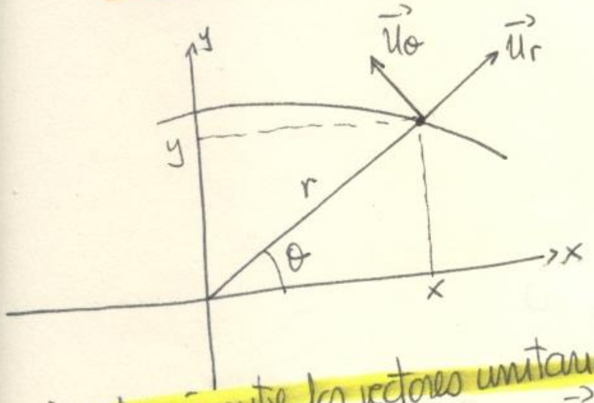
rso .... Grupo ....

cha ....

2.- CINEMATICA - PROBLEMAS

1) Expresar en coordenadas polares planas las diversas magnitudes cinemáticas. Aplicarlo al estudio del movimiento circular:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \\ r^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r(\theta, r)$$

i) relación entre los vectores unitarios:

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \vec{u}_r\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{u}_\theta\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \vec{u}_r\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{u}_\theta\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \text{ ya que } \vec{r} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}$$

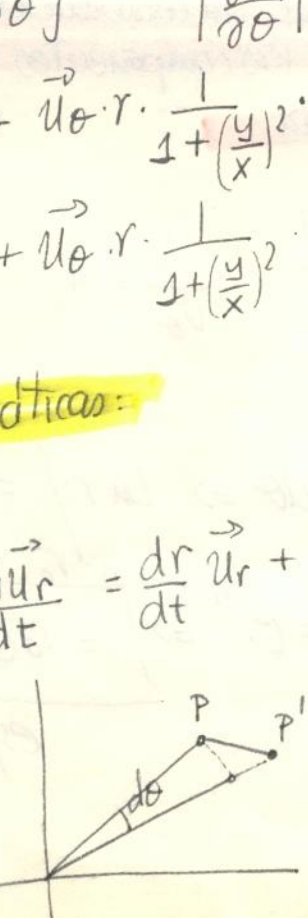
$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = r \text{ ya que } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + r\cos\theta\,\vec{j}$$

luego
$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{u}_r\cdot\frac{x}{r} + \vec{u}_\theta\cdot r\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{r}\vec{u}_r - \frac{y}{r}\vec{u}_\theta \\ \vec{j} = \vec{u}_r\cdot\frac{y}{r} + \vec{u}_\theta\cdot r\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{r}\vec{u}_r + \frac{x}{r}\vec{u}_\theta \end{cases}$$

ii) Magnitudes cinemáticas:

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial r}}_{0}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}}_{+\vec{u}_\theta}\frac{d\theta}{dt}\Big) = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{u}_r + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}}_{v_\theta}\cdot(+\vec{u}_\theta)$$



$$d\vec{r} = dr\,\vec{a}_r + d\theta\,\vec{a}_\theta$$

$$\vec{a}_r = |\vec{a}_r|\cdot\vec{u}_r \quad ;\quad \vec{a}_r = \vec{u}_r$$

$$\vec{a}_\theta = |\vec{a}_\theta|\cdot\vec{u}_\theta \quad ;\quad \vec{a}_\theta = r\,\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

pero $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \overset{0}{\underbrace{\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial r}}}\frac{dr}{dt} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta}}_{-\vec{u}_r}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u}_r$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r =$$

$$= \vec{u}_r\underbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}_{a_r} + \vec{u}_\theta\underbrace{\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)}_{a_\theta}$$

Para el movimiento circular se obtiene que: $r \equiv cte$ con lo que

$$a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Si el mov. es uniforme $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = cte \Rightarrow a_\theta = 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = K \Rightarrow \theta(t) = kt + \theta_0$$

Si el mov. es uniformem. acelerado " $\frac{d^2\theta}{dt^2} = k \Rightarrow \dot{\theta}(t) = k\cdot(t) + \dot{\theta}(0)$

de donde $\theta(t) = \frac{1}{2}kt^2 + \dot{\theta}(0)\cdot t + \theta(0)$

---

2) Estudiar un movimiento plano en coordenadas polares con la condición de que la relación entre las componentes radial y normal de la velocidad sea una constante.

$$\left.\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{u}_r + r\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{v_\theta}\vec{u}_\theta\right\} \qquad \frac{v_r}{v_\theta} = A$$

$$\frac{dr}{dt} = A\cdot r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{r} = A\,d\theta \Rightarrow \operatorname{Ln} r\Big|_{r_0}^{r} = \int_{\theta_0}^{\theta} A\,d\theta \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ln}\frac{r}{r_0} = A\theta \Rightarrow \frac{r}{r_0} = e^{A\theta} \Rightarrow \boxed{r = r_0 e^{A\theta}}$$

$\theta_0 \equiv 0$

espiral.

Fecha

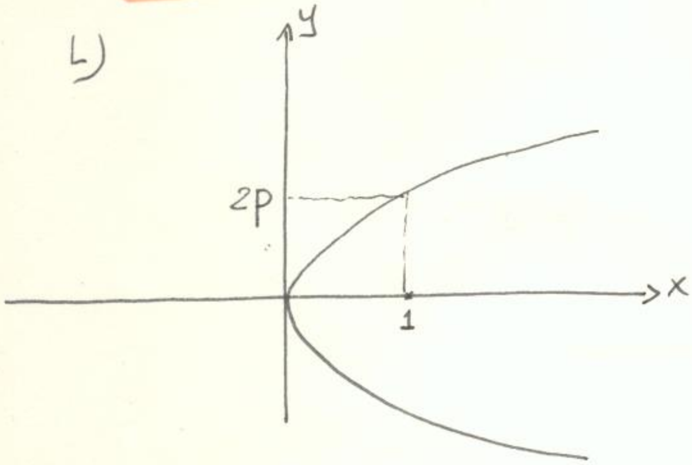
N°3) Un punto móvil describe la parábola $y^2 = 2px$ de modo que su aceleración permanece siempre paralela al eje de la parábola. Determinar:

i) Ecuaciones paramétricas del movimiento en función del tiempo

ii) Hodógrafa del movimiento suponiendo que al principio el móvil está en el origen con velocidad v_0

iii) ¿Qué valor deberá tener v_0 para que la hodógrafa corte a la trayectoria en un punto de abcisa 1 en el supuesto de que ambas gráficas se dibujen en el mismo sistema coordenado?

i)



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_y = 0 \\ a_x = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_y(t) = v_{0y} \\ v_x(t) = kt + v_{0x} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = v_{0y} \cdot t + y(0) \\ x(t) = \frac{1}{2}kt^2 + v_{0x} \cdot t + x(0) \end{array}\right\}$$

Despejando $t = \dfrac{y(t) - y(0)}{v_{0y}}$

$$x(t) = \frac{1}{2}k\left(\frac{y - y_0}{v_{0y}}\right)^2 + v_{0x} \cdot \frac{y - y_0}{v_{0y}} + x_0 =$$

$$= \frac{1}{2}k \, \frac{y^2 + 2yy_0 + y_0^2}{v_{0y}^2} + v_{0x} \cdot \frac{y - y_0}{v_{0y}} + x_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k}{v_{0y}^2}y^2 + \left(\frac{v_{0x}}{v_{0y}} - \frac{ky_0}{v_{0y}}\right)y + \frac{1}{2}k\frac{y_0^2}{v_{0y}} - \frac{v_{0x}}{v_{0y}}y_0 + x_0$$

Para que coincida con la parábola dada deberá cumplirse que

$$\frac{1}{2}\frac{k}{v_{0y}^2} = \frac{1}{2p} \qquad \frac{1}{2}k\frac{y_0^2}{v_{0y}} - \frac{v_{0x}}{v_{0y}}y_0 + x_0 = 0$$

$$\frac{v_{0x}}{v_{0y}} - \frac{ky_0}{v_{0y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{0x} = ky_0}$$

Si aplicamos el que está en el origen de coordenadas inicialmente y con velocidad v_0 tenemos:

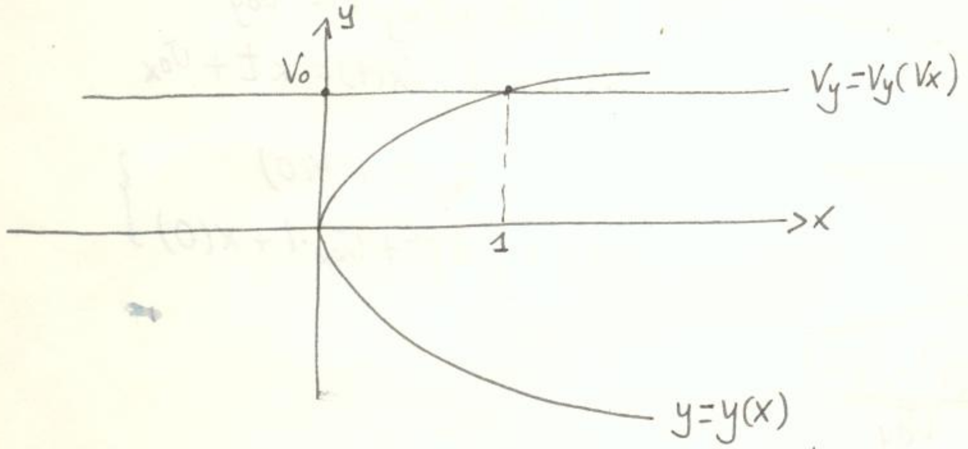
$$x(0)=y(0)=0 \Rightarrow \begin{cases} v_{0x}=0 \quad , \quad v_{0y}=v_0 \\ k=\dfrac{v_0^2}{p} \end{cases}$$

luego la ecuación paramétrica es:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{p}t^2 \\ y(t) &= v_0 \cdot t \end{aligned}}$$

ii) La hodógrafa es la derivada de las relaciones anteriores

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{v_0^2}{p}\cdot t \\ v_y(t) &= v_0 \end{aligned}\right\} \text{ recta paralela al eje } x$$



iii) Para que la hodógrafa corte a la trayectoria en $x=1$ deberá cumplirse que $y=\sqrt{2p}$ o que $\boxed{v_0=\sqrt{2p}}$

4) Un móvil describe una trayectoria dada por la ecuación vectorial

$$\vec{r}(t)=(t^2+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+t\,\vec{k}$$

Determinar: i) Velocidad y aceleración. Ecuaciones paramétricas y hodógrafa

ii) Ley horaria del movimiento $(s=s(t))$, componentes intrínsecas de la aceleración y radio de curvatura

iii) Calcular todo lo anterior suponiendo ~~que~~ en $t=0$ y

Fecha

$$\vec{r}(t) = (t^2+1)\,\vec{i} + (t^2-1)\,\vec{j} + t\,\vec{k}$$

i) $\left.\begin{array}{l} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = t^2-1 \\ z(t) = t \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = 2t \\ \dot{z}(t) = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \ddot{x}(t) = 2 \\ \ddot{y}(t) = 2 \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{array}\right\}$

trayectoria — velocidad — aceleración

ii) $ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \cdot dt^2 \Rightarrow ds = v\,dt$

$v(t) = |\vec{v}(t)| = (8t^2+1)^{1/2}$ $\qquad 8t^2 = Sh^2 u \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{8}} Sh\,u$

$$s(t) = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (8t^2+1)^{1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^t (Sh^2 u + 1)^{1/2} \cdot Ch\,u\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \int Ch^2 u\,du + K = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{1+Ch\,2u}{2}\,du + K =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[u + \frac{1}{2} Sh\,2u\right] + K = \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[\arg Sh(\sqrt{8}t) + \sqrt{8}t \cdot \sqrt{1+8t^2}\right] + K$$

$$s(t) = \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[Arg Sh(\sqrt{8} \cdot t) + \sqrt{8}\, t \cdot \sqrt{1+8t^2}\right] + K$$

Nota: Elegimos por simplicidad el valor de K como el que toma la expresión entre corchetes para $t=0$ y vale $s(0)=0$

La aceleración vale: $\vec{v} = \vec{\lambda} \cdot v$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt} \cdot v + \vec{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{d\vec{\lambda}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\lambda}}{ds} = \frac{v}{\rho}\vec{\mu}$$

$$\vec{a} = \vec{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\mu} \qquad \left\{\begin{array}{l} a_N = \frac{v^2}{\rho} \\ a_T = \frac{dv}{dt} \end{array}\right.$$

calculemos las componentes:

$$* \; a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(8t^2+1)^{-1/2} \cdot 16t = 8t\,(8t^2+1)^{-1/2} = \frac{8t}{\sqrt{8t^2+1}}$$

$$v(t) = (8t^2+1)^{1/2}$$

$$* \; a^2 = a_N^2 + a_T^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2$$

$$a^2 = 8$$

$$\left.\right\} a_N^2 = 8 - \frac{64t^2}{8t^2+1} = \frac{64t^2+8-64t^2}{8t^2+1}$$

$$a_N = \sqrt{\frac{8}{8t^2+1}}$$

Por ultimo comparamos con el valor de $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ y deducimos ρ

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{8t^2+1}{\left(\frac{8}{8t^2+1}\right)^{1/2}} = \frac{(8t^2+1)^{3/2}}{\sqrt{8}}$$

iii) $s(0) = 0$ $\qquad s(\infty) = +\infty$

$a_T(0) = 0$ $\qquad a_T(\infty) = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \frac{8}{\sqrt{8}}$

$a_N(0) = \sqrt{8}$ $\qquad a_N(\infty) = 0$

$\rho(0) = 1/\sqrt{8}$ $\qquad \rho(\infty) = \infty$ (trayectoria rectilinea)

---

5) Dos moviles separados por una distancia d. inician su movimiento hacia el encuentro con la misma velocidad inicial pero de sentido contrario. Sabiendo que la aceleración que poseen es constante y dirigida siempre hacia el mismo sentido (lo que hace que un movil sea acelerado y el otro decelerado) averiguar cuánto vale dicha aceleración si cuando se encuentran, uno de los moviles tiene velocidad nula.

El móvil A es uniform. acelerado $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}$

$\vec{a} = a\vec{u} \Rightarrow v(t) = v_0 + at \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

El móvil B es uniform. decelerado $\vec{v}(0) = -v_0 \vec{u}$

$\vec{a}' = a\vec{u} \Rightarrow \vec{v}'(t) = -v_0 + at \Rightarrow x'(t) = x'_0 - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Además para $t = t_c$ (tiempo de colisión) : $v'(t_c) = 0$ y $x(t_c) = x'(t_c)$
y que tomando como origen x_0 se ve que $x'_0 = x_0 + d$

$$\left.\begin{array}{c} v_0 t_c + \frac{1}{2} a t_c^2 = d - v_0 t_c + \frac{1}{2} a t_c^2 \\ 0 = -v_0 + a t_c \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{t_c \text{ y } a}$$

---

6) Dos móviles salen al mismo tiempo del mismo punto siguiendo los dos un movimiento rectilíneo en la misma dirección y sentido. El primero tiene un movimiento definido por $a_1 = -k v_1^2$ y el segundo $v_2 = u_0(1 + kx)$ siendo x la distancia en el instante t. Se pide:

a) Determine la velocidad y el desplazamiento del primer móvil en función de t y su velocidad inicial v_0

b) Aceleración y desplazamiento del segundo móvil en función de t

c) ¿Cuál ha de ser la velocidad inicial del primer móvil para que ambos vuelvan a encontrarse a una distancia $d = 1/k$?

a) $a_1 = -k v_1^2 \Rightarrow \dfrac{dv_1}{dt} = -k v_1^2 \Rightarrow -\dfrac{dv_1}{v_1^2} = k\,dt \Rightarrow \int_0^t -\dfrac{dv_1}{v_1^2} = \int_0^t k\,dt.$

$\dfrac{1}{v_1(t)} - \dfrac{1}{v_1(0)} = kt \Rightarrow v_1(t) = \dfrac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} = \dfrac{v_0}{1 + v_0 k t}.$

$\dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dfrac{v_0}{1 + v_0 k t} \underset{x_1(0) \equiv 0}{\Rightarrow} x_1(t) = \int_0^t \dfrac{v_0}{1 + v_0 k t} = \dfrac{1}{k} \ln(1 + k v_0 t)$

b) $V_2 = u_0(1+kx)$

$$a_2 = \frac{dV_2}{dt} = \frac{dV_2}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = u_0 k\cdot V_2 = u_0^2 k(1+kx_2)$$

falta poner $x = x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = u_0(1+kx) \Rightarrow \frac{dx}{1+kx} = u_0 t \Rightarrow \int_0^{x_2}\frac{dx}{1+kx} = \int_0^{t} u_0 t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}\ln(1+kx_2) = u_0 t \Rightarrow 1+kx_2 = e^{u_0kt} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{k}\left(e^{u_0kt}-1\right)}$$

Como $\boxed{a_2 = u_0^2 k(1+kx_2) = u_0^2 k\, e^{u_0kt}}$

c) $x_1 = x_2 = \frac{1}{k}$ " $\quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(e^{u_0kt_c}-1\right)$

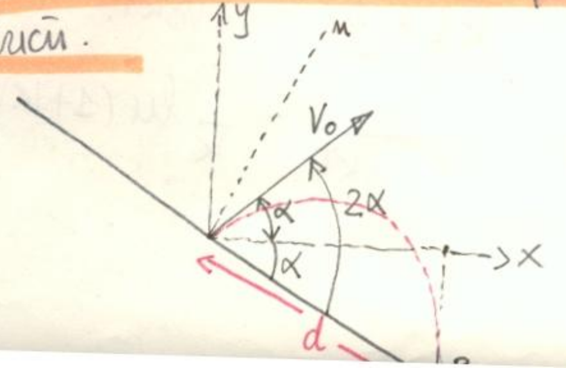
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(\ln(1+kV_0t_c)\right)$$

$$e^{u_0kt_c} = 2 \Rightarrow u_0kt_c = \ln 2 \qquad kt_c = \frac{\ln 2}{u_0}$$

$$\ln(1+kV_0t_c) = 1 \Rightarrow 1+kV_0t_c = e \qquad 1+\frac{V_0\ln 2}{u_0} = e \Rightarrow$$

$$\boxed{V_0 = \frac{u_0}{\ln 2}(e-1)}$$

7) Una pelota cae verticalmente sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal de modo que rebota formando un ángulo 2α con el plano inclinado. La pelota vuelve a botar sobre el plano en un punto situado a una distancia d del primer bote. Determinar la velocidad con que ha rebotado la pelota en la primera ocasión.



$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x(t) = x(0) + V_{0x} t + \cancel{\frac{1}{2} a_x t^2} = V_{0x} t \\ y(t) = y(0) + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}$$

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$$
$$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = V_0 \cos\alpha \, t \\ y(t) = V_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = V_0 \operatorname{sen}\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

La parábola pasará por el punto P de coordenadas

$$P \equiv (-d \cos\alpha ; -d \operatorname{sen}\alpha) \qquad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

$$-d \operatorname{sen}\alpha = d \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 V_0^2 \cancel{\cos^2\alpha}} d^2 \cancel{\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

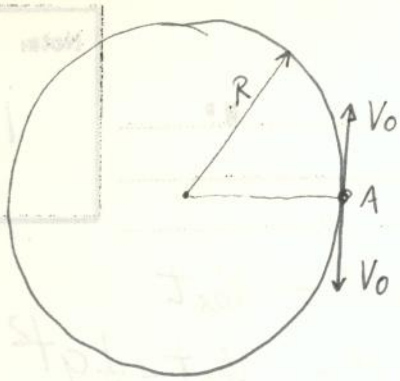
$$2 d \operatorname{sen}\alpha = \frac{g d^2}{2 V_0^2} \Rightarrow V_0^2 = \frac{g d^2}{4 d \operatorname{sen}\alpha} = \frac{g d}{4 \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g d}{\operatorname{sen}\alpha}}}$$

8) Dos móviles comienzan a moverse simultaneamente sobre una circunferencia de radio R de forma que parten del mismo punto A con velocidad V_0 y sentidos opuestos. Uno de los mov. es acelerado y el otro es decelerado siendo el modulo de su aceler. y deceler. tangencial, respectivam., el mismo. Hallar:

a) El valor de la aceleracion tangencial en el instante en que se encuentren sabiendo que en ese instante el movil decelerado tiene velocidad cero.

b) El valor de la aceleración total de cada móvil en el instante de choque.



$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$$

$$a_r\Big|_{R=cte} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad V_r\Big|_{R=cte} = 0$$

$$a_\theta^1 = a_\theta^2$$

$$a_\theta\Big|_{R=cte} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad V_\theta\Big|_{R=cte} = R\frac{d\theta}{dt}$$

a) Hay que suponer que $a_\theta = cte$ ya que si no el problema no puede resolverse:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_\theta}{R} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{a_\theta}{R}t \Rightarrow \theta(t) - \theta(0) = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} t + \frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t^2$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)\, t + \frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t^2$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \frac{V_0}{R} \quad ; \quad \dot{\theta}_2(0) = -\frac{V_0}{R} \quad y \quad \theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 2\pi$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{V_0}{R}t + \frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t^2 \\ \theta_2(t) = -\frac{V_0}{R}t + \frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t^2 + 2\pi \end{cases}$$

Además para $t = t_c$ $\theta_1(t_c) = \theta_2(t_c)$ y $\dot{\theta}_2(t_c) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_0}{R}t_c + \cancel{\frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t_c^2} &= -\frac{V_0}{R}t_c + 2\pi + \cancel{\frac{1}{2}\frac{a_\theta}{R}t_c^2} \\ 0 &= -\frac{V_0}{R} + \frac{a_\theta}{R}t_c \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi &= \frac{2V_0t_c}{R} \\ \frac{V_0}{R} &= \frac{a_\theta}{R}t_c \end{aligned}\right\} \quad \frac{2\pi R}{V_0} = \frac{2V_0}{a_\theta} \Rightarrow \boxed{a_\theta = \frac{V_0^2}{\pi R}}$$

Fecha

b) $a = (a_r^2 + a_\theta^2)^{1/2}$

$a_r = -R \cdot \dot{\theta}^2$

$a_\theta = R \cdot \ddot{\theta} = \dfrac{V_0^2}{\pi R} \ \forall t$

$a_{r_1} = -R\dot{\theta}_1^2 = -R\left(\dot{\theta}_1(0) + \dfrac{a_\theta}{R} t_c\right)^2$

$a_{\theta_1} = \dfrac{V_0^2}{\pi R}$

$$\begin{cases} a_{r_1} = -R\left(\dfrac{V_0}{R} + \dfrac{V_0}{R}\right)^2 = -R\left(2\dfrac{V_0}{R}\right)^2 = -\dfrac{4V_0^2}{R} \\ a_{\theta_1} = \dfrac{V_0^2}{\pi R} \end{cases}$$

Por otro lado: $a_{r_2} = -R\cancel{\dot{\theta}_2^2(t_c)}^{\,0} = 0$

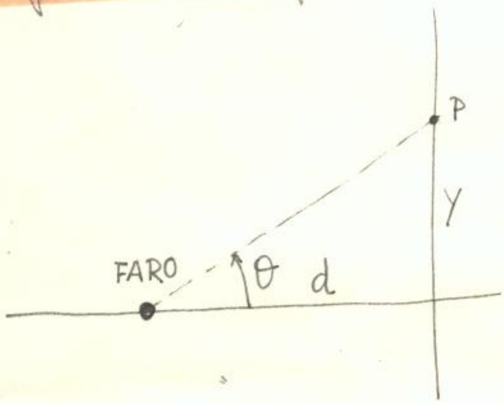
$a_{\theta_2} = a_{\theta_1} = \dfrac{V_0^2}{\pi R}$

luego

$$a_1 = \left(\dfrac{16V_0^4}{R^2} + \dfrac{V_0^4}{\pi^2 R^2}\right)^{1/2} = \dfrac{V_0^2}{R}\sqrt{16 + \dfrac{1}{\pi^2}}$$

$$a_2 = a_{\theta_2} = \dfrac{V_0^2}{\pi R}$$

9) Un faro emite un rayo de luz horizontal que gira con velocidad angular ω constante. Calcular la velocidad y la aceleración del punto luminoso que produce sobre una pared, situada a una distancia d del faro, en el instante en que el rayo y la normal a la pared forman un ángulo θ.



$$\left.\begin{aligned} V_p &= \dfrac{dy}{dt} \\ tg\theta &= \dfrac{y}{d} \Rightarrow y = d\,tg\theta \end{aligned}\right\}$$

$$V_p = \dfrac{dy}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d \cdot \omega}{\cos^2\theta}$$

luego la velocidad es

$$\boxed{v_P(t,\theta) = \frac{\omega \cdot d}{\cos^2\theta(t)}}$$

En cuanto a la aceleración, tenemos la siguiente relación:

$$a_P = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_P}{dt} = \frac{dv_P}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega d(-2)\cos^{-3}\theta\cdot(-\operatorname{sen}\theta)\cdot\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_P = \frac{2\omega^2 d \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}}$$