8.25 **Para transportar 10^4 kg de petróleo por día, se utiliza una tubería de 20 cm y estaciones de bombeo espaciadas igualmente a $2{,}4{\cdot}10^4$ m de longitud. El petróleo pasa a la presión atmosférica por cada estación y es lanzado con la mayor presión posible. La primera estación está colocada al principio de la tubería y ésta entrega el aceite a la presión atmosférica. ¿Cuál será la presión máxima permitida en la tubería?**

Datos: Densidad del petróleo: $\rho = 860$ kg/m³; coeficiente de viscosidad: $\eta = 1$ poise.

Apliquemos la fórmula de Poiseuille entre dos estaciones de bombeo:

$$G = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L} \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{8\eta LG}{\pi R^4}$$

pero

$$G = \frac{Q}{t} = \frac{10^6/860}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}346 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3/s}$$

Sustituyendo valores y teniendo en cuenta que $\eta = 1$ poise $= 0{,}1$ N·s/m², tendremos

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4 \cdot 1{,}346 \cdot 10^{-2}}{0{,}10^4\pi} = 8{,}23 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

como

$$1\ \mathrm{At} = 1{,}013 \cdot 10^6\ \mathrm{dinas/cm^2} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{8{,}23 \cdot 10^5}{1{,}013 \cdot 10^5}\ \mathrm{At} = 8{,}12\ \mathrm{At}$$

La tubería entrega el petróleo a la presión atmosférica, luego la presión máxima permitida en la tubería será:

$$p_1 = 8{,}12 + 1 = 9{,}12\ \mathrm{At}$$

8.26 **Un recipiente cilíndrico de radio $R = 3$ cm tiene en su pared lateral un tubo capilar horizontal de radio $r = 1$ mm y longitud $l = 3$ cm. El recipiente contiene aceite de viscosidad $\eta = 12$ g/cm·s. Calcular la velocidad v con que desciende el nivel del aceite en el recipiente en el instante en que la altura de este nivel sobre el tubo capilar es $h = 30$ cm. Densidad del aceite $\rho = 0{,}9$ g/cm³.**

El volumen de aceite que sale por el tubo capilar en un tiempo t, lo calculamos aplicando la fórmula de Poiseuille:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 l \eta} t$$

La diferencia de presiones en los extremos del tubo capilar es $\Delta p = \rho g h$. Si llamamos v_c a la velocidad con que pasa el aceite por el tubo capilar podemos expresar V de la siguiente manera

$$V = s v_c t = \pi r^2 v_c t$$

Igualando las dos expresiones que nos dan V

$$\frac{\pi r^4 \Delta p}{8 l \eta} t = \pi r^2 v_c t \Rightarrow v_c = \frac{r^2 \Delta p}{8 l \eta}$$

sustituyendo el valor de Δp

$$v_c = \frac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}$$

Si llamamos v a la velocidad con que desciende el nivel del aceite en el depósito, tendremos:

$$Sv = s v_c \Rightarrow \pi R^2 v = \pi r^2 v_c \Rightarrow v = v_c \frac{r^2}{R^2}$$

Por último

$$v = \frac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}\frac{r^2}{R^2} = \frac{r^4 \rho g h}{8 l \eta R^2}$$

Sustituyendo valores

$$v = \frac{10^{-4} \cdot 0{,}9 \cdot 980 \cdot 30}{8 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 9} = 1{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm/s}$$

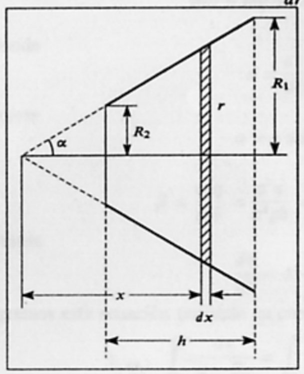
8.27 **Un eje vertical que tiene forma tramocónica en su extremo, de radios $R_1 = 2$ cm y $R_2 = 1{,}8$ cm y altura $h = 2{,}5$ cm, gira en un cojinete que ajusta perfectamente. Entre el eje y el cojinete existe un huelgo de $e = 0{,}5$ mm de espesor lleno de un aceite de viscosidad $\eta = 200$ cp. Calcular:**

a) El par necesario para hacer girar el eje a la velocidad angular de 10 rev/seg.

b) ¿Cuál será la potencia necesaria?

a) La fuerza elemental que hay que vencer debido a la viscosidad es:

$$dF = \eta\, dS \frac{dv}{dr} \qquad \text{siendo} \qquad dS = \frac{2\pi r}{\cos\alpha} dx$$



luego

$$dF = \eta \frac{2\pi r}{\cos\alpha} dx \frac{v}{e} =$$

$$= \eta \frac{2\pi r}{\cos\alpha}\frac{\omega r}{e} dx = \eta \frac{2\pi r}{\cos\alpha}\frac{2\pi n r}{e} dx = \eta \frac{4\pi^2 r^2 n}{e\cos\alpha} dx$$

El par necesario será:

$$M = \int r\, dF = \eta \frac{4\pi^2 n}{e \cos\alpha}\int_{x_2}^{x_1} r^3\, dx$$

pero

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x} = \frac{R_1 - R_2}{h} \Rightarrow x = \frac{rh}{R_1 - R_2}$$

y

$$dx = \frac{h\, dr}{R_1 - R_2},$$

por otra parte

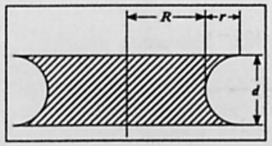
$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}}$$

luego

$$M = \frac{4\pi^2 n\eta}{e}\frac{\sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}}{h}\frac{h}{R_1 - R_2}\int_{R_2}^{R_1} r^3\, dr = \frac{\pi^2 n\eta}{e}\sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}\,\frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1 - R_2}$$

Sustituyendo valores

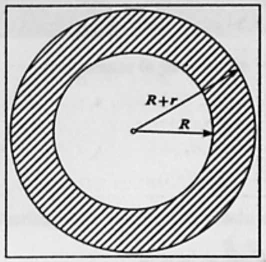
$$M = \frac{\pi^2 \cdot 10 \cdot 2}{5 \cdot 10^{-2}}\sqrt{2{,}5^2 + 0{,}2^2}\,\frac{2^2 - 1{,}8^2}{0{,}2} = 37584{,}87\ \mathrm{dinas \cdot cm}$$



Cuando el agua moja totalmente, el ángulo de contacto es cero y, por tanto, el radio del menisco coincidirá con la mitad de la distancia entre placas:

$$r = \frac{d}{2}$$

Debido a la curvatura de la superficie del agua, la presión en la parte convexa (interior) será menor que en la parte cóncava (exterior). La diferencia de presiones viene dada por:



$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$$

Debido a esa diferencia de presiones, la fuerza normal que actuará sobre cada lámina y, por tanto, la que sería necesaria para separarlas será:

$$F = \Delta p \cdot \Delta S = \frac{2\sigma}{r}\left(\pi(R+r)^2 - \pi R^2\right) = \frac{2\sigma}{r}[\pi r^2 + 2\pi R r] =$$

$$= 2\sigma\pi[r + 2R] = 2 \cdot 75 \cdot 3,14[0,01 + 2 \cdot 5] =$$

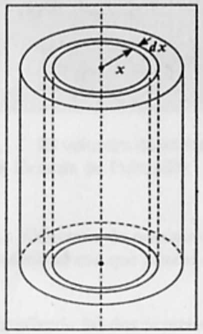
$$= 4714,71 \text{ dinas} = 4,81 \cdot 10^{-3} \text{ Kp}$$

8.32 Un tubo delgado de radio R está colocado verticalmente. Se llena de un líquido de viscosidad η y densidad ρ. Al destapar los dos extremos del tubo el fluido desliza. Calcular:

a) La velocidad en el eje del tubo.

b) La velocidad en un punto que diste de eje $R/2$.

c) El gasto.



Consideremos un cilindro del mismo eje que el tubo y de radio $x(0 < x < R)$ e igualemos el peso del líquido a la fuerza de viscosidad que obra sobre el cilindro

$$\rho g \pi x^2 h + \eta \cdot 2\pi x h \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

de donde

$$\rho g x\, dx = -2\eta dv \Rightarrow dv = -\frac{\rho g}{2\eta} x\, dx$$

integrando y teniendo en cuenta que:

$$x = R \Rightarrow v = 0$$

$$\int_{v_x}^{0} dv = -\frac{\rho g}{2\eta}\int_x^R x\, dx$$

$$-v_x = -\frac{\rho g}{2\eta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^R, \qquad \text{luego} \qquad v_x = \frac{\rho g}{4\eta}(R^2 - x^2)$$

a) Para $x = 0$

$$v_{eje} = \frac{\rho g}{4\eta} R^2$$

b) Para $x = R/2$

$$v = \frac{\rho g}{4\eta}\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\frac{\rho g}{4\eta}R^2 = \frac{3}{4}V_{eje}$$

c) Descomponiendo el tubo en tubos cilíndricos de radio x y espesor dx, tendremos

$$dQ = v_x\, ds = \frac{\rho g}{4\eta}(R^2 - x^2) \cdot 2\pi x \cdot dx$$

integrando

$$Q = \frac{\pi\rho g}{2\eta}\int_0^R (R - x^2)\, x\, dx = \frac{\pi \rho g}{2\eta}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi\rho g R^4}{8\eta}$$

8.33 Un cubo metálico de densidad $\rho = 8600$ kg/m³ y cuya arista mide $a = 0,1$ m desliza por un plano inclinado $\alpha = 30°$ que está cubierto de una capa de aceite de espesor $b = 0,5 \cdot 10^{-3}$ cm. Hallar la ecuación del movimiento del cubo y su velocidad estacionaria.

Dato: Viscosidad del aceite $\eta = 10$ kg m⁻¹·s⁻¹.

La fuerza, debida a la viscosidad, que se opone al deslizamiento del cubo es

$$R = s\eta\frac{v}{b} = a^2\eta\frac{v}{b}$$

y la componente del peso en dirección del plano inclinado $mg \operatorname{sen}\alpha$ por tanto

$$ma = mg \operatorname{sen}\alpha - R = mg\operatorname{sen}\alpha - a^2\eta\frac{v}{b}$$

de donde

$$a = \frac{dv}{dt} = g\operatorname{sen}\alpha - \frac{a^2 n}{m}\frac{v}{b}$$

hagamos

$$\alpha = g\operatorname{sen}\alpha = 9,8 \cdot 0,5 = 4,9$$

y

$$\beta = \frac{a^2\eta}{mb} = \frac{a^2\eta}{a^3\rho b} = \frac{10}{10^{-1}\cdot 8600 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 232,5$$

por tanto

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v \Rightarrow \frac{dv}{\alpha - \beta v} = dt$$

integremos esta ecuación teniendo en cuenta que para $t = 0,\ v = 0$

$$\int_0^v \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\beta}\Big[\log(\alpha - \beta v)\Big]_0^v = t$$

o sea

$$\log(\alpha - \beta v) - \log\alpha = -\beta t \Rightarrow \log\frac{\alpha - \beta v}{\alpha} = -\beta t$$

y

$$\frac{\alpha - \beta v}{\alpha} = e^{-\beta t} \Rightarrow \alpha - \beta v = \alpha e^{-\beta t} \Rightarrow v = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \Rightarrow dx = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\, dt$$