salvo el factor ϵ_0) la carga contenida en el diferencial de volumen, dQ . Por lo tanto, la densidad de carga ρ dentro de dicho diferencial de volumen tiene que ser, aplicando la definición de la misma:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dQ}{dV} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\epsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV}. \quad (5.76)$$

Bueno, pues veamos ahora que se cumple que:

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} = \nabla \cdot \vec{E}. \quad (5.77)$$

Calculemos para ello lo que vale el flujo del campo a través del diferencial de volumen dV . Puesto que el paralelogramo que forma dV tiene seis caras, el flujo a su través es igual a la suma del flujo a través de todas estas caras. Calcularemos estos flujos por separado, comenzando por la cara 1 del cubo, que está situada en $x + dx/2$ (ver Fig. 5.16). Puesto que la superficie es muy pequeña, el flujo a su través puede aproximarse como si el campo eléctrico fuera constante sobre ella:

$$\Phi_{\text{cara 1}} = \vec{E}(x + dx/2, y, z) \cdot dydz \vec{i} = E_x(x + dx/2, y) dydz. \quad (5.78)$$

Si miramos ahora la cara 2, situada en $x - dx/2$, y haciendo la misma cuenta tenemos que:

$$\Phi_{\text{cara 2}} = \vec{E}(x - dx/2, y, z) \cdot dydz \vec{i} = -E_x(x - dx/2, y) dydz, \quad (5.79)$$

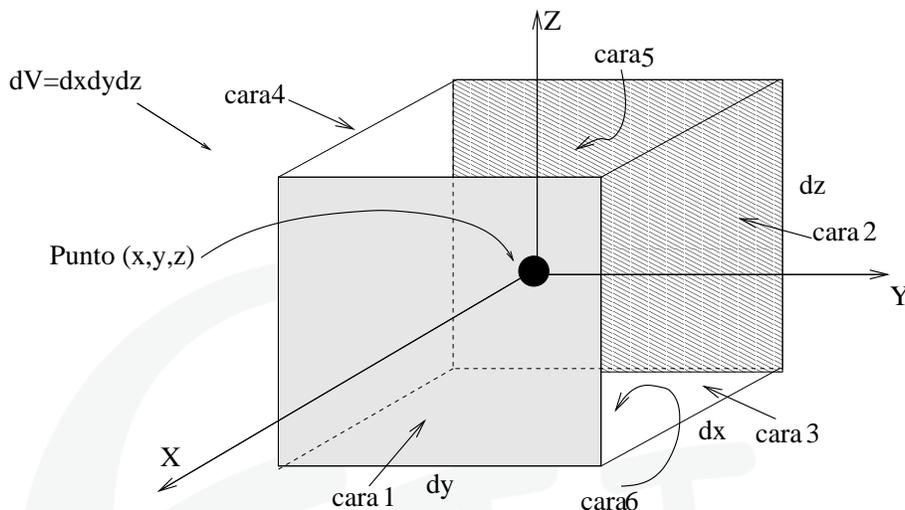


Figura 5.16: Esquema del diferencial de volumen cúbico, centrado en el punto (x, y, z) y de dimensiones dx , dy y dz usado para la demostración.

donde el menos aparece porque \vec{dS} y \vec{E} son antiparalelos. Ahora, el flujo total en la dirección de las x será la suma de $\Phi_{\text{cara 1}}$ y $\Phi_{\text{cara 2}}$:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{E_x(x + dx/2, x, y) - E_x(x - dx/2, x, y)}{dx} dx dy dz = \\ &= \frac{E_x(x + dx/2, x, y) - E_x(x - dx/2, x, y)}{dx} dV.\end{aligned}\quad (5.80)$$

Fijaros ahora que los flujos en las direcciones Y (a través de las caras 3 y 4) y Z (a través de las caras 5 y 6) pueden calcularse exactamente igual, dando como resultado:

$$\Phi_y = \frac{E_y(x, y + dy/2, z) - E_y(x, y - dy/2, z)}{dy} dV, \quad (5.81)$$

y

$$\Phi_z = \frac{E_z(x, y, z + dz/2) - E_z(x, y, z - dz/2)}{dz} dV, \quad (5.82)$$

Por lo tanto, encontramos que al tomar el límite en el que dV se hace muy pequeño (equivalente a hacer $dx, dy, dz \rightarrow 0$), vemos que se cumple lo que ya adelantábamos en la

Ec. 5.77:

$$\begin{aligned}
 \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} &= \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z}{dV} = \\
 &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{E_x(x + dx/2, x, y) - E_x(x - dx/2, x, y)}{dx} + \\
 &+ \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{E_y(x, y + dy/2, z) - E_y(x, y - dy/2, z)}{dy} + \\
 &+ \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{E_z(x, y, z + dz/2) - E_z(x, y, z - dz/2)}{dz} = \\
 &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Por lo tanto, hemos encontrado que:

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}, \tag{5.84}$$

como queríamos demostrar.

Bueno, y ¿cómo se pasa de la formulación diferencial del Teorema de Gauss (Ec. 5.74),

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.85}$$

a la formulación integral dada por (Ec. 5.61)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \tag{5.86}$$

Pues basta para ello aplicar el llamado **Teorema de la Divergencia** que nos dice que, para cualquier campo vectorial \vec{A} se cumple que:

$$\iiint \nabla \cdot \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \tag{5.87}$$

donde S es una superficie arbitraria que encierra al volumen V . Fijaros que, si lo aplicamos al vector \vec{E} , usando la formulación diferencial del Teorema de Gauss, se cumple que la parte de la izquierda vale:

$$\iiint \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV = \frac{Q_s}{\epsilon_0}, \quad (5.88)$$

con lo que se recupera la formulación integral del Teorema de Gauss.

5.9. El potencial eléctrico

Al igual que en Mecánica se puede asociar a toda fuerza conservativa una energía potencial, se puede asociar a la interacción eléctrica descrita por la Fuerza de Coulomb una energía potencial eléctrica.

5.9.1. Energía potencial eléctrica

El campo de fuerzas asociado a la interacción de Coulomb entre cargas eléctricas, dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = K \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.89)$$

es un campo conservativo. Esto puede comprobarse utilizando el criterio del determinante mencionado en la Introducción a la Mecánica. Por lo tanto, es posible encontrar una función energía potencial, $U(\vec{r})$, que verifique que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$. La forma de esta energía potencial eléctrica viene dada por:

$$U(\vec{r}) = K \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.90)$$

como puede comprobarse sin más que aplicar el operador gradiente sobre la función anterior.

Esta función energía potencial eléctrica U verificará todos los resultados vistos en la introducción de la sección anterior. En particular, **el principio de conservación de la energía mecánica**, que se definirá ahora como:

$$E_{mec}(\vec{r}) = E_k(\vec{r}) + U(\vec{r}). \quad (5.91)$$

y el **principio de superposición de energías potenciales**, que establece que la energía potencial total en un punto del espacio, será igual a la suma de todas las energías potenciales individuales que existan en dicho punto.

• **Ejemplo: Conservación de la energía mecánica en el movimiento de una partícula cargada en presencia de otra.**

Supongamos que tenemos una partícula de carga $q' = 2C$ fija en el origen. Si se abandona una carga $q = 10\mu C$ de masa $m = 1,6 \times 10^{-23} \text{ kgr}$ en el punto $A = (2, 3, 0)$, cual será su velocidad cuando su distancia al origen sea el doble de la inicial?

La distancia inicial de la carga q del origen será: $d_A = |(2, 3, 0)| = \sqrt{13}$. Luego queremos saber la velocidad cuando esté en un punto B que diste $d_B = 2\sqrt{13}$ del origen. Como la fuerza está dirigida según la recta que une ambas cargas, el punto B estará en la recta que pasa por A y por el origen. Puesto que ha de conservarse la energía mecánica de la carga, tiene que cumplirse que:

$$E_k^A + U(A) = E_k^B + U(B) \Rightarrow 0 + K \frac{qq'}{d_A} = \frac{mv_B^2}{2} + K \frac{qq'}{d_B} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{m}{2} \left(K \frac{qq'}{d_A} - K \frac{qq'}{d_B} \right)} \quad (5.92)$$

• **Ejemplo: Aplicación del principio de superposición de potenciales en el cálculo de la energía potencial de una carga en presencia de un conjunto de cargas fijas.**

Supongamos que tenemos una carga $q_1 = 2C$ fija en el origen y una segunda carga $q_2 = -1C$ fija en el punto $P = (2, 1, -2)$. ¿Cuál será la energía potencial de una carga $q = 3\mu C$ situada en el punto $A = (3, 1, 0)$?

La energía potencial de la carga q será igual a la suma de la energía potencial que tendría si solo existiese la carga en el origen,

$$E_p^1(A) = K \frac{qq_1}{d_{OA}}, \quad (5.93)$$

y la energía potencial que tendría si solo existiese la carga en P :

$$E_p^2(A) = K \frac{qq_2}{d_{PA}}, \quad (5.94)$$

La distancia entre el punto A y el origen es:

$$d_{OA} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}, \quad (5.95)$$

mientras que la distancia entre el punto A y P es:

$$d_{PA} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}. \quad (5.96)$$

5.9.2. Potencial eléctrico

Es importante recordar que, en el tema sobre el Campo Eléctrico, se hizo necesario la introducción del **campo eléctrico** para evitar problemas de tipo físico relativos a la propagación de las interacciones eléctricas. Del mismo modo que, asociada al concepto de fuerza aparece de manera natural el de energía potencial, vamos a introducir ahora el concepto de **potencial eléctrico** asociado al de campo eléctrico. Veremos que se usa del mismo modo que éste: si queremos saber la fuerza que una carga q experimenta en un punto, multiplicamos el campo eléctrico existente en dicha posición por la carga; análogamente, si queremos saber la energía potencial que tiene una carga por el hecho de estar en una determinada posición, multiplicaremos el potencial eléctrico por la carga.

Recordemos la forma matemática en que introdujimos el **campo eléctrico**. Para ello, lo definíamos la fuerza por unidad de carga creada por la carga q' en cada punto del espacio (y recordar que existía desde siempre, con indiferencia a la existencia de una segunda carga que recibiese la fuerza, lo que arreglaba los problemas de propagación de la interacción):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/q = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (5.97)$$

Una vez conocido el campo creado por q' en cada punto, se calculaba la fuerza que aparecería sobre una carga q situada en un punto r usando que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (5.98)$$

Del mismo modo, el **potencial eléctrico**, V , creado por la carga q' en cada punto se define como la energía potencial eléctrica adquirida por unidad de carga:

$$V(\vec{r}) = U(\vec{r})/q = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.99)$$

De este modo, análogamente a lo que pasaba con el campo eléctrico, la energía potencial eléctrica que adquiere una carga q al situarse en un punto r será:

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}). \quad (5.100)$$

5.9.3. Potencial eléctrico creado por una distribución continua de carga

De manera análoga a como calculábamos el campo creado por una distribución continua de carga, aplicando el principio de superposición, puede obtenerse el potencial eléctrico

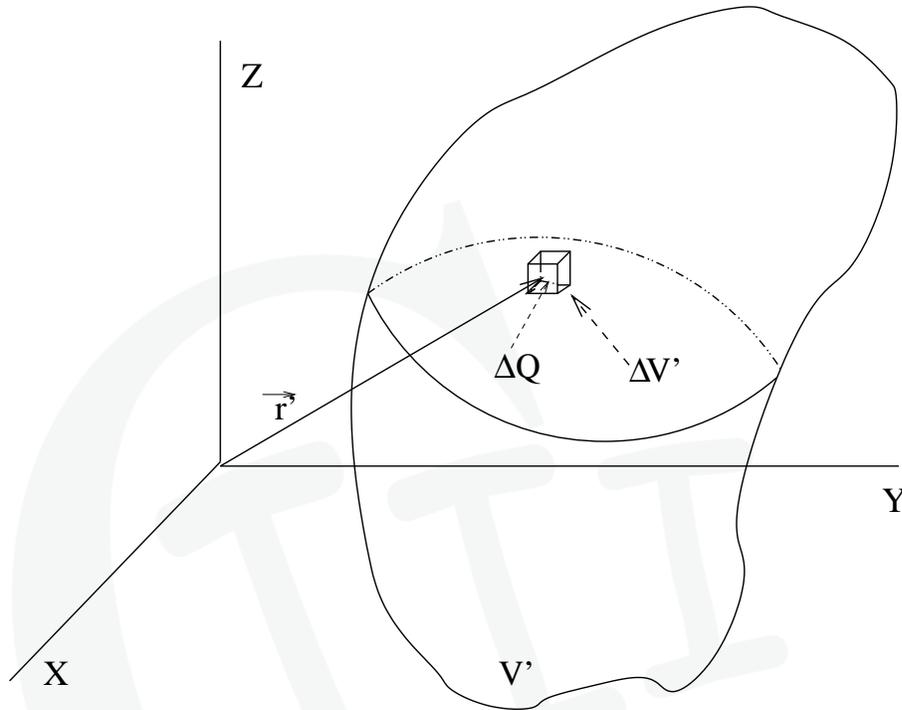


Figura 5.17: División de un volumen en diferenciales dV .

creado por una distribución continua de carga aplicando el principio de superposición de potenciales.

Si volvemos a suponer, como en el tema sobre el Campo Eléctrico, que la carga está repartida en un volumen V' de acuerdo a una densidad de volumen $\rho(\vec{r}')$ (ver Fig. 5.17). Dividiendo el volumen en pequeños diferenciales de volumen, $\Delta V'$, tan pequeños que podamos describir su posición mediante un vector \vec{r}' , la carga contenida en cada uno de esos diferenciales será $\Delta q' = \rho(\vec{r}')\Delta V'$. El potencial que este pequeño diferencial crea en el punto \vec{r} será, usando la Ec. 5.99:

$$\Delta V(\vec{r}) = K \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.101)$$

Por lo tanto, aplicando el principio de superposición de potenciales, el potencial total creado por el volumen V' en el punto \vec{r} será la suma (integral) de los potenciales creados

por cada uno de los diferenciales $\Delta V'$ que conforman el volumen:

$$V(\vec{r}) = K \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.102)$$

En el caso de que la carga esté distribuida sobre una superficie, S' , sobre la que hay definida una distribución superficial de carga, $\sigma(\vec{r}')$, tendremos que:

$$V(\vec{r}) = K \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \quad (5.103)$$

Y si la carga está distribuida sobre una línea, C' , sobre la que hay definida una densidad lineal de carga, $\lambda(\vec{r}')$, calculamos el potencial usando:

$$V(\vec{r}) = K \int_{C'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'. \quad (5.104)$$

Muchas veces es más fácil calcular el potencial eléctrico creado por la distribución que calcular directamente el campo eléctrico creado por ésta usando las expresiones derivadas en el tema sobre el Campo Eléctrico. Una vez calculado, puede obtenerse el campo sin más que calcular el gradiente de $V(\vec{r})$.

5.9.4. Cálculo de potenciales eléctricos

Las expresiones dadas por las Eqs. 5.102–5.104 proporcionan una manera para calcular *directamente* el potencial eléctrico creado por una distribución arbitraria de carga descrita por una densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ (o $\sigma(\vec{r}')$ o $\lambda(\vec{r}')$). En general, son más sencillas que las análogas que ya obtuvimos para la generalización de la Ley de Coulomb que nos daba el campo eléctrico (ver Eqs. 5.13–5.17) ya que las nuevas son integrales de expresiones vectoriales sino escalares. Y de ellas, una vez obtenido el potencial en todos los puntos del espacio, *se puede obtener el campo eléctrico sin más que aplicarles el operador gradiente*.

Sin embargo, estas ecuaciones siguen siendo bastante complicadas. Por suerte, existe otra manera de calcular el potencial eléctrico, pero que *requiere conocer antes el valor del campo eléctrico*. Basta para ello con invertir la relación,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \iff V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \quad (5.105)$$

que ya vimos en Mecánica. Recordar que, como dijimos entonces, el gradiente es una especie de derivada tridimensional cuya inversa es la integral de línea. En cuanto al límite

inferior de la integral, \vec{r}_0 , es totalmente **arbitrario**. Representa la libertad que se tiene siempre de elegir una función potencial que se anule en el punto que nosotros queramos. En este caso, en \vec{r}_0 (como puede verse si sustituís $\vec{r} = \vec{r}_0$ en la integral anterior, ya que la integral entre un punto y él mismo es siempre nula!).

En general, la Ec. 5.105 es también complicada de calcular y, además, requiere conocer previamente lo que vale el campo eléctrico. Sin embargo, puede ser muy útil cuando somos capaces de calcular el campo eléctrico \vec{E} de manera sencilla como, por ejemplo, aplicando el Teorema de Gauss. Veamos algunos ejemplos, asociados a los casos en los que la existencia de simetría cilíndrica, esférica o de traslación nos permite aplicar dicho teorema para calcular previamente el valor del campo eléctrico:

1. Problemas con simetría cilíndrica o esférica

En los casos de simetría cilíndrica o esférica, el campo sólo depende de la distancia al eje o centro de simetría, y va dirigido en la dirección **radial**:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r. \quad (5.106)$$

Introduciendo esto en la Ec. 5.105, puede entonces obtenerse el potencial de forma muy sencilla calculando la integral:

$$V(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} E(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^r E(r)dr, \quad (5.107)$$

ya que $\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$, por ser la componente en la dirección radial del vector desplazamiento.

• **Ejemplo: Potencial eléctrico creado por un cilindro infinito de radio R , cargado homogéneamente con densidad de carga ρ .**

Primero necesitamos calcular el campo en las dos regiones $r > R$ y $r < R$. Como vimos en el tema sobre el Campo Eléctrico, el problema tiene simetría cilíndrica y el campo dirección radial. Por lo tanto, cogiendo como gaussianas cilindros infinitos de radio r , y aplicando el teorema de Gauss, tenemos que para $r < R$:

$$E(r)2\pi r h = \rho\pi r^2 h / \epsilon_0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r. \quad (5.108)$$

Para $r > R$, toda la carga del cilindro está contenida dentro de la gaussiana, así que:

$$E(r)2\pi rh = \rho\pi R^2 h / \epsilon_0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r. \quad (5.109)$$

Para calcular el potencial, y cogiendo $r_0 = 0$, tenemos que para $r < R$:

$$V(r) = - \int_0^r \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} \quad (5.110)$$

mientras que para $r > R$,

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_0^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr - \int_R^r \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} dr = - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} [\ln(r)]_R^r = \\ &= - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln(r/R) \right]. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Y fijarse como ambas expresiones dan el mismo valor de potencial si $r = R$, y que $V(0) = 0$ ya que escogimos $r_0 = 0$.

2. Problemas con simetría de traslación

En muchos problemas existe simetría de traslación respecto de dos de los ejes coordenados (por ejemplo, en el caso de un plano infinito). Supongamos que sean los ejes X e Y . El campo eléctrico y el potencial eléctrico sólo pueden entonces depender de la coordenada z :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z) \vec{k}. \quad (5.112)$$

Sustituyendolo en la Ec. 5.105, obtenemos el potencial resolviendo:

$$V(z) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} E_z(z) \vec{k} \cdot d\vec{r} = - \int_{z_0}^z E_z(z) dz, \quad (5.113)$$

ya que la componente z de $d\vec{r}$ es dz , y siendo $z = z_0$ el plano donde el potencial se anula.

• **Ejemplo: Potencial eléctrico creado por un plano infinito cargado homogéneamente con densidad superficial de carga σ .**

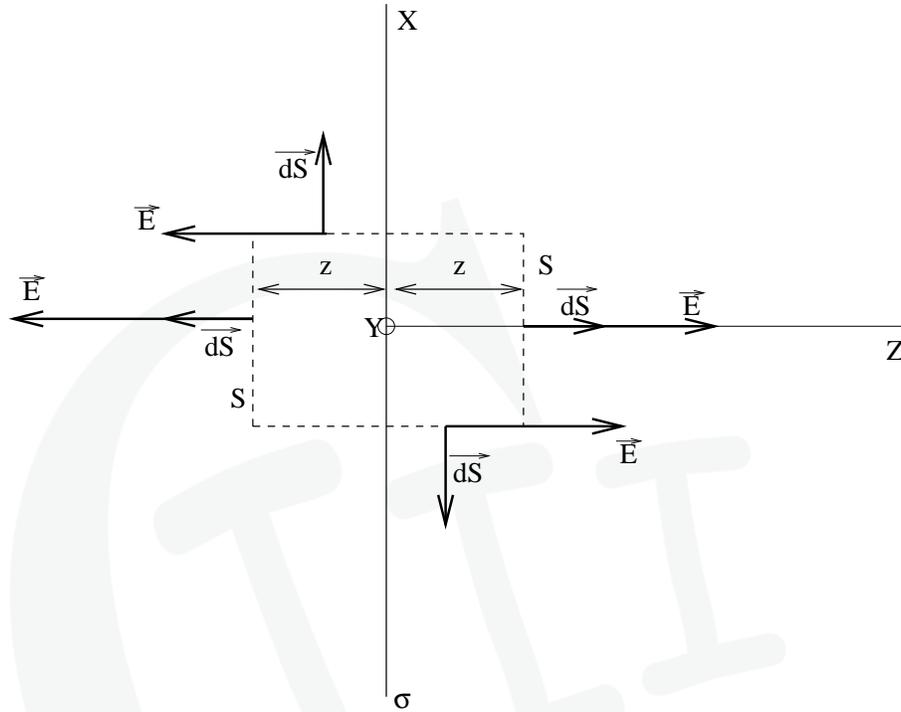


Figura 5.18: Potencial y campo eléctrico creado por un plano infinito cargado uniformemente.

Como ya se ha visto en clase, el campo creado por un campo infinito se puede calcular usando el teorema de Gauss. Para ello, tomamos coordenadas de manera que los ejes X e Y estén contenidos en el plano, y el eje Z nos de la distancia perpendicular a él. El campo creado por el plano será perpendicular al plano y dependerá solo de z , ya que tenemos simetría de translación a lo largo de los ejes X e Y (ver teoría en esta misma sección). Para calcular el campo escogemos como gaussiana un paralelepípedo, formado por dos caras rectangulares de área S , paralelas al plano y que distan de éste $\pm z$, y cerrado por cuatro caras rectangulares perpendiculares al plano (ver Fig. 5.18). Puesto que el campo es paralelo a las cuatro caras perpendiculares al plano, el flujo a través de ellas es cero. El flujo a través de las dos caras paralelas al plano será idéntico, ya que ambas están a la misma distancia del plano. Por lo tanto tenemos que, aplicando el teorema de Gauss, el módulo del campo vale:

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5.114)$$

y va dirigido hacia fuera del plano. Es decir, en dirección $+\vec{k}$ para $z > 0$, y en dirección $-\vec{k}$, para $z < 0$.

Sin embargo para aplicar la Ec. 5.113, hemos de usar la componente z del campo, que se relaciona con el módulo como $E_z(z) = E(z) = \sigma/2\epsilon_0$ para $z > 0$:

$$V(z) = - \int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}, \quad (5.115)$$

y $E_z(z) = -E(z) = -\sigma/2\epsilon_0$, para $z < 0$:

$$V(z) = - \int_0^z \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) dz = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}, \quad (5.116)$$

Observese de nuevo que el potencial que se obtiene para $z = 0$ es el mismo para ambas expresiones, e igual a cero, ya que escogimos $z_0 = 0$.

5.10. Energía electrostática

Como vimos, es posible almacenar energía en un campo de fuerzas conservativos (recordar el ejemplo que vimos con el campo gravitatorio en la Sec. 2.12). Y la fuerza de Coulomb es también una fuerza conservativa. Por lo tanto, también es posible almacenar energía proveniente de una fuerza externa en forma de energía potencial eléctrica, forzando a las cargas a permanecer en posiciones que no correspondan a mínimos de la energía potencial. Por ejemplo, consideremos el potencial eléctrico creado por una carga q_1 , situada en el punto \vec{r}_1 :

$$V_1(\vec{r}) = K \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (5.117)$$

Si colocamos ahora una carga q_2 en un punto arbitrario, \vec{r}_2 , ésta adquiere una energía potencial eléctrica dada por:

$$U_2(\vec{r}_2) = q_2 V_1(\vec{r}_2) = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (5.118)$$

Si ambas cargas tienen el mismo signo, entonces $q_1 q_2 > 0$ y por tanto la energía potencial eléctrica de q_2 será positiva y tanto mayor cuanto más juntas estén ambas cargas, tendiendo a cero cuando la separación tiende a infinito; si tienen diferente signo, y por tanto, $q_1 q_2 < 0$, será negativa y tanto mayor cuanto más separadas estén las cargas, tendiendo otra vez a cero cuando la separación tienda a infinito (ver Fig. 5.19 y compararla con Fig. 2.4). Esto implicaría que, abandonada q_2 a su suerte, ésta se movería **espontáneamente** alejándose de q_1 en el primer caso y acercándose hacia q_1 en el segundo, a menos

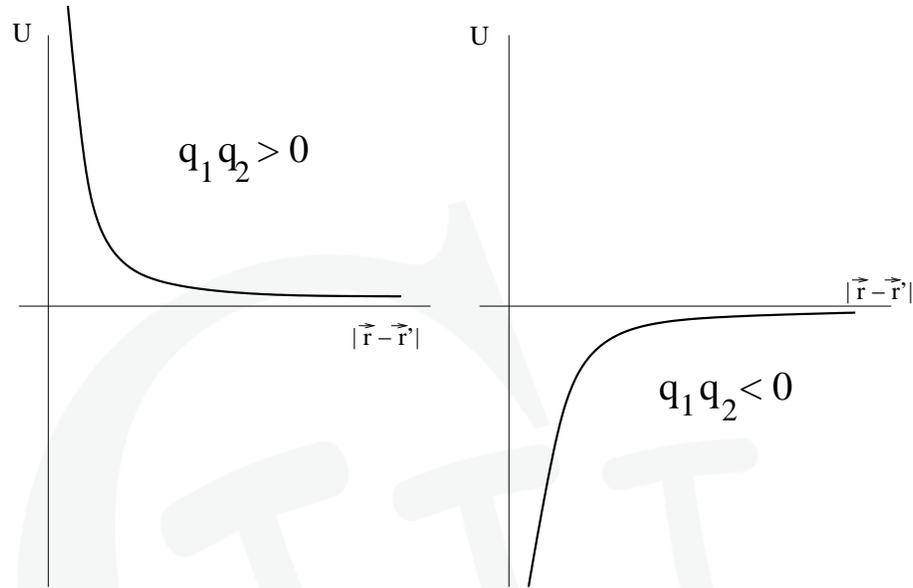


Figura 5.19: Energía potencial eléctrica adquirida por la carga q_2 debido al campo creado por la carga q_1 en función de su distancia mutua.

que exista una fuerza externa que la mantenga en \vec{r}_2 (es importante notar que este comportamiento es precisamente lo esperable, puesto que sabemos que cargas de igual signo se repelen, y de diferente signo se atraen). Y por lo tanto, la cantidad de energía contenida en forma de energía potencial en la carga q_2 será mayor cuanto más cerca de q_1 retengamos a q_2 en el primer caso, y cuanto más lejos de q_1 en el segundo. Podremos recuperar ^{esta} energía sin más que hacer desaparecer las fuerzas que retienen a q_2 en su posición, como en el caso de la piedra visto anteriormente.

La cantidad de energía almacenada en las cargas en forma de energía potencial es lo que se denomina **energía electrostática** del sistema de cargas $\{q_1, q_2\}$. Para calcularla, en el caso de dos cargas de igual signo, basta mirar cuanto aumenta la energía potencial de las cargas cuando se traen, **una por una**, desde infinito (donde vale cero):

$$W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2\}} = 0 + q_2 V_1(\vec{r}_2) = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (5.119)$$

La contribución asociada a la primera carga es cero puesto que, antes de traerla, no existe ningún campo eléctrico. Por lo tanto, la carga q_1 no gana ninguna energía potencial al desplazarse de un punto a otro. Sin embargo, una vez traída la primera carga hasta \vec{r}_1 ,

aparece una función potencial, $V_1(\vec{r})$, debida a ella. Por lo tanto, la segunda carga sí ve como cambia su energía potencial al desplazarla desde el infinito (donde es 0) hasta su posición final \vec{r}_2 , y es por tanto necesaria la acción de una fuerza que venza la repulsión entre ambas cargas.

La expresión dada por la Ec. 5.119 tiene una interpretación distinta cuando q_1 y q_2 tienen signos opuestos. La diferencia es que ahora, q_2 es atraída por q_1 , con lo que q_2 se mueve espontáneamente desde el infinito hacia q_1 , y por tanto, su **energía potencial disminuye**. Ciertamente, mirando la Fig. 18, resulta evidente que el máximo de energía potencial para cargas de diferente signo se obtiene para una distancia entre cargas igual a infinito. Por lo tanto, no sólo no se almacena energía potencial al traer q_2 desde infinito, sino que se pierde. La Ec. 5.119 da precisamente la disminución de energía potencial de la carga por pasar de infinito a la posición final \vec{r}_2 . Es por eso, que el signo de la energía electrostática es negativo en este caso.

5.10.1. Generalización a un sistema discreto de cargas

Si intentamos ahora traer una carga q_3 al punto \vec{r}_3 desde el infinito, la energía potencial que adquirirá será igual, aplicando el principio de superposición de potenciales, a:

$$U_3(\vec{r}_3) = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3), \quad (5.120)$$

donde $V_2(\vec{r})$ es el potencial asociado al campo eléctrico creado por la segunda carga:

$$V_2(\vec{r}) = K \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}. \quad (5.121)$$

Por lo tanto, el sistema de cargas $\{q_1, q_2, q_3\}$ almacena una cantidad de energía electrostática igual a la suma de las energías potenciales almacenadas en cada carga:

$$\begin{aligned} W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2, q_3\}} &= 0 + q_2 V_1(\vec{r}_2) + q_3 (V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)) = \\ &= K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + K \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + K \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Es importante darse cuenta que es posible que algunos de estos sumandos sea positivo y otros negativos, dependiendo del signo relativo de las cargas.

Es fácil ver que la Ec. 5.122 puede reescribirse como:

$$W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2, q_3\}} = \frac{1}{2} q_1 V(\vec{r}_1) + \frac{1}{2} q_2 V(\vec{r}_2) + \frac{1}{2} q_3 V(\vec{r}_3), \quad (5.123)$$

definiendo el potencial eléctrico total, $V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + V_3(\vec{r})$, siendo V_3 el potencial creado por la carga q_3 (para asegurarse de la validez de la Ec. 5.123, substituyanse en ella las definiciones de los potenciales V_1 y V_2 y V_3 y compárese con la Ec. 5.122).

Se puede extender fácilmente la expresión anterior al caso de un sistema con N cargas, $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, sin más que construir la suma:

$$W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2, \dots, q_N\}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i), \quad (5.124)$$

donde hemos definido el *potential eléctrico total* como la suma de los potenciales creados por todas las cargas en cada punto, $V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r})$. Como veremos, la Ec. 5.124 será la base de la generalización del concepto de energía electrostática a una distribución continua de carga.

• **Ejemplo: Calcular la energía electrostática almacenada en la configuración de cargas de la Fig. 5.20**

Supongamos que la primera carga que traemos de infinito es q_1 . Puesto que no existe ningún campo eléctrico previo, la carga no experimenta cambio alguno en su energía potencial, y por tanto, no contribuye a la energía electrostática del sistema. Sin embargo, una vez q_1 está en el vértice superior derecho, crea un campo eléctrico y un potencial eléctrico asociado, $V_1(\vec{r})$, en todos los puntos del espacio. Por lo tanto, si ahora queremos traer q_2 hasta el vértice inferior derecho, su energía potencial pasará de cero a:

$$U_{q_2} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = q_2 K \frac{q_1}{2a} \quad (5.125)$$

Una vez q_2 está situada en el vértice inferior derecho, creará a su vez un campo y un potencial asociado, $V_2(\vec{r})$. Por lo tanto, al traer q_3 hasta el vértice inferior izquierdo, su energía potencial pasará de cero a un valor dado por:

$$U_{q_3} = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3) = q_3 K \left[\frac{q_1}{2\sqrt{2}a} + \frac{q_2}{2a} \right] \quad (5.126)$$

A su vez, q_3 creará su propio campo y potencial, $V_3(\vec{r})$. Finalmente, al traer q_4 al vértice superior izquierdo, su energía potencial pasará de cero a:

$$U_{q_4} = q_4 V_1(\vec{r}_4) + q_4 V_2(\vec{r}_4) + q_4 V_3(\vec{r}_4) = q_4 K \left[\frac{q_1}{2a} + \frac{q_2}{2\sqrt{2}a} + \frac{q_3}{2a} \right] \quad (5.127)$$

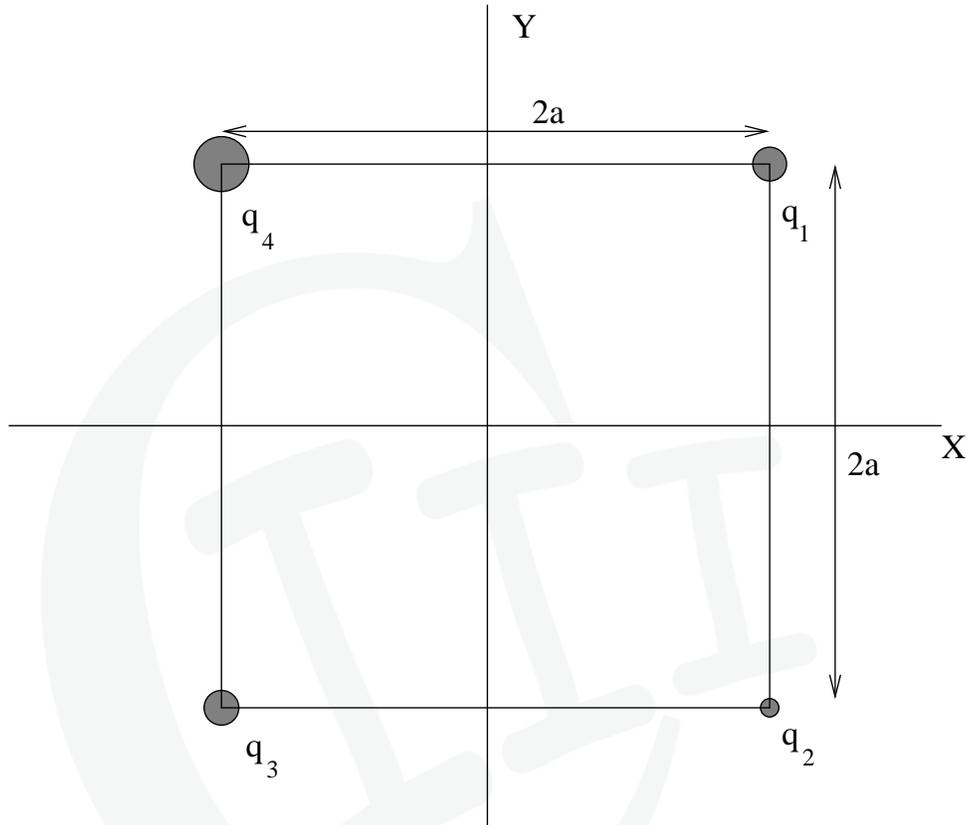


Figura 5.20: Sistema de cargas distribuidas en los vértices de un cuadrado de lado $2a$.

La energía electrostática total almacenada en el sistema de cargas $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ vendrá por tanto dada por:

$$W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}} = 0 + U_{q_2} + U_{q_3} + U_{q_4} = \frac{K}{2a} \left[\frac{q_4 q_2}{\sqrt{2}} + q_4 q_1 + q_4 q_3 + \frac{q_3 q_1}{\sqrt{2}} + q_3 q_2 + q_2 q_1 \right] \quad (5.128)$$

Nótese que alguno de los términos en el corchete serán negativos, si algunas de las cargas son positivas y otras negativas.

Es posible automatizar notablemente el cálculo de ésta energía si, en lugar de traer

cada carga una a una desde infinito, usamos la Ec. 5.124:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}} &= \frac{1}{2} (q_1 V(\vec{r}_1) + q_2 V(\vec{r}_2) + q_3 V(\vec{r}_3) + q_4 V(\vec{r}_4)) = \\
 &= \frac{q_1}{2} \left[K \frac{q_2}{2a} + K \frac{q_3}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_4}{2a} \right] + \frac{q_2}{2} \left[K \frac{q_1}{2a} + K \frac{q_3}{2a} + K \frac{q_4}{2\sqrt{2}a} \right] \\
 &+ \frac{q_3}{2} \left[K \frac{q_1}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_2}{2a} + K \frac{q_4}{2a} \right] + \frac{q_4}{2} \left[K \frac{q_1}{2a} + K \frac{q_2}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_3}{2a} \right] = \\
 &= \frac{K}{2a} \left[\frac{q_4 q_2}{\sqrt{2}} + q_4 q_1 + q_4 q_3 + \frac{q_3 q_1}{\sqrt{2}} + q_3 q_2 + q_2 q_1 \right],
 \end{aligned} \tag{5.129}$$

que nos da el mismo valor que anteriormente.

5.10.2. Generalización a un sistema continuo de cargas

Es también fácil el generalizar la Ec. 5.124 para el caso en que tengamos una distribución continua de cargas caracterizada, por ejemplo, por una densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{r})$. Para ello, volvemos a fijarnos en la Fig. 5.17.

De nuevo, el diferencial de volumen situado en \vec{r}' almacenará una carga igual a $dq' = \rho(\vec{r}')dV'$, y el valor del potencial eléctrico en dicho punto será igual a $V(\vec{r}')$. Por lo tanto, por similitud con la Ec. 5.124 que nos daba la energía electrostática almacenada en un sistema discreto de cargas asignado a cada carga q_i una contribución a la energía total a $(1/2)q_i V(\vec{r}_i)$, podemos escribir que la contribución a la energía total almacenada en la distribución continua del diferencial dV' será:

$$dW_{\text{electrostatica}} = \frac{1}{2} dq' V(\vec{r}') = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dV' \tag{5.130}$$

Por tanto, sumando esta contribución sobre todos los diferenciales que componen el volumen, tenemos que la energía electrostática total almacenada en la distribución continua de carga es igual a:

$$W_{\text{electrostatica}} = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dV', \tag{5.131}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde están contenidas las cargas.

5.10.3. Densidad de energía electrostática

Concluiremos esta sección dando un resultado sin demostración: la definición de lo que se llama *densidad de energía electrostática*, w_e . Como cualquier otra densidad, w_e caracteriza como está repartida la energía electrostática *por unidad de volumen*, de forma que:

$$w_e(\vec{r}) = \frac{d}{dV} (W_{electrostatica}), \quad (5.132)$$

y, recíprocamente,

$$W_{electrostatica} = \iiint_V w_e(\vec{r}) dV. \quad (5.133)$$

Sin embargo, fijaros que la integral que aparece en la Ec. 5.133 se hace sobre **todo el espacio tridimensional**, a diferencia de la dada por la Ec. 5.131, que se hacía sólo sobre el volumen V' donde estaban contenidas las cargas.

Para encontrar la expresión de w_e es necesario manipular matemáticamente la Ec. 5.131, hasta convertir la integral sobre V' en una sobre todo el espacio. La manera como esto se hace no la vamos a tratar aquí (ver el libro de *Reitz-Milford, Sección 6.3* para los detalles), pero sí vamos a dar el resultado:

$$w_e(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2}{2}. \quad (5.134)$$

¿Y qué significa esta expresión? Bueno, pues que la energía electrostática almacenada por nuestra distribución de cargas se *emplea* en crear el campo eléctrico \vec{E} **que llena todo el espacio**. Además, *está concentrada en aquellos puntos en los que el campo es más alto* (observar que la densidad de energía electrostática va con el cuadrado del módulo del campo).

Capítulo 6

ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

Hasta ahora nos hemos preocupado de estudiar interacciones entre cargas que se encontraban en el vacío. Sin embargo, en la práctica, todos esos electrones y protones se encuentran dentro de algún medio material. Por ello, en este bloque vamos a estudiar cual es la fenomenología de los medios materiales en presencia de campos eléctricos. Veremos que se dividen en dos grandes grupos, los *conductores* y los *dieléctricos* o *aislantes*, dependiendo de si en ellos existen electrones (quasi)-libres que puedan moverse en presencia de algún campo eléctrico o no. Asimismo, estudiaremos como reformular las ecuaciones de la Electrostática para poder incluir a estos medios en la descripción de las interacciones entre partículas cargadas.

6.1. MEDIOS CONDUCTORES

La definición más general y menos comprometida de lo que constituye un medio **conductor** es la de un medio en el que existen **cargas eléctricas (quasi)-libres**, susceptibles de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. El ejemplo más común es el de los **metales**. Una imagen de estos sólidos, quizá un tanto simple, pero suficiente para nuestros propósitos, es la constituida por una red tridimensional de iones pesados positivos, que se mantienen fijos en sus posiciones. Entre ellos se mueven "quasi-libremente", y sin poder escapar del material conductor, los llamados **electrones de conducción**, tantos como sean necesarios para que la carga total del conductor sea cero.

6.1.1. Propiedades generales

Si el medio conductor se expone ahora a un campo eléctrico externo, veríamos que los iones mantendrían fijas sus posiciones, mientras que los electrones de conducción se desplazarían dentro del conductor, empujados por la fuerza eléctrica asociada al campo externo, hasta que se alcance un nuevo estado de equilibrio. La existencia de dicho equilibrio requiere que, de algún modo, el campo eléctrico en el interior del conductor desaparezca (si no, continuaría existiendo una fuerza eléctrica sobre los electrones, que seguirían su movimiento indefinidamente). Para contrarrestar el campo externo, los electrones se redistribuyen, dando lugar a una densidad de carga, $\rho(\vec{r}) \neq 0$, capaz de producir un campo que, al sumarse al exterior, lo anule en todas posiciones interiores del conductor. Y fijaros que esto se realiza sin que aparezca carga de la nada en el conductor. Si éste era inicialmente neutro, la densidad de carga que ha aparecido tiene que cumplir necesariamente que:

$$Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = 0! \quad (6.1)$$

Por tanto, como primera conclusión de esta disquisición, puede extraerse el que:

1. El campo eléctrico siempre es cero en el interior de un conductor en equilibrio.

Pero podemos decir más cosas sobre el comportamiento de un conductor usando el teorema de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (6.2)$$

o, en palabras, que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. Sin embargo, puesto que el campo eléctrico es cero dentro de un conductor en equilibrio, el flujo a través de **cualquier** superficie cerrada contenida en el conductor ha de ser cero. E igualmente ha de ser cero la carga contenida en **cualquier** superficie contenida en el conductor (por ejemplo, las superficies S_1 , S_2 y S_3 de la Fig. 6.1). Por lo tanto, la densidad de carga eléctrica sólo puede ser distinta de cero sobre la superficie exterior de un conductor en equilibrio. Matemáticamente esto quiere decir que en el conductor en equilibrio no puede definirse una densidad volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}) \neq 0$, sino **solamente** una densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r}) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos afirmar que:

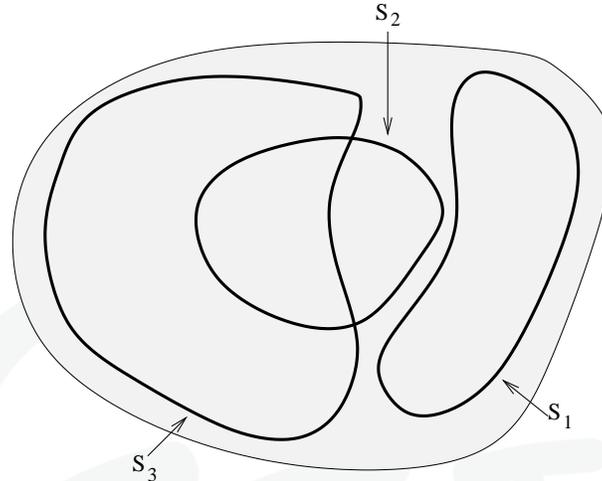


Figura 6.1: Distintas superficies cerradas en el conductor donde no puede haber carga neta

2. La redistribución de carga que tiene que ocurrir en el conductor para garantizar que el campo eléctrico se anule en su interior ha de tener lugar únicamente sobre la superficie exterior del mismo.

Por argumentos similares a los anteriores puede afirmarse también que la superficie de un conductor en equilibrio ha de ser equipotencial. Ya que imaginemos que no lo fuera. En la tema anterior vimos que las cargas se desplazan **espontáneamente** hacia aquellos puntos donde su energía potencial se hace menor. Por lo tanto, si hay dos puntos de la superficie del conductor, A y B (ver Fig. 6.2), con $V(B) > V(A)$, los electrones se desplazarían desde el punto A hacia el B (recordad que la energía potencial de los electrones sería $U(\vec{r}) = -eV(\vec{r})$, con lo que ¡ $U(A) > U(B)$!), y el conductor no estaría en equilibrio. Por tanto,

3. El valor del potencial eléctrico ha de ser constante sobre la superficie de un conductor en equilibrio

Y por un argumento absolutamente análogo, no puede existir un campo eléctrico tangente a la superficie externa del conductor si éste está en equilibrio. Ya que si lo hubiese (ver Fig. 6.3) aparecería una fuerza paralela a la superficie sobre los electrones que los desplazaría, y el conductor no podría estar en equilibrio. Por lo tanto,

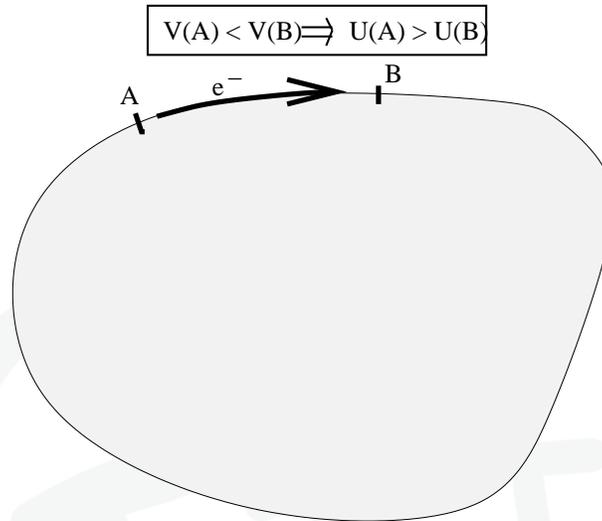


Figura 6.2: La superficie de un conductor en equilibrio ha de ser equipotencial, ya que en caso contrario los electrones se moverían del punto con menos potencial al de más potencial

4. El campo eléctrico sólo puede estar dirigido perpendicularmente a la superficie de un conductor en equilibrio.

6.1.2. Procesos de Carga en un conductor

Los conductores, como casi toda la materia que nos rodea, son eléctricamente neutros en condiciones normales. Es decir, tienen igual número de cargas positivas que negativas, con lo que su carga total es $Q = 0$. Y esta situación se mantiene incluso en presencia de un campo eléctrico externo, cuando hemos visto que la carga del conductor ha de redistribuirse para dar lugar a una densidad de carga $\rho(\vec{r}) \neq 0$ que anule el campo eléctrico en su interior.

Sin embargo, es posible cargar un conductor de manera que su carga total $Q \neq 0$. Una de las maneras más comunes de hacerlo es por **inducción**. Para ello, tomamos dos conductores aislados y neutros, y les aproximamos un cuerpo cargado negativamente (ver Fig. 6.4). La carga en los conductores se redistribuirá para garantizar que en su interior el campo eléctrico se anule, con lo que se obtiene una distribución de carga semejante a la que se ve en la figura. Si ahora unimos ambos conductores por un cable, se produce

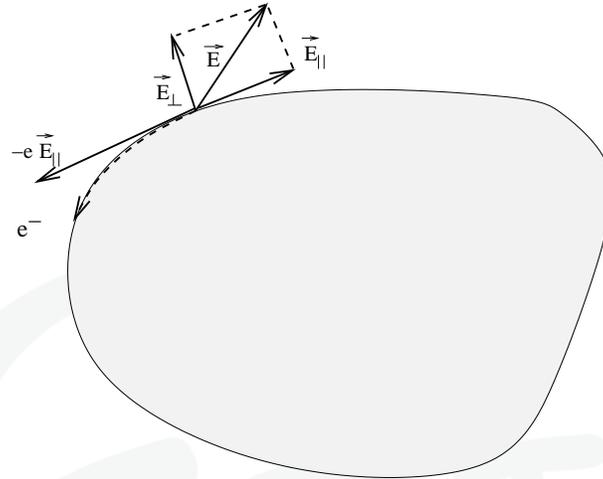


Figura 6.3: El campo eléctrico ha de ser normal a la superficie exterior de un conductor en equilibrio o los electrones se desplazarían sobre la superficie

un flujo de cargas entre los dos conductores para que sus superficies se pongan al mismo valor del potencial eléctrico, creándose una nueva distribución de carga, que se muestra también en la figura. Si cortamos ahora el cable, cada conductor, inicialmente neutro, quedará cargado con cargas iguales pero de signo opuesto, de tal modo que la carga total del sistema de dos conductores A y B , que era nula inicialmente, se conserve. Es decir, $Q_A = -Q_B$.

Claro que uno podría preguntarse como consigue el primer conductor cargado para realizar este proceso. Eso no representa realmente un problema, puesto que el papel de este conductor puede llevarlo a cabo un campo eléctrico constante en la dirección que se muestra en la Fig. 6.5. También es posible cargar un conductor por **frotamiento**, que es la manera en la que se descubrió por primera vez el concepto de carga, y que existían dos tipos de ellas (ver discusión sobre esto en la sección sobre la carga eléctrica, en el tema sobre el Campo Eléctrico).

6.1.3. Apantallamiento eléctrico

Una de las aplicaciones más interesantes de un conductor es el **apantallamiento** de una zona del espacio respecto a posibles campos eléctricos externos. Para entender como funciona, consideremos un conductor en cuyo interior se ha practicado una cavidad (ver

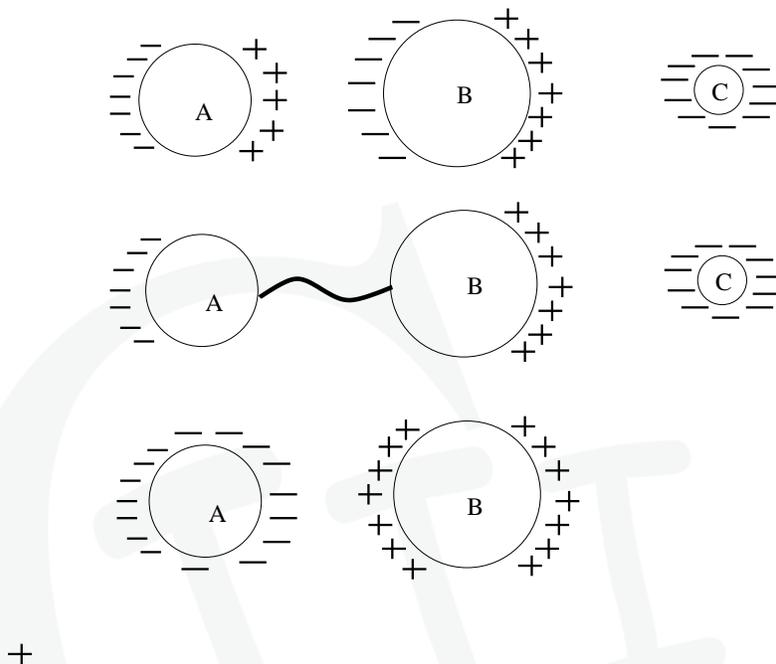


Figura 6.4: Carga de dos conductores inicialmente neutros por inducción, mediado por otro conductor cargado.

Fig. 6.6). Sabemos que si existe un campo externo, se producirá un reordenamiento de carga sobre la superficie del conductor que hace que el campo eléctrico neto sea nulo en su interior. ¿Pero que sucede en la cavidad? ¿Es el campo eléctrico también cero allí? ¿Y se redistribuirá la carga también sobre la superficie interna del conductor, o únicamente sobre la externa?. Para contestar estas preguntas, vamos a aplicar el teorema de Gauss usando la superficie S_1 de la figura. Es claro que no puede haber carga encerrada por S_1 . Ciertamente. Si:

$$0 = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{S_1}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{S_1} = 0 \quad (6.3)$$

Por lo tanto, de existir alguna carga distribuida sobre la superficie interna del conductor, $\sigma_{int}(\vec{r})$, ésta ha de cumplir que la carga total distribuida sobre la superficie interna del conductor sea cero:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r}) dS' = 0 \quad (6.4)$$

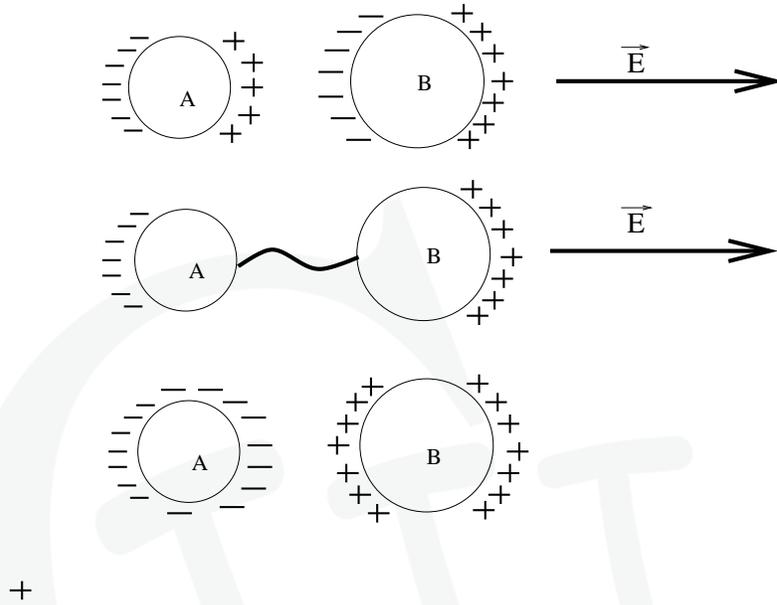


Figura 6.5: Carga de dos conductores inicialmente neutros por inducción, mediado por un campo eléctrico constante.

Por lo tanto, puesto que las cargas positivas son las fuentes de líneas de campo y las negativas los sumideros, y puesto que el campo en el interior del conductor es cero, todas las líneas del hipotético campo eléctrico en la cavidad tienen que nacer y morir en los límites de la misma. Por ejemplo, supongamos que una línea nace en el punto A y muere en el punto B. Ahora bien, sabemos que el la fuerza de Coulomb es una fuerza conservativa. Por lo tanto, ha de cumplirse que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0, \quad (6.5)$$

puesto que campo y fuerza son proporcionales, para cualquier circuito cerrado Γ . En particular, para el circuito C de la Fig.6. Como el campo en el interior del conductor es cero, esto implica que:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (6.6)$$

sea cual sea el camino que usemos para ir de A a B (en la Fig. 6.6 se muestran varias alternativas, numeradas 1, 2 y 3, además de la dada por el camino cerrado C). Pero, si

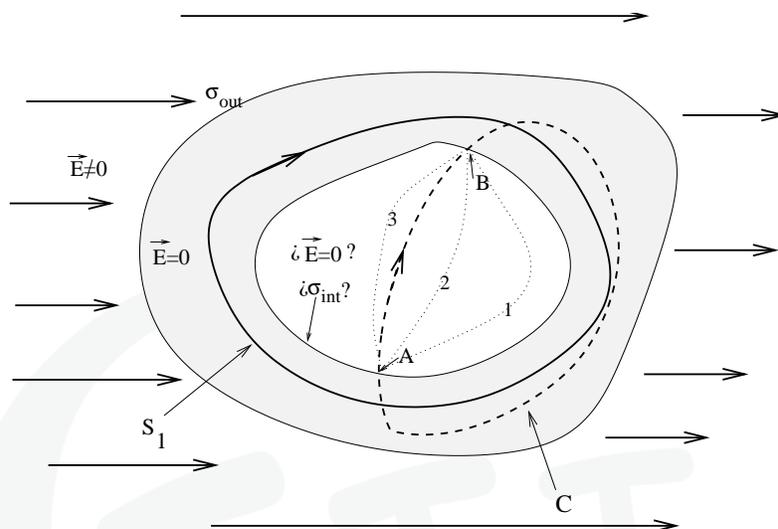


Figura 6.6: Cavidad en un conductor.

cogemos la trayectoria que sigue la línea de campo que une A y B , esta integral solo puede ser cero si $\vec{E} = 0$, ya que el campo siempre es paralelo a la línea. Y esto ha de cumplirse para todas las líneas de la cavidad. Por lo tanto, $\vec{E} = 0$ dentro de la cavidad. En consecuencia,

Un conductor actúa como una pantalla perfecta frente a campos eléctricos externos, ya que el campo eléctrico será también nulo en cualquier cavidad practicada en su interior.

6.1.4. Blindaje eléctrico

De la misma manera que puede utilizarse un conductor para cubrir una región en la que no queramos que se noten los efectos de un campo exterior, podemos utilizar un conductor para que no **salgan** de una determinada región del espacio los campos creados por cargas en su interior. Esta propiedad, inversa al apantallamiento visto en la sección anterior, se llama **blindaje eléctrico**.

Supongamos que tenemos, como en el caso anterior, un conductor con una cavidad en su interior. Y dentro de dicha cavidad, colocamos una carga Q (ver Fig.7). Dicha carga creará un campo en el interior de la cavidad. Ahora bien, el campo en el interior del conductor ha de ser cero. Eso implica que, aplicando el teorema de Gauss a la superficie S_1 ,

es necesario que aparezca una densidad de carga en la **superficie interna** del conductor que verifique:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r}) dS = -Q \quad (6.7)$$

ya que la carga total encerrada por S_1 ha de ser nula. Fijaros que esto no contradice lo dicho en la sección anterior, ya que antes **no había carga alguna en la cavidad!** La aparición de la densidad de carga en la cara interior del conductor no puede, sin embargo, violar la conservación de la carga eléctrica. La carga total en el conductor, Q_{cond} , ha de ser siempre la misma. Esto significa que será necesario que se aparezca otra densidad de carga superficial en la cara exterior, σ_{out} , de modo que la carga total en el conductor se conserve:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r}) dS + \oint_{S_{out}} \sigma_{out}(\vec{r}) dS = Q_{cond} \Rightarrow \oint_{S_{out}} \sigma_{out}(\vec{r}) dS = Q_{cond} + Q. \quad (6.8)$$

El campo en el exterior del conductor será entonces diferente de cero (ver lado izquierdo de la Fig. 6.7), puesto que si cogemos una superficie S_2 como la de la figura, la carga total encerrada dentro será $Q_{cond} + Q \neq 0$. Sería sin embargo posible hacer que dicho campo exterior fuera cero si, de algún modo, consiguiéramos que esta carga total se anule. Es decir, si:

$$Q_{cond} = -Q. \quad (6.9)$$

Esto puede conseguirse si conectamos la cara externa del conductor a un punto exterior de potencial constante mediante un cable. A esto se le llama **conectar el conductor a tierra**. La idea se basa en el hecho de que la superficie de un conductor ha de ser equipotencial. Si unimos dos conductores con un cable, se establecerá un trasiego de carga entre ambos, hasta que el potencial se iguale. En ese momento, deja de haber campo eléctrico entre ellos (recordar que el campo es el gradiente del potencial, ¡luego es cero si éste último es constante!), ya que si lo hubiera, los electrones de ambos seguirían sintiendo una fuerza, que haría que el trasiego de carga continuase. El valor final del potencial en los conductores depende, como veremos, de la cantidad de carga que haya en cada uno y de las características geométricas de éstos. En el caso de la Tierra, ésta es tan grande que se supone que no cambia apreciablemente su potencial por tomar/ceder unos pocos electrones, suficientes por otro lado para que el potencial de la cara externa del conductor se iguale al de la Tierra, y por tanto, para que desaparezca todo campo externo (ver lado derecho de la Fig. 6.7). Por tanto,

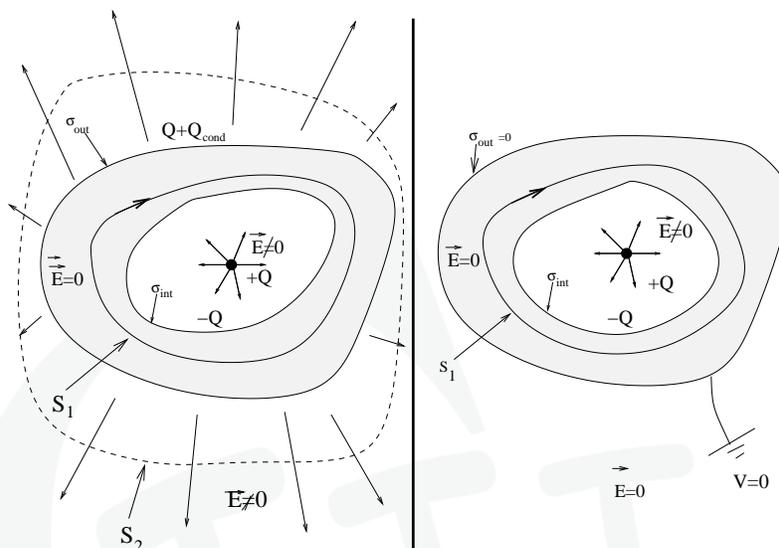


Figura 6.7: Blindaje eléctrico.

Un conductor proporciona un blindaje perfecto respecto a cualquier campo eléctrico producido en una cavidad interior siempre que conectemos la superficie externa del mismo a tierra.

6.1.5. Efecto Punta

Hemos dicho ya que, en un conductor, toda la carga se concentra en la superficie, que esta es equipotencial, y que el campo eléctrico sólo puede ser perpendicular a la superficie del mismo. Demostraremos ahora que el módulo de dicho campo es **máximo en las puntas del conductor**. Para ello, consideramos el siguiente ejemplo. Sean dos esferas de radios R_1 y R_2 , con $R_1 \gg R_2$ (ver Fig. 6.8). Si cada esfera contiene una carga Q_1 y Q_2 respectivamente, sus potenciales vienen dados por (como se comprueba fácilmente usando el teorema de Gauss para cuerpos con simetría esférica):

$$V_1 = K \frac{Q_1}{R_1} \quad \text{y} \quad V_2 = K \frac{Q_2}{R_2}. \quad (6.10)$$

Al ponerlas en contacto, habrá un trasiego de carga hasta que sus potenciales se

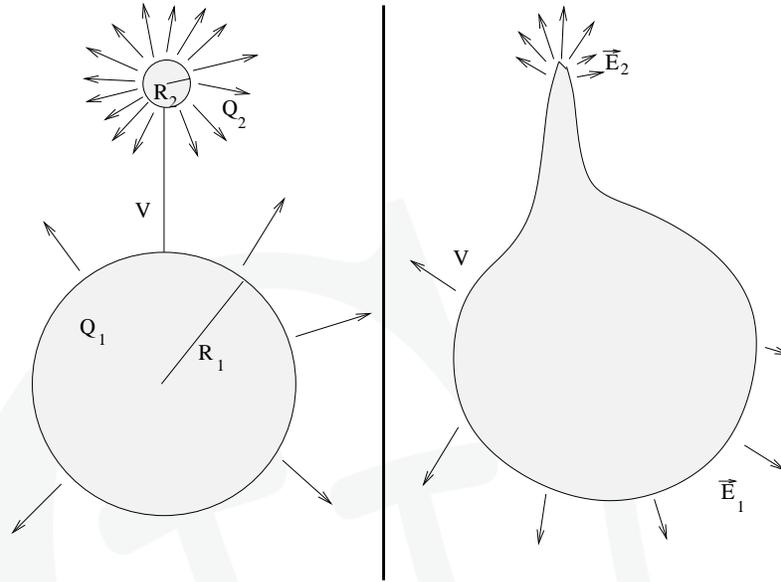


Figura 6.8: Efecto punta.

iguales. Las cargas finales en cada esfera tendrán que cumplir:

$$\frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \quad (6.11)$$

y por conservación de carga, $Q = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$. Por lo tanto,

$$Q'_1 = \frac{QR_1}{R_2 + R_1} \quad \text{y} \quad Q'_2 = \frac{QR_2}{R_2 + R_1} \quad (6.12)$$

La densidad de carga en cada esfera será entonces igual a:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_2 + R_1)} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_2 + R_1)} \quad (6.13)$$

de donde vemos que, puesto que $R_2 \ll R_1$, esto implica que $\sigma_2 \gg \sigma_1$. Por lo tanto,

En un conductor, la carga se concentra esencialmente en las puntas, donde el campo eléctrico es mucho más intenso.

6.1.6. Capacidad de un conductor

Se define la **capacidad** de un conductor como el cociente entre la cantidad de carga que puede contener cuando su superficie está a un determinado potencial eléctrico y el valor de dicho potencial.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (6.14)$$

Es importante recordar siempre que la capacidad solamente depende de factores geométricos del conductor.

• Ejemplo: capacidad de un conductor esférico de radio R

Supongamos un conductor esférico de radio R que contiene una carga Q . El potencial en su superficie se puede calcular teniendo en cuenta que **toda** la carga ha de estar concentrada en la superficie, de forma que tenemos una densidad superficial de carga dada por $\sigma = Q/4\pi R$. Aplicando Gauss, es fácil ver que el campo en el interior del conductor es nulo (como debe ser), y que fuera viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r \quad (6.15)$$

El potencial se obtiene fácilmente sobre la superficie, sin más que integrar (ver notas del tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$V(R) = - \int_{\infty}^R E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (6.16)$$

Por lo tanto, la capacidad del conductor esférico será:

$$C = \frac{Q}{V(R)} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (6.17)$$

que, como decíamos, solo depende de la forma del conductor.

6.1.7. Energía almacenada en un conductor

Recordando que vimos como un sistema de cargas $\{q_1, \dots, q_N\}$, en presencia de un campo escalar potencial eléctrico $V(\vec{r})$, almacena una energía electrostática dada por (ver

notas sobre Potencial Eléctrico):

$$W_{\{q_1, \dots, q_N\}}^{electrostatica} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i), \quad (6.18)$$

siendo \vec{r}_i la posición de la carga q_i , es fácil ver que, en el caso del conductor donde todas las cargas están a un potencial idéntico igual al de la superficie externa del conductor, la energía electrostática almacenada en éste es igual a:

$$W_{conductor}^{electrostatica} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (6.19)$$

donde se ha usado la definición de capacidad de un conductor, $C \equiv Q/V$.

6.1.8. Condensadores

Se define un **condensador** como un sistema formado por dos conductores que se conectan entre sí por medio de alguna trayectoria conductora, de modo que el proceso de carga de cada uno es una **transferencia de carga de uno a otro**. Es decir, si llamamos 1 al primero y 2 al segundo, se cumple siempre que $Q_1 = -Q_2$.

i. Condensador Plano-Paralelo

Uno de los ejemplos más típicos es el del **condensador plano-paralelo**, que se muestra en la Fig. 6.9. En dicha figura, se establece una diferencia de potencial $\Delta V = V_0$ entre dos placas paralelas de material conductor y de sección S , separadas una distancia d , que hace que ambas placas se cargen con cargas iguales y de sentido contrario, $\pm Q$. Es fácil comprobar que Q es proporcional a la diferencia de potencial ΔV que se establece entre las placas. Se define, por tanto, la **capacidad de un condensador**, como el cociente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (6.20)$$

Es importante darse cuenta que, aunque tengan el mismo nombre, esta definición difiere de la de capacidad de un conductor (ver tema sobre Conductores), puesto que en ese caso la carga neta almacenada es no nula, estando **toda** ella a un mismo valor del potencial eléctrico. En este caso, la carga total en el condensador es nula, ya que hay $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra, y V_0 no es un potencial, sino la diferencia entre los

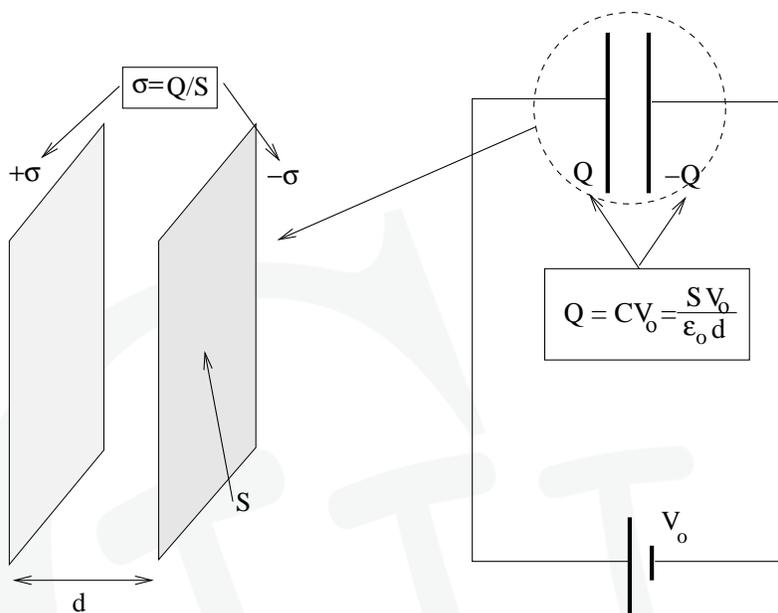


Figura 6.9: Condensador plano-paralelo.

valores del potencial eléctrico en cada placa, $\Delta V = V_+ - V_- = V_0$. El hecho de usar el mismo nombre se debe a que tanto conductores como condensadores son sistemas de almacenamiento de carga (y por tanto, de energía electrostática).

Es posible estimar analíticamente el valor de la capacidad de un condensador plano-paralelo si consideramos el límite en el que las placas sean infinitas, lo cual es una buena aproximación si $d \ll \sqrt{S}$. En ese caso, el campo eléctrico creado por el condensador es igual al creado por dos planos paralelos e infinitos, separados una distancia d y cargados con densidades $\pm\sigma$, y que hemos resuelto previamente (ver tema sobre el Teorema de Gauss). Se obtuvo entonces que el campo era no nulo **únicamente** entre las dos placas, era **perpendicular** a las mismas, y estaba dirigido de la placa positiva a la negativa. Además, su módulo era constante y valía (ver Fig 6.10):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.21)$$

Haciendo uso de lo aprendido anteriormente (ver tema sobre Potencial Eléctrico; en particular, el ejemplo sobre el cálculo de potenciales en problemas con simetrías de traslación), es posible calcular el potencial eléctrico asociado a este campo en todos los puntos

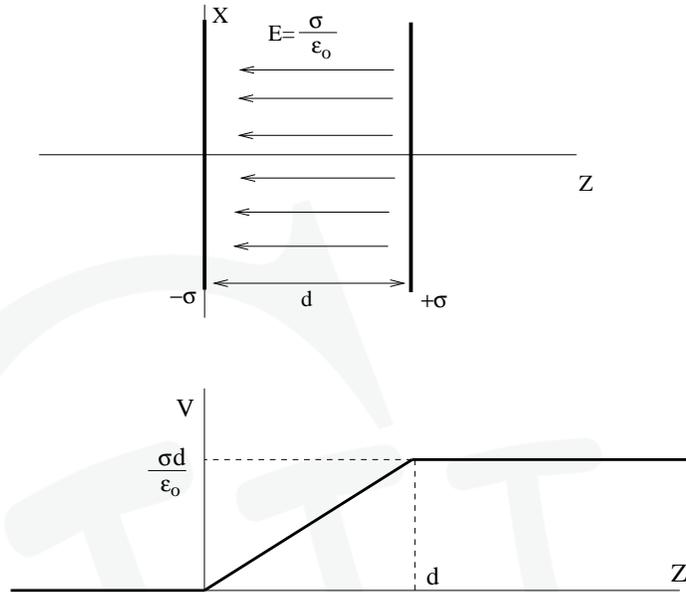


Figura 6.10: Campo y potencial eléctrico en un condensador plano-paralelo infinito.

del espacio. Si elegimos como cero de potenciales el lugar donde está situada la placa negativa :

$$V(z) = - \int_0^z \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) dz = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{\sigma z}{\epsilon_0} & 0 < z < d \\ \frac{\sigma d}{\epsilon_0} & z > d \end{cases} \quad (6.22)$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial entre las placas es igual a:

$$\Delta V = V_+ - V_- = V(d) - V(0) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{S\epsilon_0}, \quad (6.23)$$

con lo que la carga almacenada Q es proporcional a la diferencia de potencial ΔV , como se mencionó anteriormente. Sustituyendo ahora en la fórmula de la capacidad, obtenemos que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (6.24)$$

Por lo tanto, si establecemos una diferencia de potencial V_o (por ejemplo con una pila) entre las dos placas, éstas se cargarán con una carga dada por:

$$Q = CV_o = \frac{\epsilon_0 S}{d} V_o. \quad (6.25)$$

Podemos, también, estimar la energía electrostática almacenada en el condensador:

$$W_{condensador}^{electrostatica} = \frac{1}{2} [(+Q)V_+ + (-Q)V_-] = \frac{1}{2} QV_o = \frac{1}{2} CV_o^2, \quad (6.26)$$

donde se ha usado que la energía almacenada en un conductor es igual a $QV/2$, como se vio en la última sección del Tema sobre Conductores.

ii. Asociaciones de condensadores

Es posible asociar condensadores en **serie** y en **paralelo** (ver Fig. 6.11).

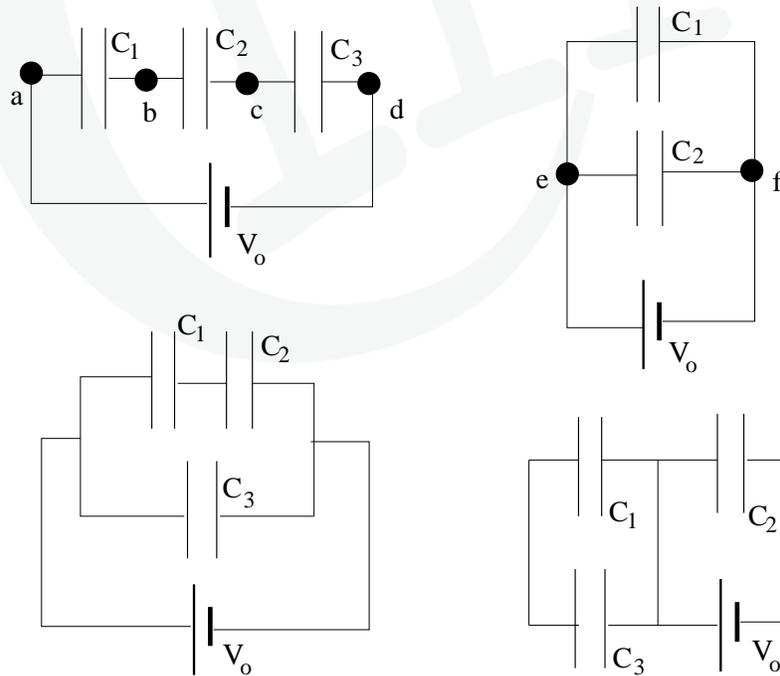


Figura 6.11: Asociaciones de condensadores.

■ Asociación en paralelo

Dos condensadores están asociados en paralelo si **existe la misma diferencia de potencial** entre sus extremos. Por ejemplo, los dos condensadores del esquema superior derecho de la Fig. 3 están en paralelo, ya que en los extremos de ambos cae una diferencia de potencial V_o . Gráficamente, se distinguen las asociaciones en paralelo porque los dos condensadores tienen dos puntos en común, los puntos e y f de la figura.

Puesto que la carga en cada condensador vendrá dada por:

$$Q_1 = C_1 V_o \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V_o, \quad (6.27)$$

esto implica que ambos condensadores almacenan la misma carga, $Q = Q_1 + Q_2$, que un condensador con capacidad equivalente:

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_o} = C_1 + C_2 \quad (6.28)$$

igual a la suma de las capacidades de cada condensador.

■ Asociación en serie

Dos condensadores están asociados en serie si **la diferencia de potencial entre la placa izquierda del primer condensador y la placa de la derecha del segundo condensador es igual a la suma de la diferencia de potencial entre las placas del primero y la diferencia de potencial entre las placas del segundo**. Gráficamente, se distinguen las asociaciones en serie por que los condensadores solo comparten un punto en común. Por ejemplo, en el esquema superior izquierdo de la Fig. 6.11, el primer condensador solo comparte el punto b con el segundo, y éste comparte sólo el punto c con el tercero.

En dicho ejemplo, tendremos que la carga en cada condensador vendrá dada por:

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad \text{y} \quad Q_3 = C_3 V_3, \quad (6.29)$$

siendo V_i la diferencia de potencial entre las placas del condensador i ($i = 1, 2, 3$), y verificándose que $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$. Sin embargo, es necesario que $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, ya que si no se conservaría la carga en cada nodo (por ejemplo, mirando al punto b de la Fig. 3, es necesario que las cargas en la placa derecha del primer

condensador y en la izquierda del segundo sean iguales y de signo contrario, ya que sino, ¡habría aparecido carga de la nada en dicho punto!). Por lo tanto, sustituyendo V_i por su equivalente en términos de carga y capacidad de cada condensador, tenemos que:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right]. \quad (6.30)$$

Por lo tanto, los tres condensadores podrían ser sustituidos por un condensador equivalente con capacidad:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (6.31)$$

Sin embargo, muchas veces no es fácil saber como están asociados los condensadores. Es necesario practicar. Por ejemplo, ¿sabrías explicar porqué, en el esquema inferior izquierdo de la Fig. 6.11, los condensadores C_1 y C_2 están conectados en serie entre sí, y en paralelo con el tercero, C_3 ? ¿Y como están conectados los tres condensadores del esquema inferior derecho de la misma figura?

iii. El condensador cilíndrico

Un condensador cilíndrico está formado por dos hojas cilíndricas conductoras coaxiales (nótese que la primera hoja podría ser un conductor macizo, ya que toda la carga se concentraría en la superficie externa del mismo). Por ejemplo, en la Fig. 6.12 se muestra un condensador cilíndrico formado por dos hojas infinitas de radios a y b , cargadas respectivamente con cargas $\pm Q$ (esta es una buena aproximación para un condensador cilíndrico real, siempre que la longitud del cilindro sea mucho mayor que su radio).

Para calcular su capacidad, basta recordar que la carga que almacena cualquiera de las dos hojas (la otra almacenará lo mismo, pero con signo contrario) puede escribirse en función de una densidad de carga σ definida por:

$$Q = \sigma 2\pi a L, \quad (6.32)$$

donde L es la longitud (infinita) del cilindro. Para calcular la diferencia de potencial entre las hojas hemos de utilizar el teorema de Gauss, que nos dice que el campo eléctrico creado

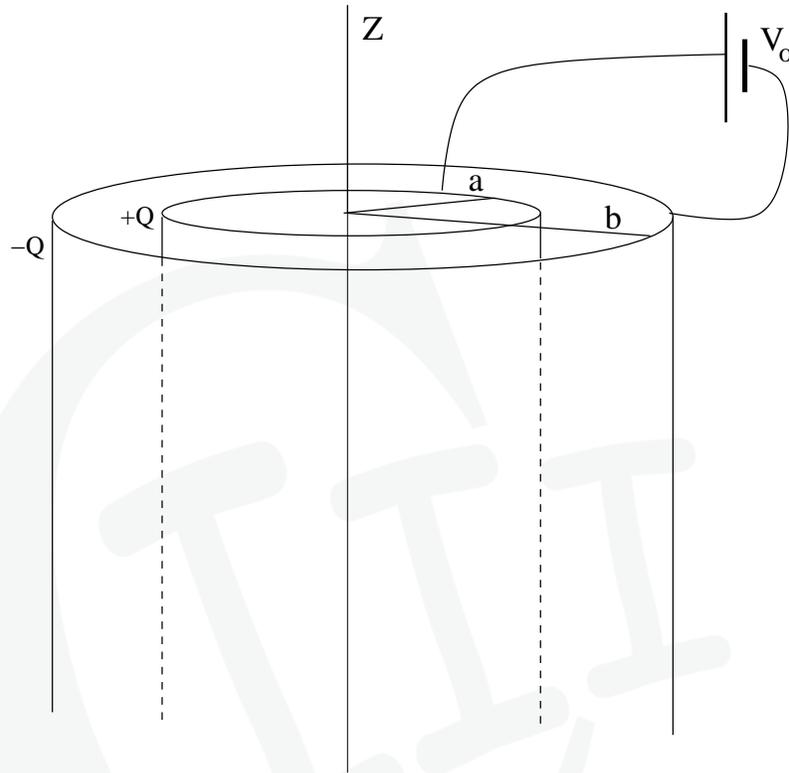


Figura 6.12: Condensador cilíndrico.

por el sistema es igual a:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{a\sigma}{r\epsilon_0} \vec{u}_r, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (6.33)$$

Por lo tanto, calculando la diferencia de potencial entre las dos hojas teniendo en cuenta que estamos en un problema con simetría cilíndrica (usando para ello las expresiones

introducidas en el tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$\begin{aligned}\Delta V = V_+ - V_- &= V(a) - V(b) = - \int_{r_o}^a E(r)dr + \int_{r_o}^b E(r)dr = - \int_b^a \frac{a\sigma}{r\epsilon_0} = \\ &= \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{b}{a} \right)\end{aligned}\quad (6.34)$$

Por lo tanto, su capacidad por unidad de longitud (ya que es infinito, ¡sino saldría una capacidad infinita!) es igual a:

$$C/L = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.\quad (6.35)$$

iv. El condensador esférico

Un condensador esférico está formado por dos esferas (la interior puede ser hueca o no, por la misma razón que en el caso cilíndrico) conductoras concéntricas, de radios a y b (ver Fig. 6.13). Podemos calcular su capacidad de nuevo, tras obtener el campo creado por las esferas en cada punto del espacio (usando el Teorema de Gauss) cuando la interior tenga una carga $+Q$ y la exterior $-Q$:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases}\quad (6.36)$$

Por lo tanto, calculando la diferencia de potencial entre las esferas teniendo en cuenta que estamos en un problema con simetría esférica (usando para ello las expresiones introducidas en el tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$\begin{aligned}\Delta V = V_+ - V_- &= V(a) - V(b) = - \int_{r_o}^a E(r)dr + \int_{r_o}^b E(r)dr = \\ &= - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)\end{aligned}\quad (6.37)$$

Por lo tanto, su capacidad es igual a:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}.\quad (6.38)$$

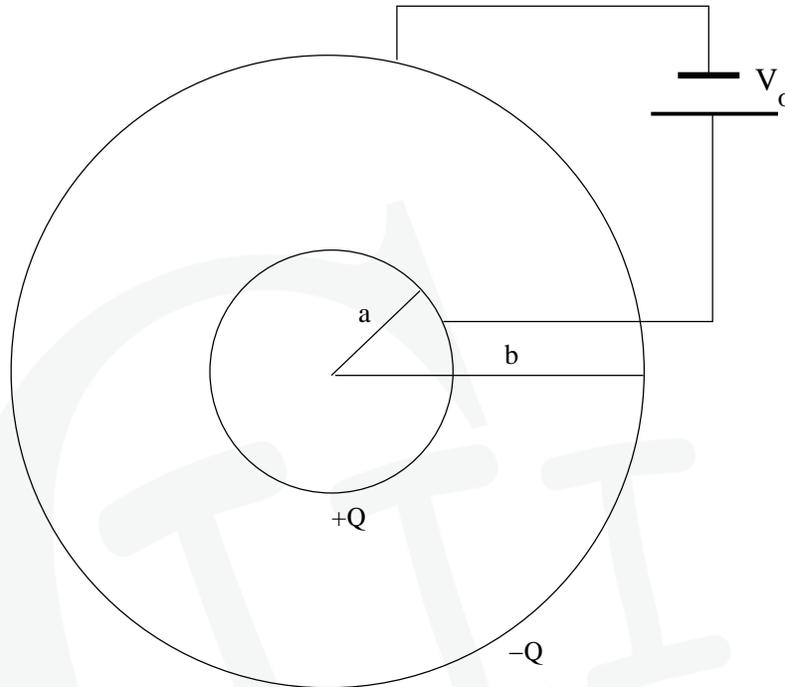
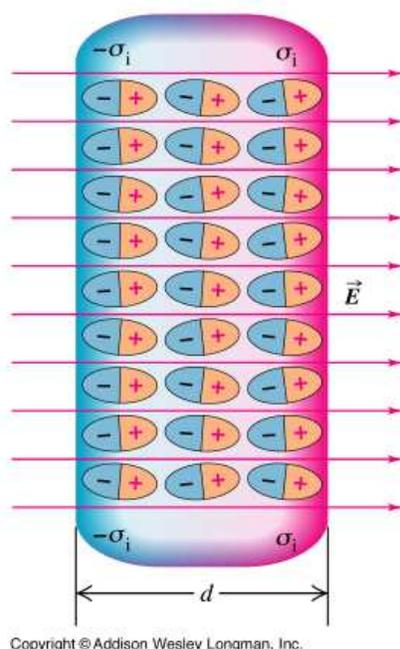


Figura 6.13: Condensador esférico.

6.2. MEDIOS DIELECTRICOS

Los **dieléctricos** son sustancias en las que todas las partículas cargadas están muy fuertemente ligadas a las moléculas y átomos que forman el material. Por ello, en *presencia de un campo eléctrico externo* conducen muy mal la corriente ¹. En su lugar, lo que sucede es que el material se **polariza**, tal y como se muestra en la Fig. 1.26. Debido a la acción del campo eléctrico externo, la carga que existe en la molécula (neutra) se redistribuye, de forma que los electrones (que son los que, al tener menor masa, se mueven más fácilmente) se desplazan en la dirección contraria a la del campo tanto como sea necesario para que se alcance una nueva situación de equilibrio. Como resultado de esta *polarización de la carga*, se crea un campo eléctrico *molecular* de sentido opuesto al externo, ya que va de la parte de la molécula donde se concentra la carga positiva a la negativa. Por lo tanto, el campo eléctrico *se reduce* en el interior del dieléctrico.

¹Por esto, también reciben el nombre de *aislantes*. Fijaros que, en algunos casos, su conductividad puede ser del orden de 10^{20} veces menor que la de un buen conductor.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Figura 6.14: Polarización de un dieléctrico en presencia de un campo externo.

Fijaros también que, si seguimos aumentando el campo eléctrico externo, la molécula tiene un límite de deformación por encima de cual se produce lo que se llama **ruptura dieléctrica**. Al mínimo valor del campo eléctrico para el que esto sucede se le llama **campo de ruptura**. Por encima de él, el dieléctrico se vuelve conductor, ya que vuelve a tener cargas (electrones) libres susceptibles de conducir corriente².

6.2.1. El dipolo eléctrico

En esta sección vamos a estudiar el campo y el potencial eléctrico creado por la configuración formada por un par de cargas idénticas, de signos contrarios y que están separadas una distancia d (ver Fig. 6.15). A esta configuración se le llama **dipolo eléctrico**. El motivo por el que nos interesa esta configuración tan particular es que, como vimos en la sección anterior, las moléculas de un dieléctrico redistribuyen su carga en presencia de un campo eléctrico externo de tal modo que van a poder representarse fácilmente mediante

²Un ejemplo común del fenómeno de ruptura dieléctrica son los rayos y relámpagos que se producen durante las tormentas eléctricas. En ellos, el dieléctrico que se rompe es el aire.

este concepto.

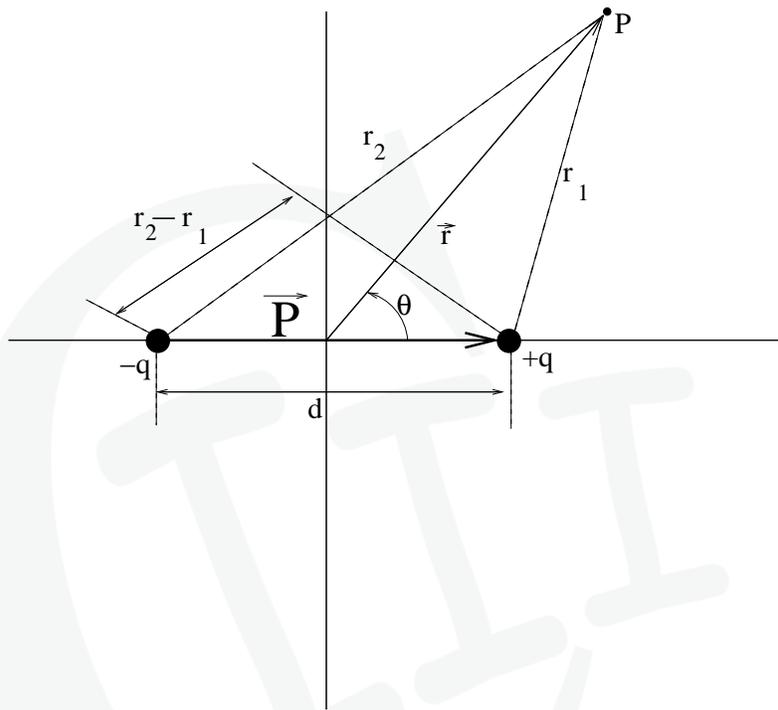


Figura 6.15: Esquema del dipolo eléctrico.

Pasemos, por tanto, a calcular cuanto vale el potencial y el campo eléctrico creado por este dipolo. Claramente, el potencial en el punto P será igual a:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (6.39)$$

Pero fijaros que, para la aplicación que tenemos en mente darle, se cumple siempre que $|\vec{r}| \gg d$ ³, y por lo tanto $r_1 \simeq r_2 \simeq r$. Por ello, está justificado el usar las siguientes aproximaciones:

$$r_2 - r_1 \simeq d \cos \theta \quad \text{y} \quad r_1 r_2 \simeq r^2, \quad (6.40)$$

que se deducen fácilmente de la Fig. 6.15.

³Fijaros que, en el caso de una molécula polarizada, $d \sim 10^{-9}m$!

De esta forma, está justificado el aproximar el potencial creado por el dipolo en el punto P por:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos\theta}{r^2} \right). \quad (6.41)$$

Ahora, vamos a definir un nuevo vector: el **momento dipolar eléctrico**

$$\vec{p} = q\vec{d}, \quad (6.42)$$

donde \vec{d} es el vector que va de la carga positiva a la carga negativa. Fijaros que, por tanto, el vector momento dipolar eléctrico es un vector que va de la **carga negativa a la positiva**, y tiene por módulo el producto $q \cdot d$ (ver Fig. 6.15). El motivo de su importancia es que, como vamos a ver a continuación, tanto el campo y potencial creado por el dipolo eléctrico dependen siempre de q y d a través de este vector ⁴.

Veamos que esto es así. Para ello, nos fijamos en que \vec{p} forma un ángulo θ con el vector \vec{r} que va desde el origen de coordenadas (que está a mitad de camino entre las dos cargas, como se ve en la Fig. 6.15) hasta el punto P . Por ello, se tiene que:

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = qdr \cos\theta \quad (6.43)$$

lo que podemos usar para reescribir el potencial como:

$$\phi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \quad (6.44)$$

que depende ya solo de \vec{p} como decíamos.

Una vez conocido el potencial, podemos calcular el campo eléctrico creado por el dipolo en el punto P calculando el gradiente de la Ec. 6.44:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \quad (6.45)$$

como puede verse fácilmente tras un poco de álgebra. Fijaros que, de nuevo, la Ec. 6.45 solo depende de q y d a través del vector dipolar eléctrico \vec{p} .

Antes de seguir es conveniente visualizar la forma de este campo. Para ello, hemos pintado sus líneas de fuerza en la Fig. 6.16. Como tiene que ser, todas ellas nacen de la carga

⁴Es por ello que, muchas veces se representan estos dipolos dibujando el vector \vec{p} , en lugar de pintar la pareja de cargas.

positiva y mueren en la carga negativa. Es pedagógico el recordar ahora lo que decíamos que sucedía en una molécula polarizada: en presencia de un campo eléctrico externo, la carga negativa de la molécula se movía en su contra hasta encontrar una nueva posición de equilibrio. La forma del campo eléctrico molecular que antes mencionábamos que aparecía debido a esta polarización de la carga tiene, precisamente, la misma estructura que se muestra en la Fig. 6.16.

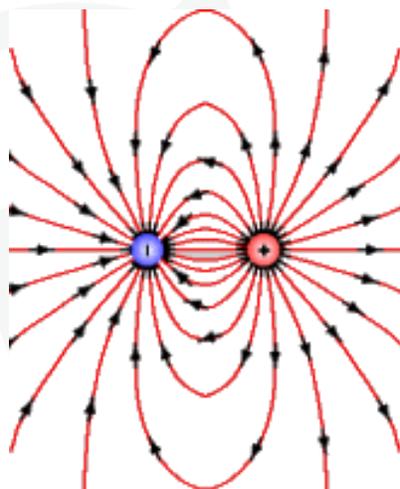


Figura 6.16: Líneas de fuerza para el campo eléctrico creado por un dipolo.

6.2.2. El vector polarización

Bueno, pues una vez que sabemos que los materiales dieléctricos pueden polarizarse, ¿cómo cuantificamos ese estado de cosas para poder calcular algo con ello? Pues introduciendo lo que se conoce como el **vector polarización**, $\vec{P}(\vec{r})$.

Este vector es muy fácil entenderlo si se explota su analogía con el concepto de densidad de carga eléctrica $\rho(\vec{r})$, que introdujimos para estudiar el campo creado por una distribución continua de carga. Recordar que entonces dijimos que la densidad de carga ρ se calculaba, en cada punto de dicha distribución con radio vector \vec{r} , escogiendo un diferencial de volumen ΔV centrado en él y contando cuánta era la carga total almacenada en su interior, ΔQ (sumando para ello la carga de las moléculas y átomos que había dentro de dicho diferencial). Luego, construíamos el cociente:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (6.46)$$

que nos daba la carga por unidad de volumen en dicho punto.

En el caso de un dieléctrico polarizado hemos visto que cada molécula se convertirá en una especie de dipolo, que caracterizamos por un vector momento dipolar eléctrico \vec{p} . Por tanto, en lugar de carga eléctrica, vamos a tener momentos dipolares eléctricos distribuidos por todo el volumen del dieléctrico. Pero podemos usar también una densidad volumétrica para describir como se reparte. Esa densidad es precisamente lo que es el **vector polarización** \vec{P} . Para definirlo haremos lo mismo que hicimos antes para definir la densidad de carga eléctrica: Cogemos, en cada punto \vec{r} , un diferencial de volumen ΔV centrado en él, y calcularemos cuánto vale el vector momento dipolar eléctrico total contenido en ΔV (sumando para ello los vectores momento dipolar eléctrico de cada molécula y átomo en dicho volumen). Después definimos la *densidad de momento dipolar eléctrico* como:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}. \quad (6.47)$$

6.2.3. Potencial eléctrico creado por un dieléctrico polarizado

Ya estamos en condiciones de calcular el potencial eléctrico creado por un dieléctrico polarizado, que supondremos caracterizado por un vector polarización \vec{P} (igual que anteriormente suponíamos conocida la densidad de carga ρ para calcular el campo eléctrico creado por una distribución continua). El proceso comenzará dividiendo el dieléctrico en diferenciales de volumen, calculando entonces cuanto vale el potencial eléctrico que cada uno de estos diferenciales crea en un punto arbitrario \vec{r} , y aplicando el principio de superposición para obtener el potencial creado por todo el dieléctrico. Fijaros que, una vez hecho esto, podríamos obtener el campo eléctrico creado por el dieléctrico sin más que aplicar el operador gradiente sobre el potencial que hemos obtenido.

Comencemos dividiendo el dieléctrico en diferenciales de volumen dV' , tal y como se muestra en la Fig. 6.17. El potencial que dicho diferencial creará en el punto \vec{r} puede calcularse si suponemos que dicho diferencial puede sustituirse por un único **vector dipolar eléctrico** $d\vec{p}$ dado por ⁵:

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')dV', \quad (6.48)$$

Una vez hecho esto, el potencial creado por el diferencial de vector momento dipolar puede

⁵Fijaros que el proceso discurre de forma totalmente análoga a como, en el caso de la distribución continua de carga, sustituíamos cada diferencial de volumen por una carga puntual situada en \vec{r}' con valor $dQ' = \rho(\vec{r}')dV'$.

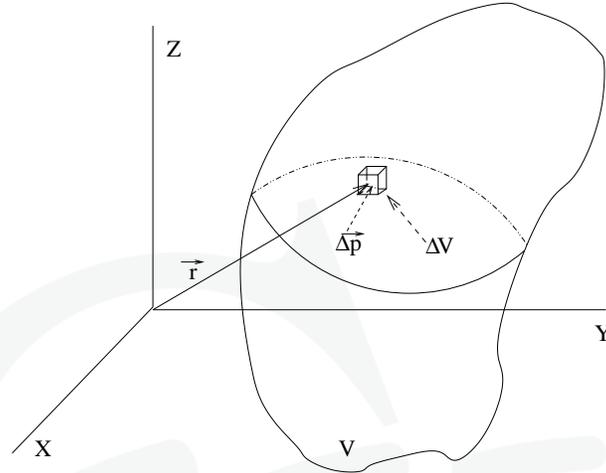


Figura 6.17: División de un dieléctrico en diferenciales de volumen.

obtenerse usando la Ec. 6.44:

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV', \quad (6.49)$$

y teniendo en cuenta que el vector \vec{r} que aparece en dicha ecuación no es sino el vector que va del centro del dipolo al punto P donde queremos calcular el campo. En nuestro caso, dicho vector es el vector $\vec{r} - \vec{r}'$, que une al diferencial de volumen sito en \vec{r}' con el punto P .

Finalmente, aplicando el principio de superposición, calculamos el potencial total creado por el dieléctrico integrando sobre todo el volumen del mismo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (6.50)$$

6.2.4. Densidades de carga de polarización

No es ésta, sin embargo, la forma más útil de esta expresión. No es difícil ver que es posible reescribirla como ⁶:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (6.51)$$

donde la primera integral es sobre la superficie cerrada S' que rodea al volumen del dieléctrico V' , mientras que la segunda es sobre todo el volumen del mismo.

Esta expresión tiene una interpretación muy sencilla si recordamos aquí dos ecuaciones que ya obtuvimos en su momento, y que daban respectivamente los potenciales eléctricos creados por una distribución superficial de carga σ y una distribución de volumen ρ (la Ec. 103 y la Ec. 102). Las repetimos aquí por conveniencia:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S dS' \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.52)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.53)$$

Como puede verse, la contribución al potencial eléctrico dado por el primer término de la Ec. 6.51 es idéntico al que crearía una distribución de carga dada por

$$\sigma_P(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}, \quad (6.54)$$

que estuviese distribuída por la *superficie exterior del dieléctrico* ⁷, mientras que la contribución debida a la segunda integral de la Ec. 6.51 es idéntico al que crearía una distribución de carga igual a

$$\rho_P(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}), \quad (6.55)$$

que estuviese *repartida por el volumen V' del dieléctrico*. A estas dos densidades se les conoce como **densidades de carga de polarización**.

Este resultado es de gran importancia, ya que nos dice que podemos calcular los campos y potenciales eléctricos creados por un dieléctrico polarizado con vector polarización \vec{P}

⁶Para ello, hay que usar técnicas de integración por partes y el Teorema de la Divergencia que incluimos en la parte de Material Avanzado del Teorema de Gauss. Sin embargo, no vamos a hacerlo en detalle en este curso.

⁷El vector \vec{n} es el vector normal (hacia afuera) a la superficie S' en cada punto; es decir, $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

sin más que calculando cuales son las densidades de carga de polarización equivalentes σ_P y ρ_P a partir de \vec{P} . Una vez hecho esto, podemos olvidarnos del dieléctrico y usar los métodos de la electrostática del vacío para calcular campos y potenciales. En concreto, el campo eléctrico en cada punto será igual a:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\nabla \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV', \quad (6.56)$$

por analogía directa con la ley de Coulomb para distribuciones continuas de carga.

- **Ejemplo: campo creado por un cilindro dieléctrico de altura h y radio R polarizado según el eje Z con vector polarización uniforme dado por $\vec{P} = P_0 \vec{u}_4$ (ver Fig. 6.18).**

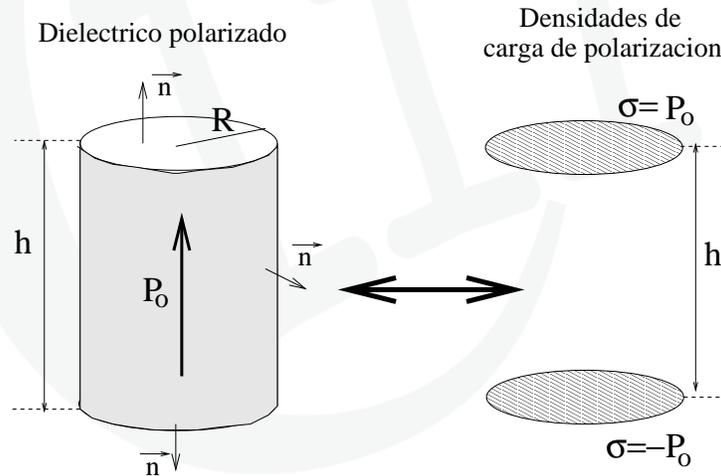


Figura 6.18: Densidades de carga de polarización del ejemplo.

Para calcular el campo eléctrico creado por este cilindro, lo más sencillo es calcular cuales son las densidades de carga de polarización equivalentes. Una vez conocidas, podemos calcular el campo eléctrico aplicando la ley de Coulomb. La densidad volumétrica de carga es la más sencilla de calcular ya que:

$$\rho_P(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0. \quad (6.57)$$

Es decir, no hace falta considerar ninguna carga de polarización distribuida en el volumen del cilindro.

En cuanto a la densidad superficial de carga de polarización, hemos de calcular $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$, donde \vec{n} es la normal (tomada siempre hacia afuera) a la superficie exterior del cilindro (ver Fig. 6.18). Fijaros que $\vec{n} = \vec{u}_r$ sobre la superficie lateral, mientras que $\vec{n} = \vec{u}_z$ sobre la base superior del cilindro, y $\vec{n} = -\vec{u}_z$ en la superficie interior. Por ello, sólo existirá carga de polarización sobre las bases, y será igual a:

$$\sigma_{\text{basesuperior}} = P_0 \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = +P_0 \quad \sigma_{\text{baseinferior}} = P_0 \vec{u}_z \cdot (-\vec{u}_z) = -P_0. \quad (6.58)$$

Ahora, basta con calcular el campo creado por dos discos de radio R , separados una distancia h , y cargados con densidades de carga $\pm P_0$. Para ello, basta con usar la ley de Coulomb que vimos en el tema sobre el campo eléctrico en el vacío.

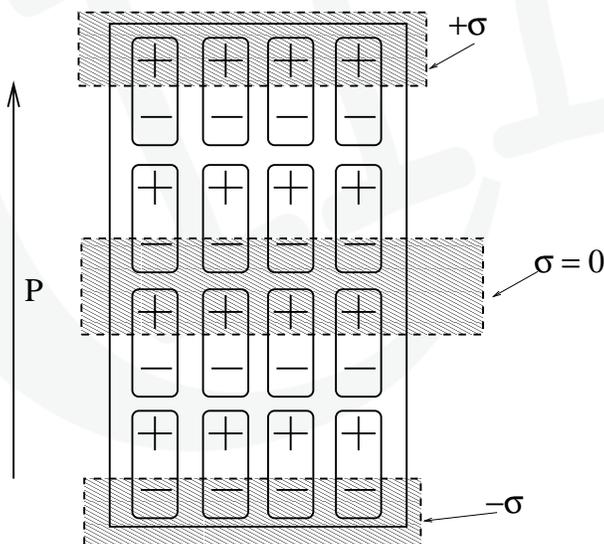


Figura 6.19: Significado físico de la densidad superficial de polarización.

Significado físico de las densidades de carga de polarización

¿Cabría ahora preguntarse cual es el **significado físico de estas densidades de carga de polarización**? ¿Tienen σ_P y ρ_P algún significado físico? ¿O se trata simplemente de una ilusión producida por el formalismo matemático? La respuesta es que ambas tienen una justificación física.

La más sencilla es la interpretación de σ_P . Para ello, usaremos el ejemplo anterior del cilindro. En la Fig. 6.19 se muestra el mismo cilindro de perfil, de forma que las bases superior e inferior corresponden al lado superior e inferior del paralelogramo de la figura. También hemos pintado como se polarizan las moléculas en la dirección dada por \vec{P} . Ahora, si calculamos la densidad de carga en los tres rectángulos rayados, puede verse como únicamente en los que engloban a las bases hay una densidad de carga neta diferente de cero, positiva en la parte superior y negativa en la inferior.

Para interpretar el significado de ρ_P no es suficiente con el cilindro anterior. Recordar que, puesto que $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$, será nula si el vector \vec{P} es constante. En la Fig. 6.20 hemos dibujado el mismo cilindro, polarizado en la misma dirección, pero con polarización que decrece con la altura del cilindro (es decir, el número de dipolos por unidad de volumen decrece a medida que nos movemos a lo largo del eje del cilindro). En ese caso, tendremos que,

$$\vec{P} = P(z)\vec{u}_z \Rightarrow \rho_P(z) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P(z)}{\partial z}. \quad (6.59)$$

El significado físico de esta densidad se ve claramente en la Fig. 6.20 observando lo que sucede al calcular la densidad de carga en el rectángulo rayado interno. Puesto que el número de dipolos por unidad de volumen decrece con z , no se compensan las cargas positivas y negativas dentro del volumen dando lugar a una densidad de carga de polarización no nula.

6.2.5. Teorema de Gauss para dieléctricos

Cuando estudiamos el campo eléctrico en el vacío vimos que el Teorema de Gauss nos decía que, si considerabamos una superficie cerrada arbitraria S , se cumple siempre que el flujo del campo eléctrico a su través era igual a:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}, \quad (6.60)$$

donde Q_s era la cantidad de carga total incluída en S . Esto era así porque las cargas son, como vimos, **son las fuentes escalares del campo eléctrico**.

En el caso de un dieléctrico, acabamos de ver que las fuentes del campo eléctrico total no van a ser sólo las cargas externas (llamadas **libres**) responsables de crear el campo externo que polariza inicialmente al dieléctrico, cargas de polarización que dan lugar al campo eléctrico con el que el dieléctrico *responde*, y que se suma al campo externo. Por

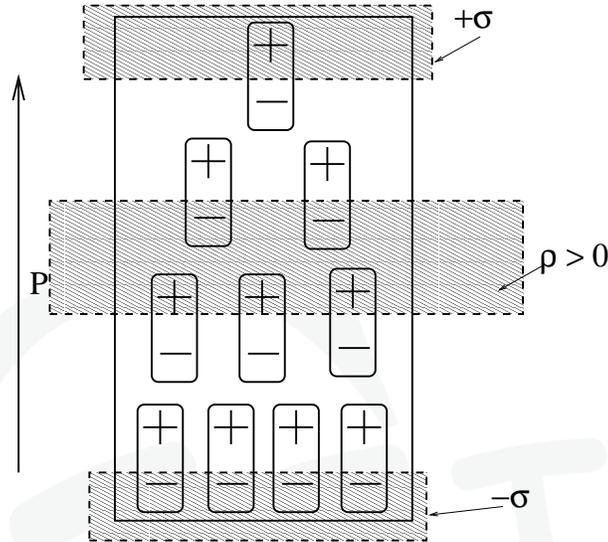


Figura 6.20: Significado físico de la densidad volumétrica de polarización.

ello, en presencia de dieléctricos, el teorema de Gauss se reformula como:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S + Q_P}{\epsilon_0}, \quad (6.61)$$

donde Q_P es la carga de polarización total encerrada dentro de la superficie S .

Del mismo modo, también se modifica la forma diferencial del Teorema de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.62)$$

que identificaba la localización de las fuentes escalares del campo eléctrico con los puntos donde estaban las cargas (donde $\rho \neq 0$). Puesto que ahora tenemos nuevas fuentes del campo, dicha expresión se modifica a:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0}, \quad (6.63)$$

que incluye las cargas de polarización.

6.2.6. Vector Desplazamiento Eléctrico, \vec{D}

En la sección anterior vimos que era necesario ampliar las fuentes que hay que considerar en el Teorema de Gauss cuando hay dieléctricos presentes. Esto no representa ningún

problema matemático serio, como ya vimos, pero sí que entorpece la utilidad del Teorema de Gauss a la hora de calcular campos eléctricos en problemas de mucha simetría. La dificultad estriba en que, si bien la densidad de carga libre ρ suele ser conocida, no se tiene ni idea de cuanto puede valer la densidad de carga polarizada ρ_P . Fijaros que no es suficiente con saber que $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$, ya que la polarización del dieléctrico va a depender del valor campo eléctrico dentro del dieléctrico, que es precisamente lo que estamos tratando de calcular!

Existen, sin embargo, una familia de medios dieléctricos para los cuales puede todavía utilizarse el Teorema de Gauss para obtener el valor del campo eléctrico en casos con mucha simetría. Antes de presentarlos, es necesario introducir un nuevo campo vectorial, que se llama **vector desplazamiento eléctrico**, \vec{D} , y que se define como:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}. \quad (6.64)$$

¿Por qué es útil definir este vector? Pues porque si calculamos cuales son sus fuentes escalares (es decir, los puntos donde su divergencia no es cero), resulta que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho + \rho_P - \rho_P = \rho, \quad (6.65)$$

son **sólo las cargas libres**, que sí suelen ser conocidas de antemano. Por ello, si reformulamos el Teorema de Gauss dado por la Ec. 6.61 en términos del vector desplazamiento, tendremos que su flujo a través de una superficie cerrada S es igual a la **carga total libre** que encierra:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_S, \quad (6.66)$$

con lo que para calcular el vector \vec{D} en **todas las regiones del espacio** nos es indiferente si existen dieléctricos o no.

Fijaros que la Ec. 6.66 puede usarse igual que el Teorema de Gauss para el campo eléctrico que ya vimos anteriormente en el vacío. Es decir, nos permite calcular el valor del vector $\vec{D}(\vec{r})$ en problemas con un alto grado de simetría. ¿Y qué hemos ganado con esto? Parecería que no mucho, ya que seguimos sin saber lo que vale el campo eléctrico \vec{E} , que es el que realmente nos interesa. Ciertamente, ya que no podremos despejar \vec{E} de la Ec. 6.64 sin saber cuanto vale el vector polarización \vec{P} .

Bueno, pues aquí es donde tenemos que restringirnos a una familia particular de dieléctricos: los **lineales**, **homogéneos** e **isótropos**. Un medio cualesquiera se dice que

es *lineal*, si su respuesta a un estímulo externo es **proporcional** a la magnitud de dicho estímulo. Se dice que es *homogéneo* si todos los puntos del mismo son equivalentes. Y se dice que es *isótropo*, si todas las direcciones del medio son equivalentes. Puesto que la polarización del medio se produce como respuesta a la acción de un campo eléctrico, si el dieléctrico es un medio lineal, homogéneo e isótropo se verificará que:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi \vec{E}(\vec{r}), \quad (6.67)$$

que se verificará *unicamente* sobre aquellos puntos \vec{r} donde se encuentra el dieléctrico (fijaros que, fuera del dieléctrico $\vec{P} = 0$, ya que no hay materia que se pueda polarizar!). La constante de proporcionalidad χ se llama **susceptibilidad eléctrica** y puede medirse experimentalmente. Fijaros que si el medio no fuera lineal, $\chi = \chi(\vec{E})$. Si el medio no fuera homogéneo, la respuesta dependería del punto, $\chi = \chi(\vec{r})$. Y si no fuera isótropo, la polarización dependería de la dirección de la dirección del campo eléctrico y, por tanto, χ no sería un escalar, *sino una matriz*.

La existencia de esta relación entre los vectores \vec{E} y \vec{P} es suficiente para poder calcular el campo eléctrico \vec{E} creado por el dieléctrico si conocemos el vector desplazamiento \vec{D} (usando para ello, por ejemplo, el teorema de Gauss). Ciertamente, se cumple entonces que:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} (\epsilon_0 + \chi) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, & \text{dentro del dielectrico} \\ \epsilon_0 \vec{E}, & \text{fuera del dielectrico} \end{cases} \quad (6.68)$$

de donde puede despejarse fácilmente el valor del campo eléctrico.

En la Ec. 6.68 hemos definido dos nuevas cantidades características del material: **su permitividad eléctrica** $\epsilon \equiv \epsilon_0 + \chi$, y su **la permitividad eléctrica relativa** $\epsilon_r \equiv \epsilon/\epsilon_0$. Ambas son medibles experimentalmente. La primera tiene las mismas dimensiones que ϵ_0 , la permitividad del vacío. La segunda, es adimensional, mayor que uno y suele llamarse también **constante dieléctrica del medio**.

Por último, fijaros que el vacío se comporta como un dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon_r = 1$ o, lo que es lo mismo, con permitividad eléctrica ϵ_0 .

6.2.7. Condiciones de frontera sobre los vectores \vec{E} y \vec{D}

Para concluir con nuestro *tour* sobre la Electroestática en dieléctricos vamos a ver lo que se conoce como **condiciones de contorno de los campos \vec{E} y \vec{D}** . Esto no es más

que la cuantificación del siguiente hecho: que al atravesar la frontera entre dos medios ⁸ los campos pueden sufrir una **discontinuidad**.

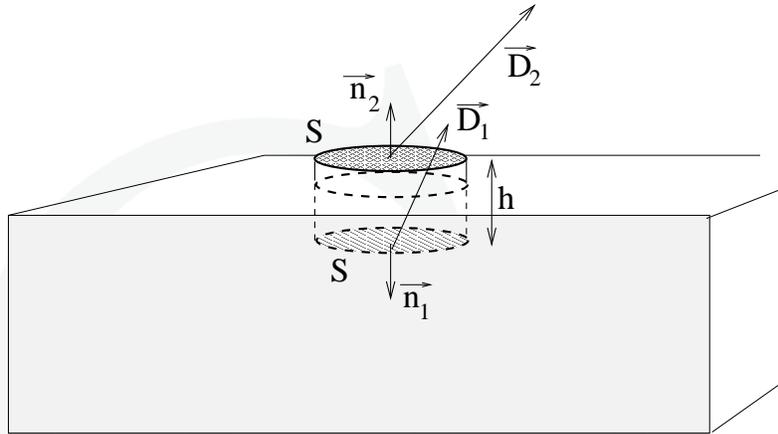


Figura 6.21: Condiciones de contorno del campo \vec{D} derivadas del Teorema de Gauss.

Veamos primero la condición de contorno que afecta al vector desplazamiento \vec{D} . Para ello, consideramos la frontera entre dos medios como se muestra en la Fig. 6.21, y aplicamos primero el Teorema de Gauss para el campo \vec{D} . Consideraremos un pequeño diferencial de volumen que contenga la interfase entre los dos medios (ver Fig. 6.21). Y como nos interesa sólo lo que pasa en la interfase, tomaremos luego el límite en el que la altura h va a cero. Fijaros ahora que, al ser pequeño el volumen, no tenemos que hacer la integral de superficie, bastando con calcular:

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S + \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S, \quad (6.69)$$

donde las cantidades con subíndice 2 corresponden al medio 2, las cantidades con subíndice 1 al medio 1 y σ es la *posible* densidad de carga superficial que exista en la interfase. La superficie lateral no contribuye ya que tomamos el límite en el que h va a cero, como comentamos antes. Ahora, fijaros que el producto $\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2$ no es sino la proyección del vector \vec{D} normal a la superficie en el medio 2, y lo mismo puede decirse el otro sumando,

⁸Estos dos medios pueden ser dos medios dieléctricos diferentes, o un dieléctrico y el vacío, o un dieléctrico y un conductor, o dos conductores, o un conductor y el vacío. Fijaros que el vacío no es diferente al caso de un dieléctrico, ya que hemos visto que es equivalente a un dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon_r = 1$.

pero sobre la superficie uno. Así que, podemos reescribir la Ec. 6.69 como:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (6.70)$$

Es decir: si existe alguna densidad superficial de carga en la interfase entre dos medios, la componente perpendicular a dicha interfase del vector desplazamiento eléctrico es discontinua, y da un salto igual al valor de dicha densidad superficial.

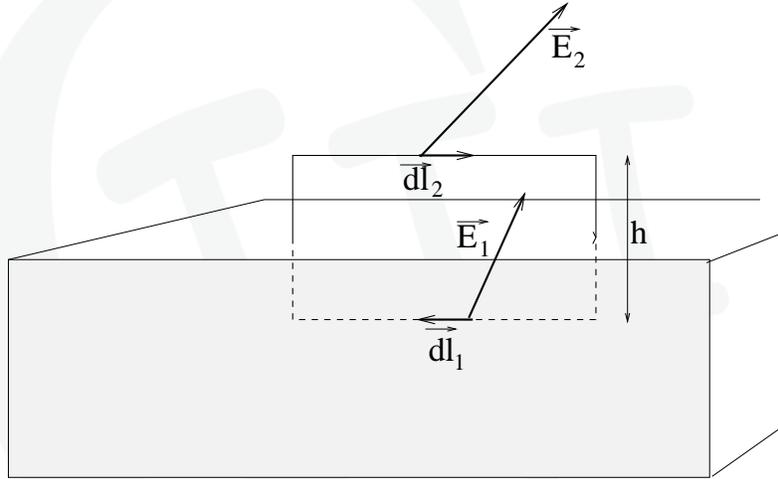


Figura 6.22: Condiciones de contorno del campo \vec{E} derivadas de su carácter conservativo.

La segunda condición de contorno que vamos a obtener afecta al campo eléctrico \vec{E} , y se deriva de su carácter conservativo: es decir, que su circulación a lo largo de cualquier camino cerrado ha de ser cero. Por lo tanto, escogemos un circuito como el de la Fig. 6.22 que englobe también a la interfase. De nuevo, al estar interesados en lo que pasa en la interfase solamente, tomaremos luego el límite en el que la altura h tiende a cero. Como también hemos cogido en este caso un circuito muy pequeño, podemos calcular la circulación sin necesidad de integrar. Basta con calcular,

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{dl}_2 + \vec{E}_1 \cdot (\vec{dl}_1) = \vec{E}_2 \cdot \vec{dl} - \vec{E}_1 \cdot (\vec{dl}) = 0, \quad (6.71)$$

donde hemos usado que $\vec{dl} = \vec{dl}_2 = -\vec{dl}_1$ y hemos seguido el mismo criterio de subíndices que antes. De nuevo, la contribución a la circulación de los trozos de circuitos perpendiculares a la interfase desaparece al tomar el límite h yendo a cero.

Analicemos el resultado. Para ello fijaros en que el producto de $\vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2$ da la proyección del vector \vec{E} **paralela a la interfase**. Por ello, de la Ec. 6.71 se sigue que:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (6.72)$$

Es decir: **al atravesar la interfase entre dos medios, la componente paralela a dicha interfase del vector campo eléctrico es continua.**

6.2.8. Dieléctricos y condensadores

Una de las aplicaciones inmediatas del hecho de que en un dieléctrico la polarización de las moléculas reduce el campo eléctrico total en su interior es su uso para **aumentar la capacidad de un condensador**. Es decir, para que sea capaz de almacenar una carga mayor (que cuando el dieléctrico no está) para la misma diferencia de potencial. Para entender esto, supongamos ahora el siguiente experimento: cogemos un condensador plano paralelo de capacidad C_0 , y lo conectamos a una pila que establece una diferencia de potencial entre las placas V_0 . El condensador se cargará con una carga Q_0 , dada por:

$$Q_0 = C_0 V_0. \quad (6.73)$$

Supogamos que ahora **desconectamos la pila**, dejando el condensador cargado, y que introducimos entonces una lámina de material dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo de constante dieléctrica ϵ_r en su interior. Claramente, esto hace que el campo en el interior se reduzca un factor ϵ_r y que, por tanto, que la nueva diferencia de potencial entre las placas sea:

$$V_1 = \frac{V_0}{\epsilon_r}. \quad (6.74)$$

Por lo tanto, la nueva capacidad del condensador, que contiene la misma carga que antes (por que está aislado) será:

$$C_1 = \frac{Q_0}{V_1} = \epsilon_r C_0 > C_0, \quad (6.75)$$

ha aumentado al introducir el dieléctrico.

Fijaros que el potencial entre los extremos de la pila ha tenido que bajar, al introducir el dieléctrico, por el hecho de que la carga que contiene tiene que conservarse. Sin embargo,

que si hubiéramos mantenido la pila conectada, de forma que el potencial tenga que ser V_0 , sería entonces la carga almacenada en el condensador la que aumentaría:

$$Q_1 = C_1 V_0 > Q_0. \quad (6.76)$$

• **EJEMPLO:** Sea un condensador de $C_0 = 10\mu F$, que se llena con un dieléctrico con $\epsilon_r = 4$. Después, se conecta a una batería de 20V. ¿Cuál será la carga del condensador?

$$C = \epsilon_r C_0 = 40\mu F; \quad Q = CV = 40\mu F \cdot 20V = 0,8mC. \quad (6.77)$$

• **EJEMPLO:** El mismo condensador se conecta a la batería primero y una vez cargado, se desconecta. Luego, se mete el dieléctrico con $\epsilon_r = 4$. ¿Cuál será la carga del condensador?

$$Q_0 = C_0 V_0 = 10\mu F \cdot 20V = 0,2mC; \quad (6.78)$$

y puesto que la carga no puede cambiar, tendremos que:

$$Q = Q_0. \quad (6.79)$$

¿Y la diferencia de potencial entre las placas?

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\epsilon_r C_0} = 5V. \quad (6.80)$$

Campo de ruptura de un dieléctrico

Como ya dijimos, se llama campo de ruptura de un dieléctrico al máximo campo eléctrico que puede soportar un dieléctrico antes de convertirse en conductor.

• **EJEMPLO:** Calcular el voltaje máximo que soporta el sistema de la Fig. 6.23, si el potencial de ruptura de los condensadores es de 400V.

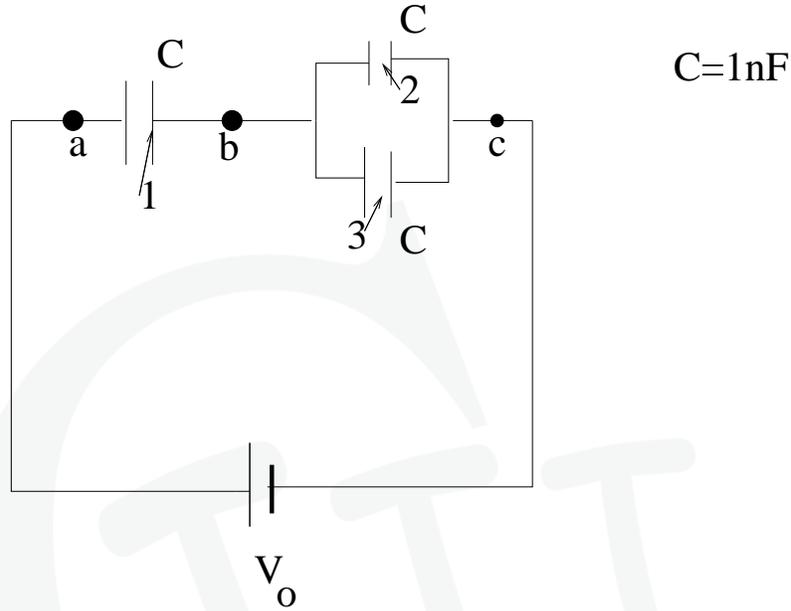


Figura 6.23: Esquema del ejemplo de campo de ruptura.

Calculando cuál es la carga máxima que soporta cada condensador tenemos que, en el caso del condensador 1:

$$V_{max}^{AB} = 400V \Rightarrow q_{1,max} = C V_{max}^{AB} = 0,4\mu C. \quad (6.81)$$

En el equivalente a los dos condensadores en paralelo, la carga máxima, $Q_2 + Q_3$ viene dada por:

$$V_{max}^{BC} = 400V \Rightarrow q_{1,max} = C_{23} V_{max}^{AB} = (C_2 + C_3) V_{max}^{AB} = 0,8\mu C. \quad (6.82)$$

Puesto que el condensador 1 está en serie con el equivalente 2 + 3, ambos **tienen necesariamente** que contener la misma carga. Por lo tanto, la carga máxima en el sistema es la menor de las dos anteriores, $q_{max} = q_{1,max} = 0,4\mu C$. Y por lo tanto, suponiendo que esta es la carga almacenada, tendremos que la diferencia máxima de potencial V_0 a la que se puede someter al sistema será:

$$V_0 = V_{AB} + V_{BC} = \frac{q_{max}}{C_1} + \frac{q_{max}}{C_2 + C_3} = 400V + 200V = 600V. \quad (6.83)$$

Resolución de problemas de condensadores + dieléctricos

Nos limitaremos a dar dos ejemplos que ilustran uno de los muchos métodos de solución posibles en el caso de que el dieléctrico no rellene **completamente** el espacio existente entre las placas del condensador. EL método se basa en sustituir el sistema condensador+dieléctrico por una asociación de condensadores equivalente, y resolver utilizando la teoría de condensadores estándar.

• **EJEMPLO:** Calcular la cantidad de energía almacenada en los dos sistemas de la Fig. 6.24, suponiendo que los parámetros de la misma tienen valores dados por $V = 100\text{V}$, $a = 0,1\text{m}$, $b = 0,2\text{m}$, $d = 0,01\text{m}$ y $\epsilon_r = 5$.

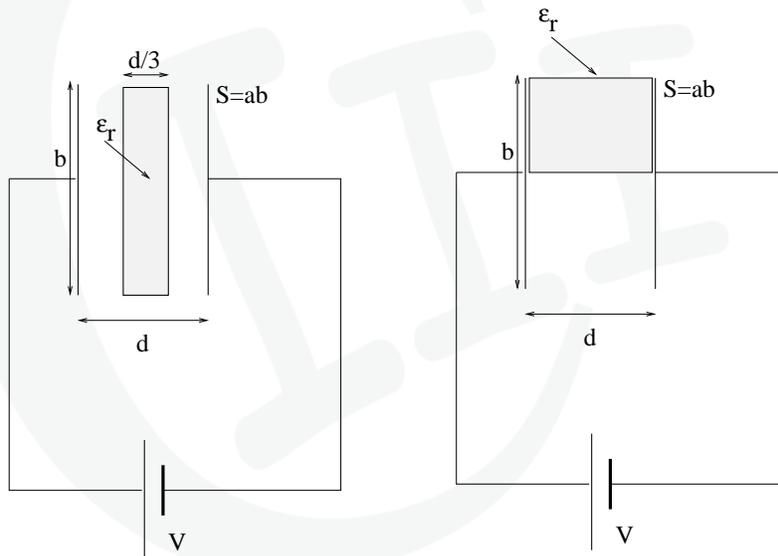


Figura 6.24: Esquema del ejemplo de condensador+dieléctrico.

■ **Sistema de la izquierda:**

Basta con considerar el sistema equivalente mostrado en la parte de la izquierda de la Fig. 6.25. Una vez hecho, la capacidad equivalente es el equivalente a tres

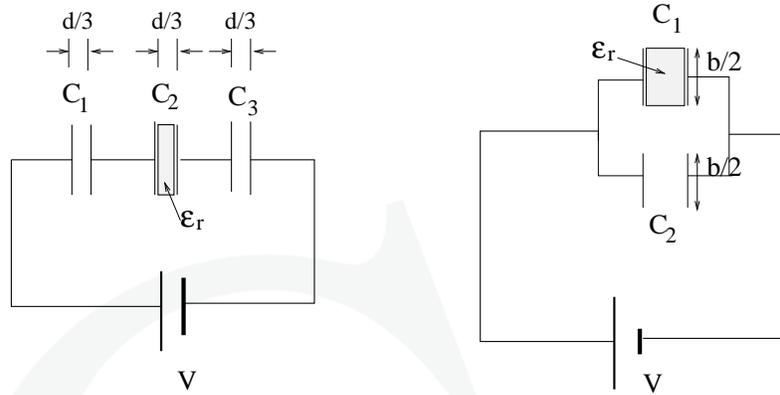


Figura 6.25: Asociaciones equivalentes al problema del ejemplo.

condensadores unidos **en serie**, con capacidades individuales dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\epsilon_0 ab}{d/3} \\
 C_2 &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{d/3} \\
 C_3 &= \frac{\epsilon_0 ab}{d/3}
 \end{aligned}
 \tag{6.84}$$

donde se ha usado que la capacidad de un condensador plano-paralelo es $C = \epsilon_0 S/d$ (con S el área de la placa y d la distancia entre las mismas), así como las nuevas dimensiones de los condensadores de la asociación. Por lo tanto,

$$C_{eq}^{-1} = \frac{d}{3\epsilon_0 ab} + \frac{d}{15\epsilon_0 ab} + \frac{d}{3\epsilon_0 ab} = \frac{11d}{15\epsilon_0 ab} \Rightarrow C_{eq} = \frac{15}{11} \left(\frac{\epsilon_0 a b}{d} \right).
 \tag{6.85}$$

Por tanto, la energía total almacenada sería:

$$W^{elect} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{15}{22} \left(\frac{\epsilon_0 a b}{d} \right) V^2.
 \tag{6.86}$$

■ Sistema de la derecha:

Basta con considerar el sistema equivalente mostrado en la parte de la derecha de la Fig. 8. Una vez hecho, la capacidad equivalente es el equivalente a dos condensadores unidos **en paralelo**, con capacidades individuales dadas por:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{2d} \quad (6.87)$$
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 ab}{2d}$$

donde se ha vuelto a usar que la capacidad de un condensador plano-paralelo es $C = \epsilon_0 S/d$, teniendo en cuenta las nuevas dimensiones de los condensadores que forman la asociación. Por lo tanto,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{2d} + \frac{\epsilon_0 ab}{2d} \Rightarrow C_{eq} = (1 + \epsilon_r) \frac{\epsilon_0 ab}{2d}. \quad (6.88)$$

Por tanto, la energía total almacenada sería:

$$W^{elect} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1 + \epsilon_r}{4} \left(\frac{\epsilon_0 ab}{d} \right) V^2. \quad (6.89)$$

Capítulo 7

APENDICE A: INTRODUCCION AL CALCULO VECTORIAL

7.1. Magnitudes vectoriales y escalares. Campos.

Las magnitudes físicas que pueden expresarse (en las correspondientes unidades) mediante un número real se llaman **escalares**; aquellas que necesitan ser expresadas mediante un módulo (número real), dirección y sentido, se llaman **vectoriales**. Por ejemplo, la temperatura (T), la masa (m) o la energía (E) son magnitudes escalares; sin embargo, la velocidad (\vec{v}), la aceleración (\vec{a}) o la fuerza (\vec{F}) son magnitudes vectoriales.

Un **campo** es una función que determina en cada punto del espacio el valor de una magnitud física. Si dicha magnitud es escalar, el campo se dice **escalar**; si es vectorial, tendremos un **campo vectorial**. Existen dos conceptos estrechamente relacionados a cada uno de estos campos. A los campos escalares se les asocian **superficies equipotenciales o de nivel**.

- **Superficie de nivel o equipotencial**

Se llama superficie equipotencial al conjunto de todos los puntos en los que el campo escalar tiene el mismo valor. En dos dimensiones, serán curvas, y en tres dimensiones, superficies.

Ejemplo: Sea la función escalar en dos dimensiones:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (7.1)$$

Las superficies de nivel vienen definidas por el conjunto de puntos (x, y) que verifican:

$$x^2 + y^2 = C \quad (7.2)$$

para algun valor de $C > 0$. Fijarse que cada superficie de nivel corresponde a una circunferencia de radio \sqrt{C} , como se muestra en la figura.

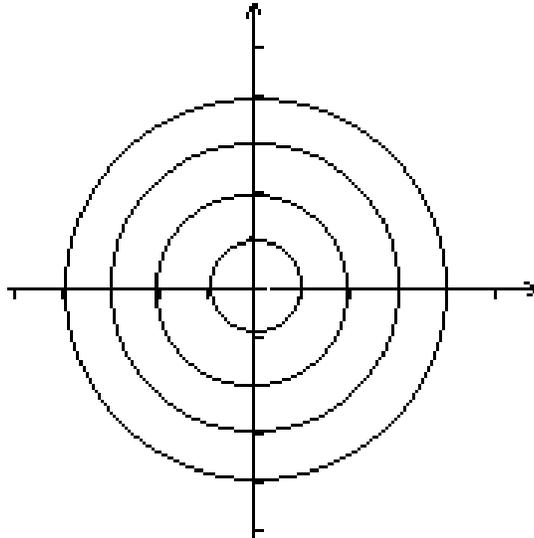


Figura 7.1: Superficies equipotenciales asociadas a un campo escalar.

- **Línea de campo o de fuerza**

En los campos vectoriales se utiliza lo que se llama **línea de campo o de fuerza**. Estas líneas tienen la siguiente propiedad: el vector asignado por el campo vectorial a cada punto es **tangente** a la línea de fuerza que pase por ese punto:

7.2. Representación de vectores

Para representar un vector, es necesario especificar su **módulo**, su **dirección** y su **sentido**. Por módulo se entiende la longitud del vector; por dirección, la recta sobre la que se apoya y por sentido, hacia donde apunta sobre dicha recta. Los vectores se refieren usualmente a un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional. Dado un sistema de coordenadas cartesianas orientado a derechas (es decir, se verifica que el sentido de avance del sacacorchos al girar desde el eje X al eje Y es la dirección positiva del eje Z), tal como el de la Fig. 7.3, y fijada una unidad de medida, a cada eje se le puede asignar un **vector unitario** (es decir, de módulo unidad). Estos vectores, correspondientes a cada

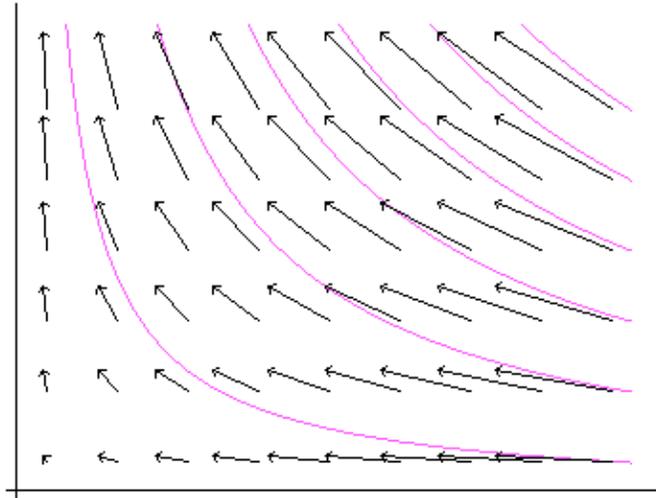


Figura 7.2: Líneas de campo asociadas a un campo vectorial.

eje de coordenadas se designan por:

$$\vec{i} \equiv (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad y \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (7.3)$$

Un vector arbitrario, \vec{A} , vendrá caracterizado, en dicho sistema de coordenadas, por tres números (A_x, A_y, A_z) , correspondientes a las longitudes de las proyecciones de \vec{A} sobre cada uno de los vectores unitarios, de forma que podemos escribir:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (7.4)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} = (0, 1, 0) \\ \vec{A} &= 3\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = (3, 1, 2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

• **Módulo de un vector**

El **módulo ó longitud** del vector puede obtenerse aplicando el Teorema de Pitágoras, de forma que:

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (7.6)$$

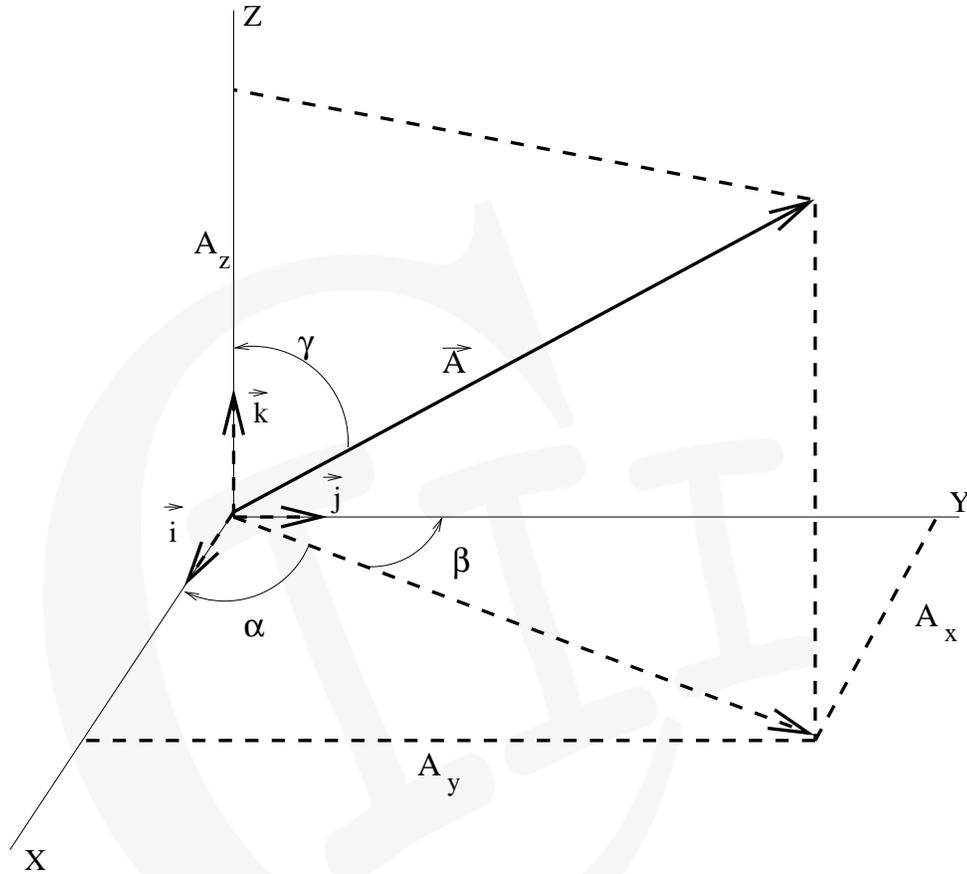


Figura 7.3: Componentes de un vector.

Ejemplo: En el caso del vector \vec{i} , $|\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, como corresponde a un vector unitario.

• **Cosenos directores**

Se llaman **cosenos directores** del vector \vec{A} a los cosenos de los ángulos que forma con cada uno de los ejes coordenados:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|A|} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|A|} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|A|} \quad (7.7)$$

Ejemplo: En el caso del vector unitario $\vec{i} = (1, 0, 0)$:

$$\cos\alpha = \frac{i_x}{|i|} = 1; \quad \cos\beta = \frac{i_y}{|i|} = 0; \quad \cos\gamma = \frac{i_z}{|i|} = 0 \quad (7.8)$$

como era de esperar, ya que \vec{i} forma un ángulo de 90 grados tanto con el eje y como con el eje z y es paralelo al eje x .

7.3. Producto de un vector por un escalar

Sea λ un escalar y \vec{v} un vector expresado por sus componentes. Entonces:

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) \quad (7.9)$$

donde $\lambda\vec{v}$ tiene la misma dirección que \vec{v} ; el mismo sentido si $\lambda > 0$ o sentido contrario si $\lambda < 0$; finalmente, el módulo se alarga si $|\lambda| > 1$ y se acorta si $|\lambda| < 1$

7.4. Suma de vectores

•Regla del paralelogramo

Los vectores pueden sumarse o restarse gráficamente usando la regla del paralelogramo, como se muestra en la Fig. 7.5.

•Suma por componentes

Si tenemos dos vectores \vec{A} y \vec{B} expresados en coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{B} &= B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \end{aligned} \quad (7.10)$$

el vector suma será:

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \quad (7.11)$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = (3, -5, 6)$ y $\vec{B} = (2, 3, -1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (3, -5, 6) + (2, 3, -1) = (5, -2, 5) \\ \vec{A} - \vec{B} &= (3, -5, 6) - (2, 3, -1) = (1, -8, 7) \end{aligned} \quad (7.12)$$

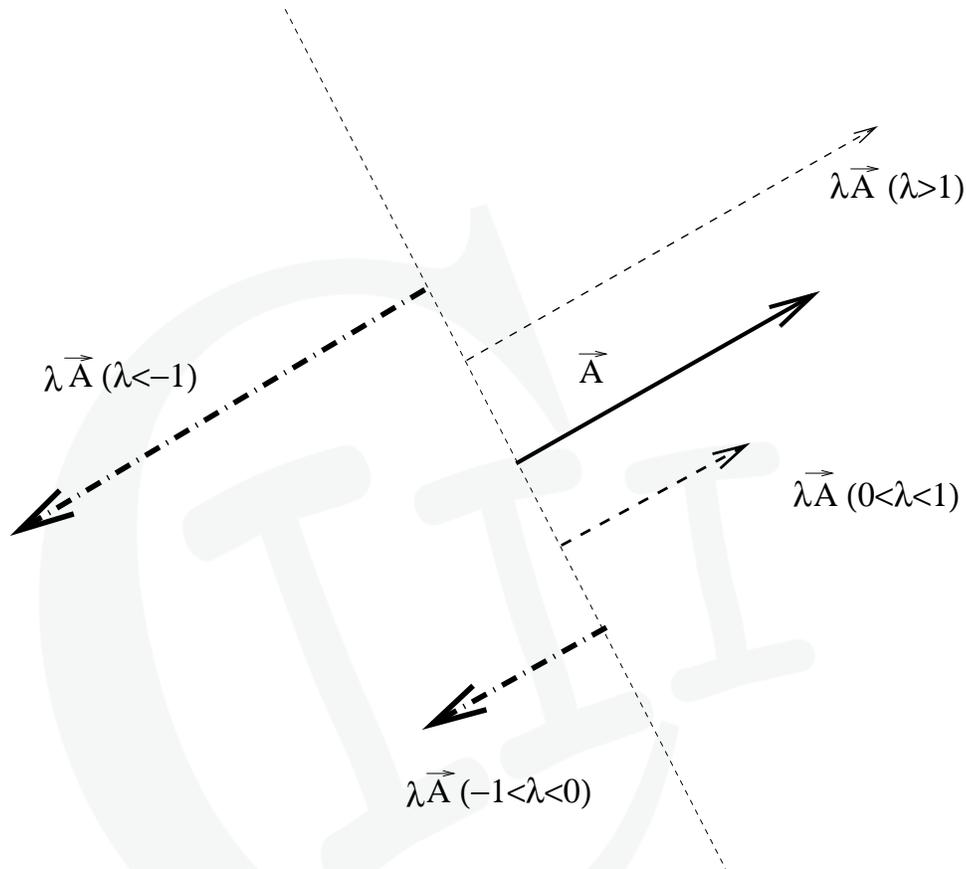


Figura 7.4: Producto de un vector por un escalar.

7.5. Producto escalar

Dados los vectores \vec{A} y \vec{B} , se define su producto escalar como el escalar que resulta de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta \quad (7.13)$$

•Propiedades

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ si $\vec{A} \perp \vec{B}$

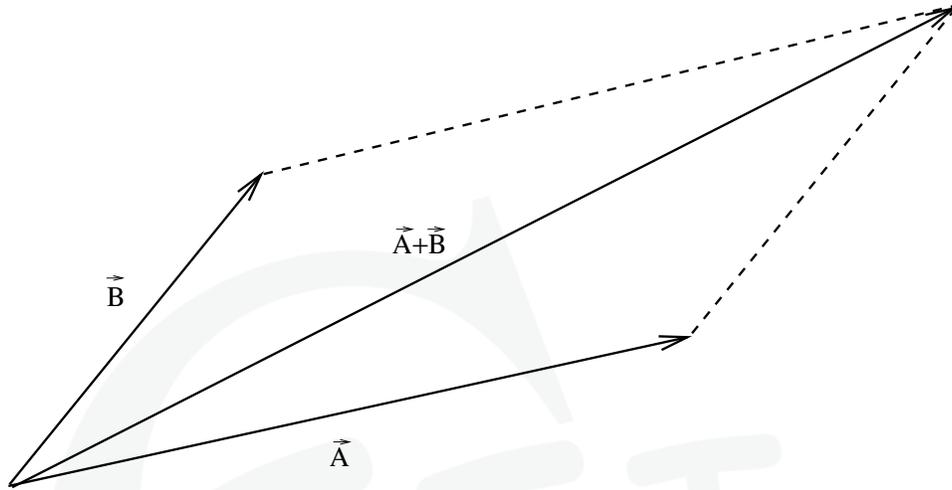


Figura 7.5: Regla del paralelogramo.

- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- $(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \lambda(\vec{A} \cdot \vec{B})$, λ escalar
- Ángulo entre dos vectores: $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$

• **Expresión en coordenadas:**

Puesto que los vectores \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} son unitarios y perpendiculares entre sí, es inmediato que:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Por lo tanto, si tenemos dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \\ \vec{B} &= B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \end{aligned} \quad (7.15)$$

su producto escalar será:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (7.16)$$

Ejemplo:

Si $\vec{A} = (0, 2, 3)$ y $\vec{B} = (1, 0, 2)$, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 \quad (7.17)$$

•Módulo de un vector:

Es posible obtener el módulo de un vector calculando su producto escalar consigo mismo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (7.18)$$

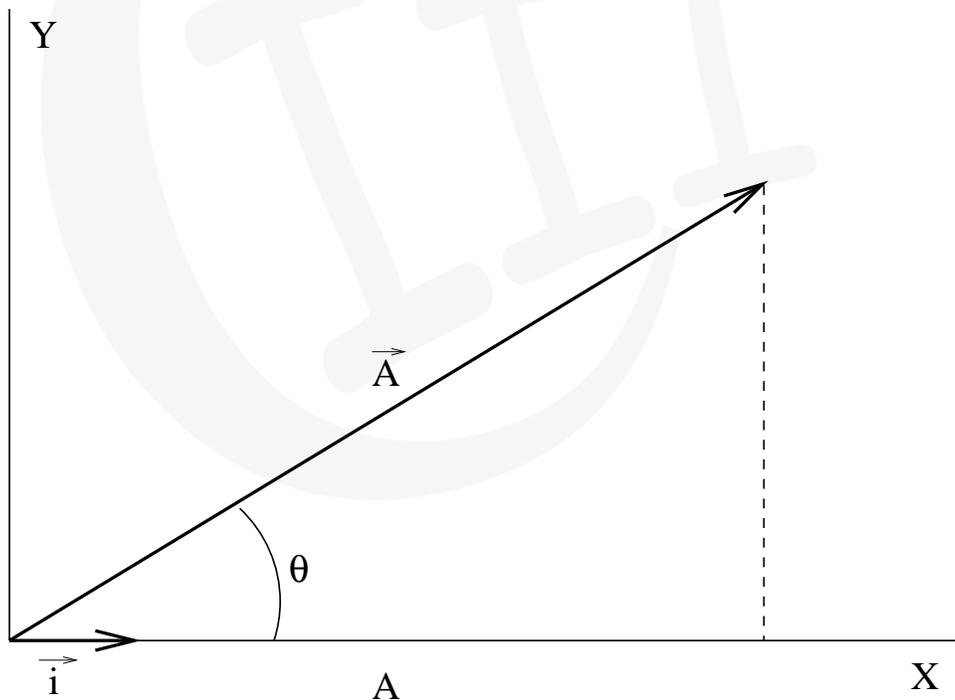
•Interpretación del producto escalar: proyección sobre una dirección

Figura 7.6: Proyección de un vector.

Si escogemos el vector \vec{B} en la definición como uno de los vectores \vec{i} , \vec{j} ó \vec{k} , tendremos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = |\vec{A}| |\vec{i}| \cos\theta = A \cos\theta \quad (7.19)$$

donde θ es el ángulo que forma \vec{A} con el eje x . Por lo tanto, el producto escalar con \vec{i} nos da la **proyección** sobre el eje x del vector A . En general para hallar la proyección de un vector sobre una dirección dada, basta **multiplicarlo escalarmente por un unitario \vec{u} en dicha dirección.**

• **Interpretación del producto escalar: coordenadas en un sistema de ejes**

Si expresamos el producto anterior en coordenadas:

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot \vec{i} = A_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) = A_x \quad (7.20)$$

de forma que para hallar las coordenadas de un vector en un sistema de ejes arbitrario, basta con calcular el producto escalar de dicho vector **con cada uno de los vectores unitarios que definen el sistema de ejes.**

7.6. Producto vectorial

Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , se define su producto vectorial, representado como $\vec{A} \times \vec{B}$, como el vector que tiene como módulo el producto de ambos módulos por el seno del ángulo que forman, como dirección la de la normal al plano determinado por ambos vectores y como sentido el de avance del sacacorchos al girar desde \vec{A} a \vec{B} barriendo el ángulo formado por ambos.

• **Propiedades:**

- $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$
- $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ si $\vec{A} \parallel \vec{B}$

• **Expresión en coordenadas:**

Es fácil comprobar que:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (7.21)$$

puesto que un vector siempre es paralelo a sí mismo, y que

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (7.22)$$

Expresando \vec{A} y \vec{B} en coordenadas respecto a \vec{i}, \vec{j} y \vec{k} , y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, el producto vectorial se expresa:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}\end{aligned}\quad (7.23)$$

que puede escribirse formalmente a través del siguiente determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\quad (7.24)$$

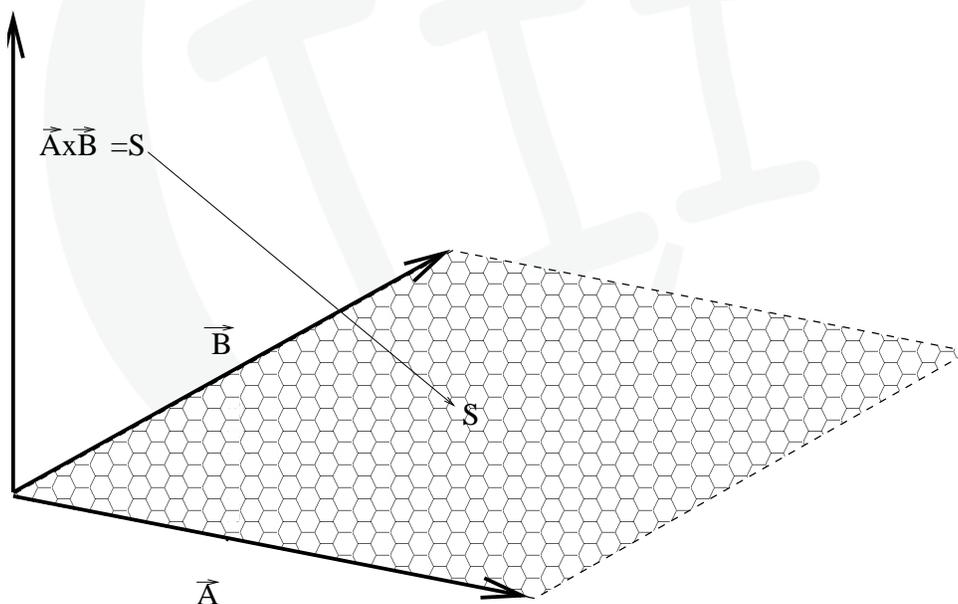


Figura 7.7: Producto vectorial de dos vectores.

• Interpretación: superficie del paralelogramo

Es fácil comprobar que el módulo del producto vectorial de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es igual al área del paralelogramo determinado por los mismos, S .

Es por ello que **cualquier superficie plana** puede representarse por un vector normal a la misma y con módulo igual al área de dicha superficie. El sentido de este vector superficie se asigna tras escoger un sentido de recorrido o de giro para el contorno que

rodea a la superficie; precisamente el sentido del vector superficie es el de avance del sacacorchos al girar según el sentido asignado para recorrer el contorno.

Si la superficie no es plana, ya no tiene sentido la anterior definición, salvo localmente; es decir, en un punto cualquiera de una superficie no plana se puede considerar una superficie elemental y definir el vector elemento de superficie en dicho punto, \vec{ds} . Cuando la superficie es cerrada, el vector \vec{ds} apunta hacia afuera de la superficie.

7.7. Producto Mixto

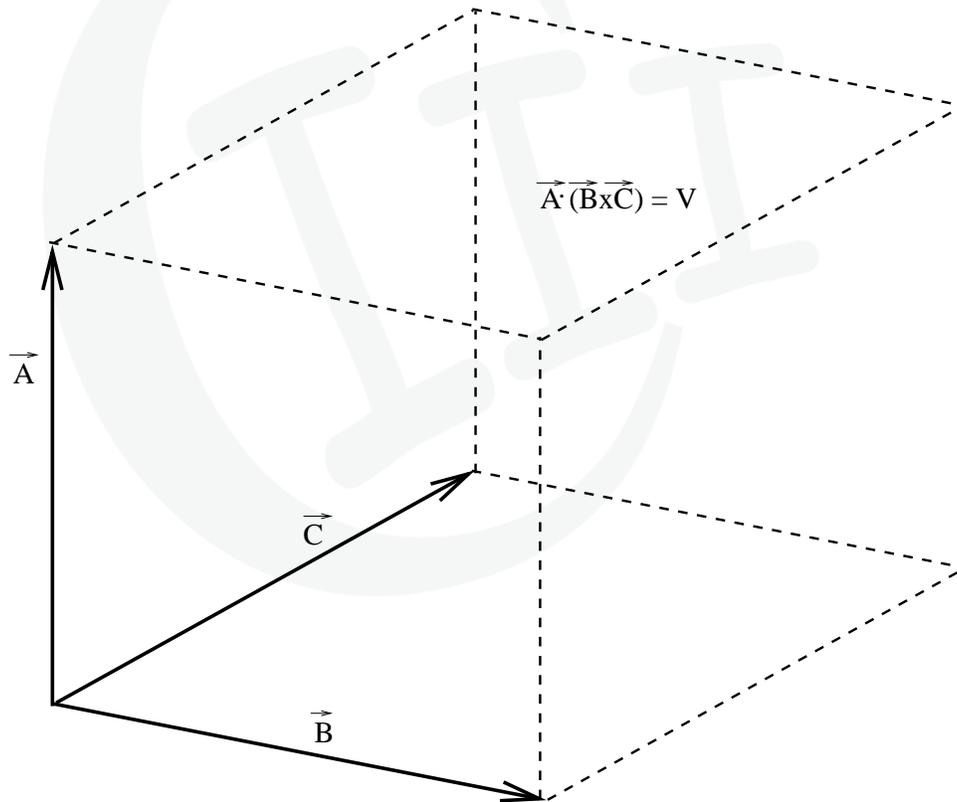


Figura 7.8: Producto mixto de tres vectores.

Dados tres vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} expresados en coordenadas, se define su **producto**

mixto como:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (7.25)$$

Nótese que el producto mixto es nulo si los tres vectores son coplanarios.

• **Interpretación: volumen**

Es igual al volumen del paralelepípedo formado por \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

• **Doble Producto Vectorial**

Dados tres vectores \vec{v} , \vec{w} y \vec{u} expresados en coordenadas, se define su **doble producto vectorial** como:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (7.26)$$

7.8. Derivada de un vector

Dado un vector $\vec{v}(t)$ función de un parámetro t se define su derivada como:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (7.27)$$

• **Propiedades**

- $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt} (\lambda(t)\vec{a}(t)) = \lambda(t)\frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \vec{a}(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}$
- Expresión en coordenadas: $\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}$
- Derivada del producto escalar: $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$
- Derivada del producto vectorial: $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$

7.9. Integral de un vector

La integral de un vector \vec{v} es igual a un nuevo vector \vec{w} que tiene por componentes la integral de las componentes de \vec{v} :

$$\vec{w} = \int \vec{v}(t) dt \quad (7.28)$$

donde las componentes de \vec{w} son:

$$w_x = \int v_x(t) dt; \quad w_y = \int v_y(t) dt; \quad w_z = \int v_z(t) dt \quad (7.29)$$

•Propiedades

- $\int (\vec{v} \pm \vec{w}) dt = \int \vec{v} dt \pm \int \vec{w} dt$
- $\int \lambda \vec{v} dt = \lambda \int \vec{v} dt$, con λ constante

Capítulo 8

APENDICE B: INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL

8.1. Definición de derivada. Sentido físico

El cálculo diferencial se introduce en la Física por la necesidad de cuantificar el cambio de las cosas. La velocidad de un vehículo no permanece constante en el tiempo, ni su posición tampoco. La temperatura de un termómetro cambia. La presión en un neumático también. Además, no es solo importante el hecho del cambio en sí, sino también si este cambio es rápido o lento. Es decir, lo que nos importa cuantificar es el cambio en el tiempo de una determinada magnitud.

• Ritmo de cambio promedio de una función

Como primera aproximación a nuestro problema, podemos utilizar lo que se llama **ritmo de cambio promedio**. Supongamos que queremos cuantificar cuanto ha cambiado la temperatura de una habitación entre las 08:00 y las 20:00. Sabiendo que la temperatura a las 08:00 eran 15 grados, y 17 grados a las 20:00, definimos el cambio de temperatura promedio mediante:

$$R \equiv \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t = 20 : 00) - T(t = 08 : 00)}{20 : 00 - 08 : 00} = \frac{1}{6} \text{ grados/hora} \quad (8.1)$$

Sin embargo, es importante notar que esta definición sólo depende de los valores de la temperatura a las 08:00 y a las 20:00, no de la historia intermedia. Es decir, podría haberse roto el aire acondicionado durante parte del día, de modo que a las 14:00 la temperatura podría haber subido hasta 42 grados, o la temperatura podría haberse mantenido constante entorno a 16 grados todo el día. Pero el ritmo promedio no nos da información sobre eso, ya que solo depende de los valores inicial y final!

• **Concepto físico de derivada de una función**

¿Como podemos conseguir mayor información sobre lo historia temporal del proceso de cambio? Pues tomando los intervalos de tiempo sobre los que calculamos el ritmo promedio mas pequeños. Asi, si tomamos cuatro tiempos entre las 08:00 y las 20:00 en lugar de sólo el inicial y el final:

$$t_1 = 08 : 00, \quad t_2 = 12 : 00, \quad t_3 = 16 : 00 \quad \text{y} \quad t_4 = 20 : 00 \quad (8.2)$$

podremos calcular el ritmo de cambio promedio entre cada par de instantes consecutivos:

$$R_{i,i+1} \equiv \frac{\Delta T_{i,i+1}}{\Delta t_{i,i+1}} = \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{o} \quad 4 \quad (8.3)$$

De esta manera si algún $R_{i,i+1}$ es mucho mayor que los demas para algun i , sabremos que entre t_{i+1} y t_i la función ha cambiado mucho más deprisa. Tomando todavía subintervalos más pequeños (o lo que es lo mismo, más tiempos intermedios) iremos consiguiendo información cada vez más detallada sobre el cambio de la función.

La **derivada** de la función $T(t)$ se obtiene llevando este proceso de subdivisión hasta el límite. El intervalo de tiempo completo se divide en subintervalos de longitud dt . Y se define la derivada de la función T en el tiempo t mediante:

$$[T(t)]' \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{T(t + dt) - T(t)}{dt} \quad (8.4)$$

Por lo tanto, físicamente, la derivada de una función en un punto nos dice **el ritmo de cambio instantaneo de la función en dicho punto**. O lo que es lo mismo, el ritmo promedio de cambio entre el instante t y el instante $t + dt$, cuando dt se hace infinitamente pequeño.

8.2. Interpretación matemática de la derivada

Como hemos visto en la sección anterior, la derivada de una función $f(x)$ se define por:

$$[f(x)]' \equiv \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \quad (8.5)$$

Olvidando por un momento el límite que aparece en la ecuación anterior, y comparando con la Fig. 8.1, el cociente que aparece en la definición de derivada corresponde a la tangente del ángulo que forma con el eje X la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x + dx, f(x + dx))$.

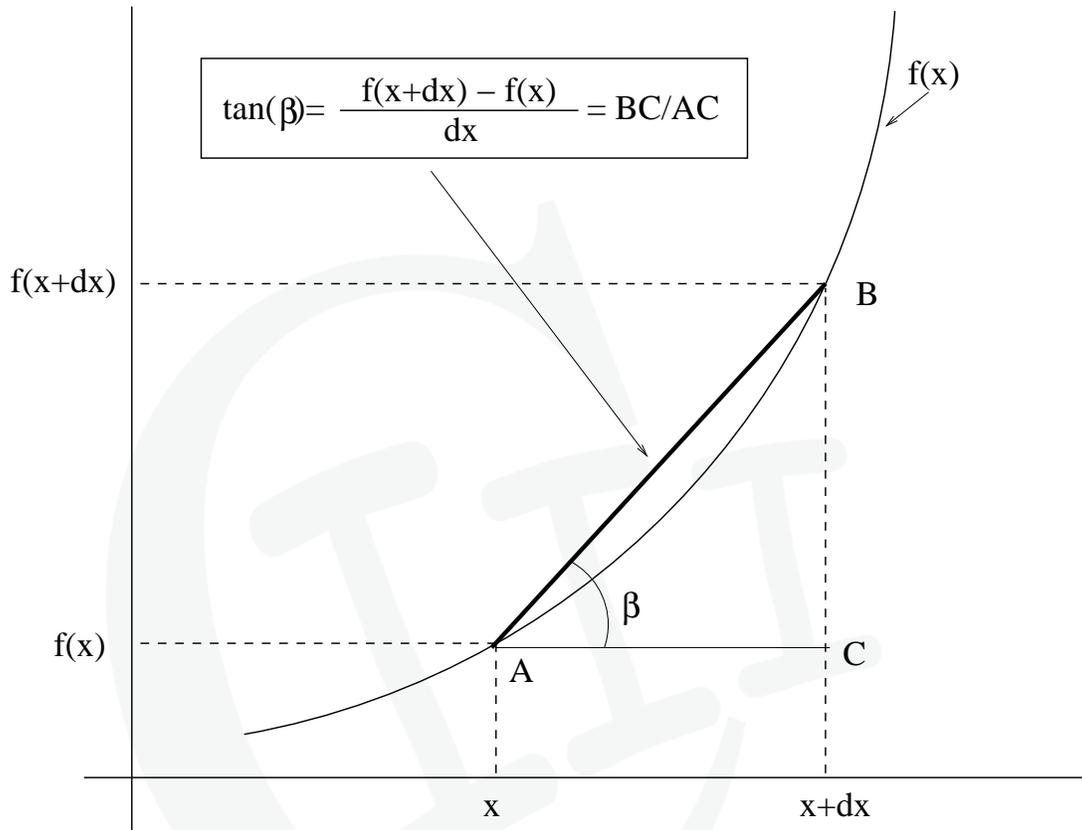


Figura 8.1: Concepto de derivada.

Para ello basta recordar que la tangente del ángulo β perteneciente al triángulo rectángulo de vértices \mathbf{ABC} se define como el cociente entre el cateto opuesto, \mathbf{BC} , y el cateto contiguo, \mathbf{AC} , al ángulo β .

Cuando dicho límite se toma, haciendo que $dx \rightarrow 0$, lo que hacemos es acercar el punto $(x + dx, f(x + dx))$ hacia $(x, f(x))$, de manera que la recta que los une tiene a la tangente a la curva en $(x, f(x))$ cuando ambos colapsan. Por eso, matemáticamente, se entiende la derivada en un punto como la tangente del ángulo que la **recta tangente a la curva en ese punto** forma con la horizontal.

8.3. Derivadas más comunes

A continuación se da una lista de las derivadas más comunes (notar que c corresponde a una constante arbitraria y n a un número racional). Las cinco últimas fórmulas corresponden a reglas para derivar funciones computestas: **suma o resta**, **producto o división** y la **regla de la cadena**.

$$\begin{aligned}
 (c)' &= 0 \\
 (x)' &= 1 \\
 (x^n)' &= nx^{n-1} \\
 (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\
 (e^x)' &= e^x \\
 (\text{sen}(x))' &= \cos(x) \\
 (\cos(x))' &= -\text{sen}(x) \\
 (\tan(x))' &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
 [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x) \\
 [cf(x)]' &= cf'(x) \\
 [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
 [f(g(x))]' &= g'(x)\frac{df}{dg}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

• **Ejemplo 1:** Derivese la expresión:

$$\begin{aligned}
 \left[\ln\left(\frac{1+x}{2-x^2}\right)\right]' &= \left(\frac{1+x}{2-x^2}\right)' \bigg/ \frac{1+x}{2-x^2} \quad (\text{R.cadena}) = \\
 &= \left(\frac{(2-x^2) - (-2x)(1+x)}{(2-x^2)^2}\right) \bigg/ \left(\frac{1+x}{2-x^2}\right) \quad (\text{R.cociente}) = \\
 &= \frac{(2+x^2+2x)}{(1+x)(2-x^2)}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

- **Ejemplo 2:** Derivese la expresión:

$$\begin{aligned} \left[\sin \left(\sqrt{2+x^2} \right) \right]' &= \left[\sqrt{2+x^2} \right]' \cos \left(\sqrt{2+x^2} \right) \quad (\text{R.cadena}) = \\ &= \frac{2x}{2(\sqrt{2+x^2})} \cos \left(\sqrt{2+x^2} \right) = \\ &= \frac{x}{(\sqrt{2+x^2})} \cos \left(\sqrt{2+x^2} \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Capítulo 9

APENDICE C: INTRODUCCION AL CALCULO INTEGRAL

9.1. Definición de integral

La integral de una función $f(x)$ se denota de la siguiente manera:

$$F(x) = \int^x f(s)ds \quad (9.1)$$

A la función $F(x)$ se le llama la **primitiva** de $f(x)$, y se define como aquella que verifica la propiedad siguiente:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (9.2)$$

Por lo tanto, la integral es la inversa de la derivada, ya que si cojo una función arbitraria $f(x)$, la derivo y luego la integro vuelvo a obtener la misma función $f(x)$ (salvo una constante aditiva):

$$f(x) \xrightarrow{d/dx} f'(x) = \frac{df}{dx} \xrightarrow{\int^x dx} F(x) = \int^x f'(s)ds = f(x) + C \quad (9.3)$$

La constante C aparece debido a que la función primitiva F no es única. Si a cualquier función $F(x)$ que verifica que su derivada es igual a $f(x)$ le sumamos una constante, tendremos otra primitiva diferente, $G(x) = F(x) + C$ que también verifica que su derivada es $f(x)$.

9.2. Propiedades de las integrales

La integral tiene muchas propiedades que se derivan estrictamente de su definición. Las más importantes son:

- **Aditividad:**

$$\int^x [f(x) + g(x)] dx = \int^x f(x)dx + \int^x g(x)dx \quad (9.4)$$

- **Multiplicación por un escalar:**

$$\int^x [\lambda f(x)] dx = \lambda \int^x f(x)dx \quad (9.5)$$

- **Ejercicio:** Demostrar ambas propiedades (ayuda: usar que las primitivas han de verificar la propiedad enunciada por la Ecuación 39).

9.3. Integrales más comunes

Mientras que derivar cualquier función es básicamente trivial, hallar la primitiva de una función dada no lo es. Sin embargo, usando el hecho de que la integral es la inversa de la derivada, es posible calcular muchas integrales. En la lista siguiente, se enumeran las integrales **inmediatas** más comunes:

$$\begin{aligned}
\int^x c dx &= cx + C \\
\int^x x dx &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
\int^x x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\
\int^x \frac{1}{x} dx &= \ln(x) + C \\
\int^x e^x dx &= e^x + C \\
\int^x \text{sen}(x) dx &= -\cos(x) + C \\
\int^x \cos(x) dx &= \text{sen}(x) + C \\
\int^x f'(x) [f(x)]^n dx &= \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \\
\int^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln[f(x)] + C \\
\int^x f'(x) e^{f(x)} dx &= e^{f(x)} + C \\
\int^x f'(x) \text{sen}(f(x)) dx &= -\cos(f(x)) + C \\
\int^x f'(x) \cos(f(x)) dx &= \text{sen}(f(x)) + C
\end{aligned} \tag{9.6}$$

En cualquier caso, muchas integrales no son evidentes. Y es necesario recurrir a otros métodos para resolverlas. Por ejemplo, realizar cambios de variables.

• **Ejemplo 1:** Calcúlese la integral:

$$\int^x \frac{2x}{4-3x^2} dx = \frac{-1}{3} \int^x \frac{(-6x)}{4-3x^2} = -\frac{\ln(4-3x^2)}{3} + C \tag{9.7}$$

Notese que hemos multiplicado la integral por $-1/3$ a fin de tener la derivada del denominador en el numerador, y poder así aplicar la novena fórmula que aparece en la ecuación anterior.

9.4. INTEGRALES DEFINIDAS. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA INTEGRAL

Para interpretar físicamente lo que es una integral es necesario recuperar la Ec. 39, que afirma que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ si y solo si:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (9.8)$$

Si desarrollamos ahora el lado de la derecha haciendo uso de la definición de derivada dada en la Ecuación 34:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} \quad (9.9)$$

tenemos que, olvidando de nuevo el límite que aparece en la ecuación:

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)dx \quad (9.10)$$

Si dx es pequeño, entonces $f(x)dx$ es aproximadamente el área que queda encerrada entre la función y el eje de las X, bajo el intervalo que va de x a $x + dx$.

Supongamos ahora que escogemos un punto inicial $x = a$ (ver Fig. 9.1). El área encerrada entre la curva y el eje X, sobre el intervalo que va de a a $a + dx$ vendrá dada por $F(a + dx) - F(a) = f(a)dx$. Igualmente, el área encerrada entre curva y eje X, bajo el intervalo que va desde $a + dx$ hasta $a + 2dx$ será $F(a + 2dx) - F(a + dx) = f(a + dx)dx$. Y sumando ambas, puedo decir que el área encerrada entre curva y eje X, bajo el intervalo que va desde a hasta $a + 2dx$ será:

$$\begin{aligned} f(a)dx + f(a + dx)dx &= [F(a + dx) - F(a)] + [F(a + 2dx) - F(a + dx)] = \\ &= F(a + 2dx) - F(a) \end{aligned} \quad (9.11)$$

Por lo tanto, el área encerrada entre curva y eje X sobre un intervalo cualesquiera $[a, b]$ no es más que la diferencia $F(b) - F(a)$, como puede demostrarse sin más que iterando la fórmula anterior para tantos dx consecutivos como haga falta para llegar hasta el punto b .

A la diferencia $F(b) - F(a)$ se le llama **integral definida** de la función $f(x)$ entre los puntos a y b , y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (9.12)$$

y como hemos dicho, representa el área encerrada entre la curva $f(x)$ y el eje X, bajo el intervalo que va de a hasta b .

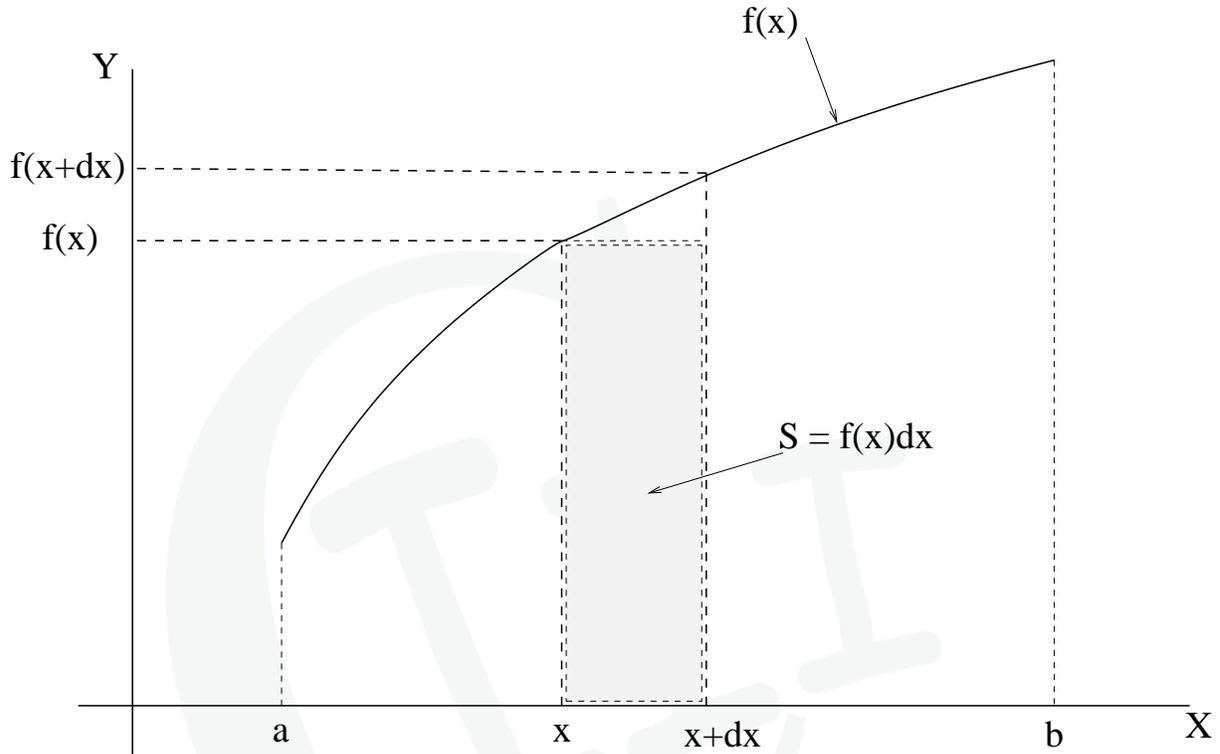


Figura 9.1: Concepto de integral.

9.5. Propiedades de las integrales definidas

Las propiedades más importantes derivan de las ya vistas:

- **Aditividad:**

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (9.13)$$

- **Multiplicación por un escalar:**

$$\int_a^b [\lambda f(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad (9.14)$$

a las que hay que añadir que:

- **Suma sobre intervalos de integración:**

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (9.15)$$

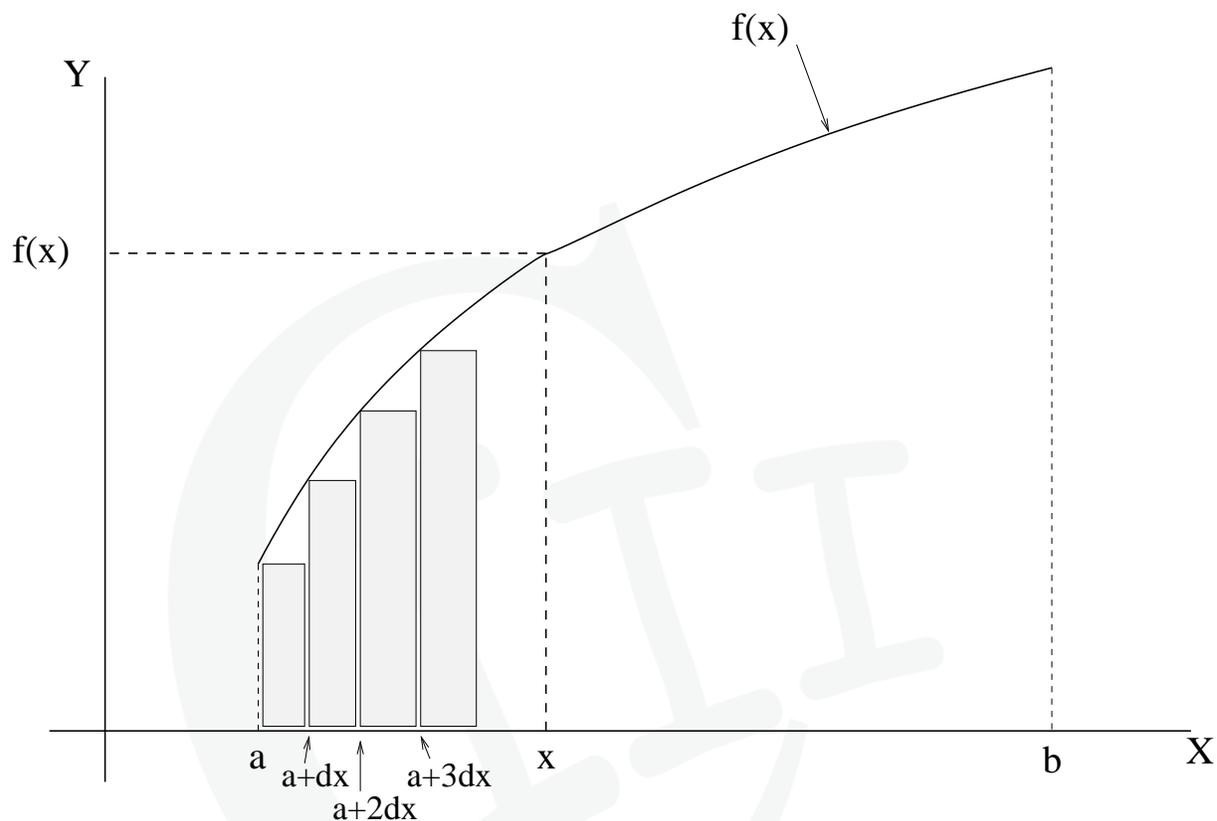


Figura 9.2: Concepto de integral definida.

la cual es evidente, ya que el área encerrada bajo el intervalo $[a, c]$ es necesariamente la suma de la encerrada bajo $[a, b]$ y la encerrada bajo $[b, c]$.

• **Inversión del intervalo de integración:**

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (9.16)$$

también evidente, ya que $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$. Finalmente, es interesante darse cuenta de que la indeterminación que existía antes respecto a la constante C que podía añadirse a la primitiva de $f(x)$ ya no existe. Puesto que las integrales definidas se obtienen como la diferencia del valor de $F(x)$ en dos puntos, si le añadimos una constante a $F(x)$, ésta desaparece al hacer dicha diferencia.