



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE MADRID

ESCUELA UNIVERSITARIA
DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL

1.º APELLIDO

2.º APELLIDO

NOMBRE

ESPECIALIDAD

ASIGNATURA

CURSO

GRUPO

FECHA

Nº DE MATRICULA

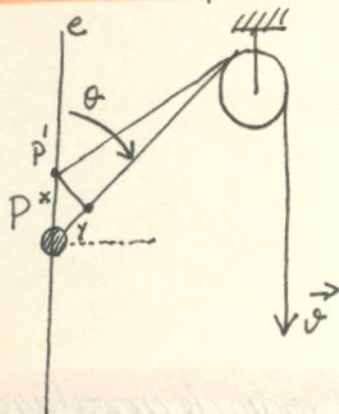
--	--	--	--	--

CALIFICACION

1

PROBLEMAS RESUELTOS DE CINEMATICA

- 1) Un punto material P está obligado a moverse a lo largo de una línea vertical recta e. Dicho punto se encuentra unido a una polea mediante un cuerda que baja por el extremo libre a una velocidad constante $\vec{v}$. Calcular con qué velocidad ascenderá el punto P. por la recta.



Cuando el punto P se sitúa en P' próximo a P se tiene que

$x \equiv \Delta e$ ascensión de P

$y \equiv \Delta d$ descenso de la cuerda

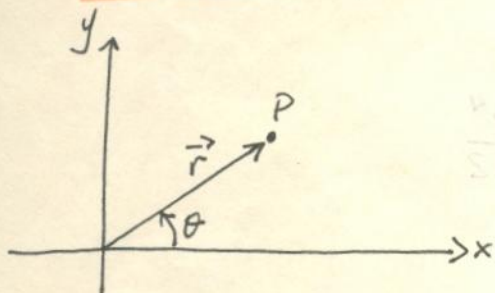


$$\cos \theta = \frac{\Delta P}{\Delta e} \Rightarrow \Delta e = \Delta P \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_p = v \cdot \frac{1}{\cos \theta}}$$

- 2) Un movimiento plano es tal que la variación del ángulo polar $\dot{\theta} = cte$ y la relación entre las aceleraciones radial y normal es también constante. Estudiar la trayectoria.



$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Si $\dot{\theta} = \omega$ cte

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\omega^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\omega \end{cases}$$

$$\frac{\ddot{r} - r\omega^2}{2\dot{r}\omega} = k$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 = k2\dot{r}\omega \Rightarrow \ddot{r} - 2k\omega\dot{r} - \omega^2 r = 0 \quad \text{ec. CAR: } \lambda^2 - 2k\omega\lambda - \omega^2 = 0$$

raíces: $r = k\omega \pm \sqrt{k^2\omega^2 + \omega^2} = \omega(k \pm \sqrt{1+k^2})$

$$r_1 = \omega(k + \sqrt{1+k^2})$$

$$r_2 = \omega(k - \sqrt{1+k^2})$$

luego la solución es:

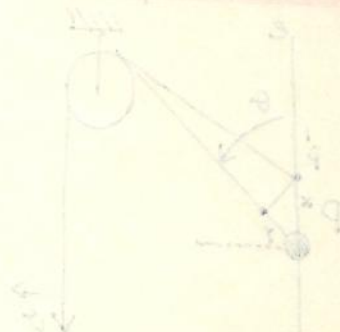
$$r(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{\omega(k+\sqrt{1+k^2})t} + Be^{\omega(k-\sqrt{1+k^2})t} = e^{\omega k t} (Ae^{\omega\sqrt{1+k^2}t} + Be^{-\omega\sqrt{1+k^2}t})$$

Si imponemos que $r(t=0) = 0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B$

$$\begin{cases} r(t) = Ae^{\omega k t} (e^{\omega\sqrt{1+k^2}t} - e^{-\omega\sqrt{1+k^2}t}) = 2Ae^{\omega k t} \text{Cosh}(\omega\sqrt{1+k^2}t) \\ \theta(t) = \omega t \text{ u } \theta(0) = 0 \end{cases}$$

ecuación implícita:

$$r = 2Ae^{\theta k} \text{Cosh}(\theta\sqrt{1+k^2})$$



b) ¿Qué relación existe entre los vectores $\vec{a}$, $\vec{v}$ y el radio de curvatura ρ de la trayectoria?

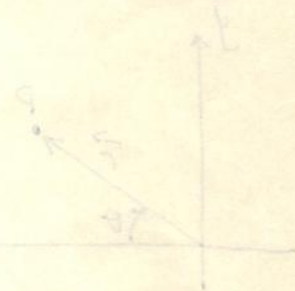
$$\vec{a} = a_T \vec{t} + a_N \vec{n}$$

$$|\vec{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$$

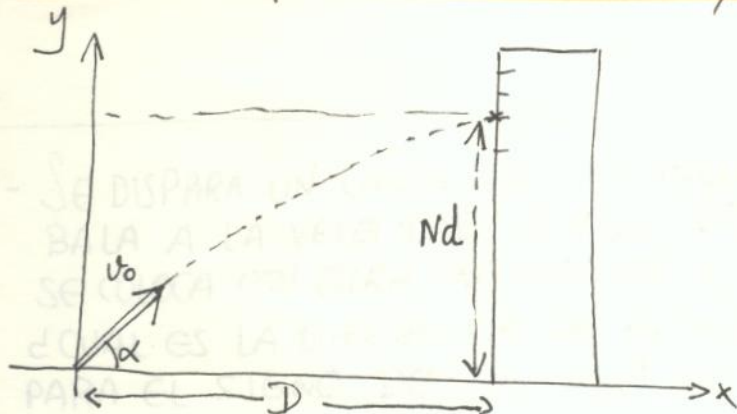
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2v} (2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

$$|\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$$



- 4) Se dispara un cañón con un ángulo de inclinación α y v_0 de velocidad de salida, contra un edificio situado a una distancia D . Si el edificio está hecho de plantas de altura d , ¿en qué planta impactará el obús?



$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{0}$$

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j}$$

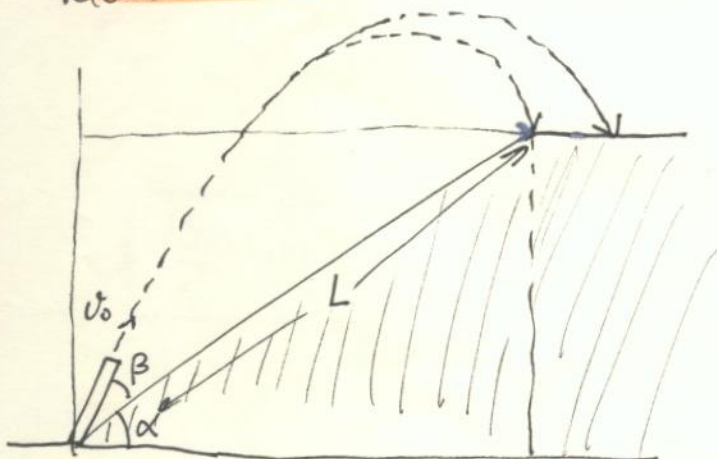
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Si } x = D \Rightarrow y = Nd = D \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$N = \frac{D \tan \alpha - \frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}}{d} =$$

$$\left[\text{Si } \alpha = 45^\circ \quad N = \frac{D - g D^2 / v_0^2}{d} \right]$$

- 5) Con un mortero se quiere alcanzar una posición enemiga en una colina como indica la figura. ¿Con qué ángulo tiraremos si la velocidad de salida es v_0 ?



$$y = x \tan(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha + \beta)}$$

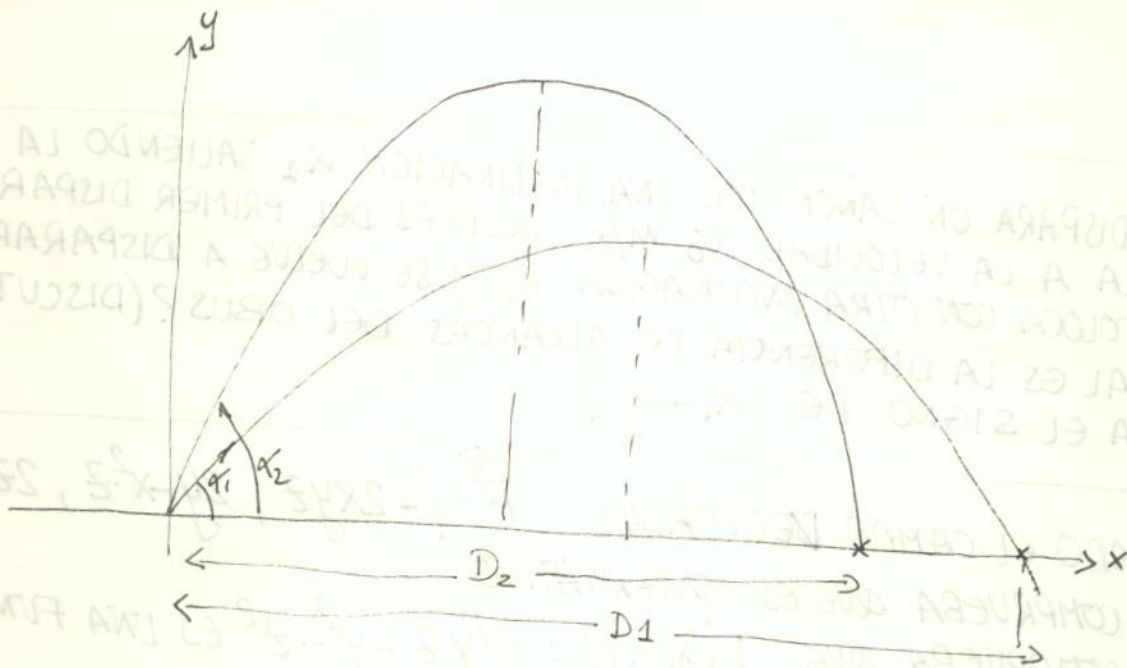
$$\text{Si } x = L \cos \alpha$$

$$y = L \sin \alpha$$

y después β

$$\left[L \sin \alpha = L \cos \alpha \tan(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} g \frac{L^2 \cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2(\alpha + \beta)} \right]$$

6) Se dispara un cañon con una inclinación α_1 saliendo la bala a v_0 m/s. Después del primer disparo se coloca con otra inclinación α_2 y se vuelve a disparar. ¿Cual es la diferencia de alcances del obús? (discutir para el signo de $\alpha_1 - \alpha_2$)



$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 t \cos \alpha_1 \\ y_1(t) = v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y_1 = \tan \alpha_1 x_1 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_1} x_1^2$$

$$D_1 = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_1 \cdot \tan \alpha_1}{g} =$$

$$D_1 = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = v_0 t \cos \alpha_2 \\ y_2(t) = v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y_2 = x_2 \tan \alpha_2 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_2} x_2^2$$

$$D_2 = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{g}$$

$$D_1 - D_2 = \frac{2 v_0^2}{g} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)$$

Si ponemos $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta \alpha$

$$\Delta D = \frac{2 v_0^2}{g} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin(\alpha_1 + \Delta \alpha) \cos(\alpha_1 + \Delta \alpha))$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha_1 + \Delta \alpha) = \sin \alpha_1 \cos \Delta \alpha + \cos \alpha_1 \sin \Delta \alpha \\ \cos(\alpha_1 + \Delta \alpha) = \cos \alpha_1 \cos \Delta \alpha - \sin \alpha_1 \sin \Delta \alpha \end{cases}$$

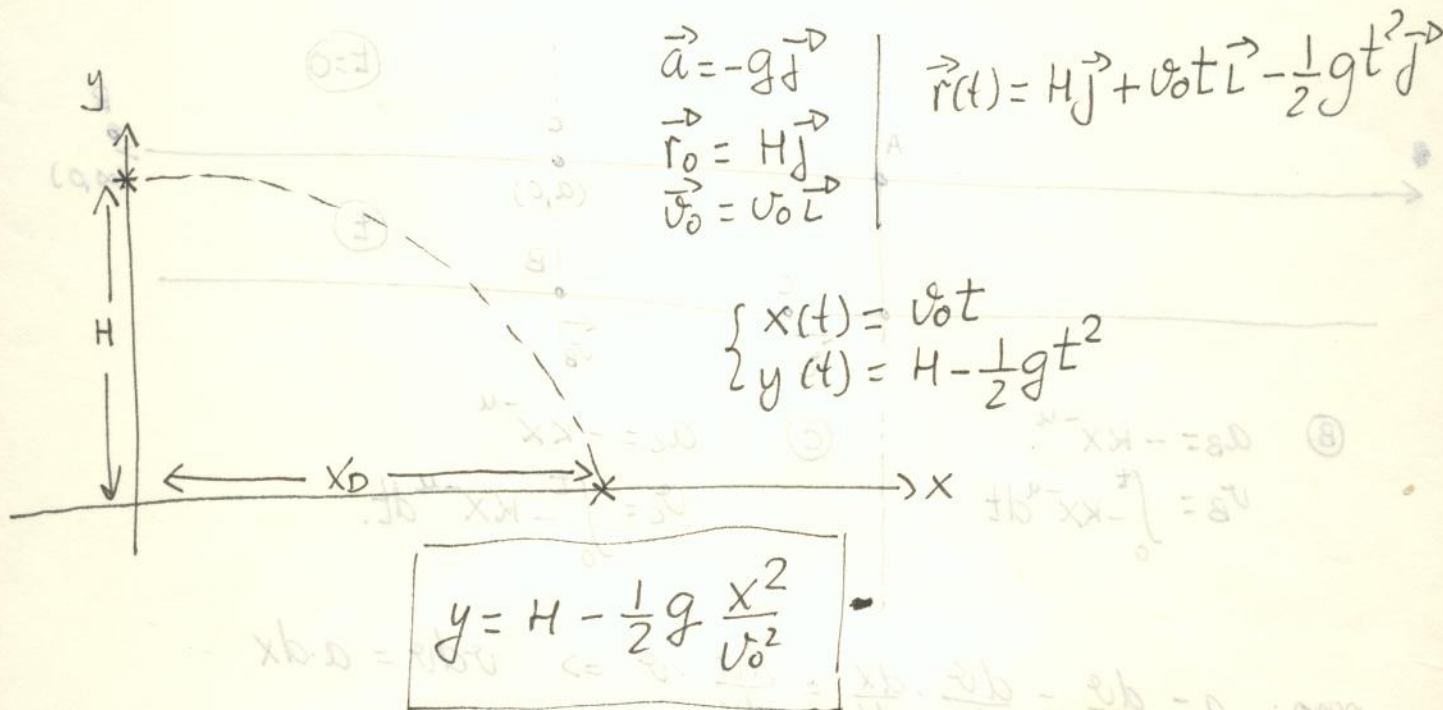
$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \Delta \alpha) \cos(\alpha_1 + \Delta \alpha) &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos^2 \Delta \alpha - \sin^2 \alpha_1 \sin \Delta \alpha \cos \Delta \alpha + \cos^2 \alpha_1 \sin \Delta \alpha \cos \Delta \alpha \\ &\quad - \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin^2 \Delta \alpha \end{aligned}$$

7- DESDE EL TEJADO DE UNA CASA DE ALTURA H SE DISPARA HORIZONTALMENTE Y CON VELOCIDAD v_0 UN COHETE.

a) ¿A QUE DISTANCIA DE LA CASA CAERÁ?

b) ¿CUANTO VALE SU ACCELERACION TANGENCIAL Y NORMAL EN UN INSTANTE t ?

c) ¿CUAL ES EL RADIO DE CURVATURA EN EL INSTANTE t ?



a)

$$y=0 \Rightarrow x_D = \sqrt{\frac{2v_0^2 H}{g}}$$

b)

$$|\vec{a}| = g$$

$$|\vec{v}| = |v_0 \vec{i} - g t \vec{j}| = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_T = \frac{1}{2\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \cdot 2tg^2 = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

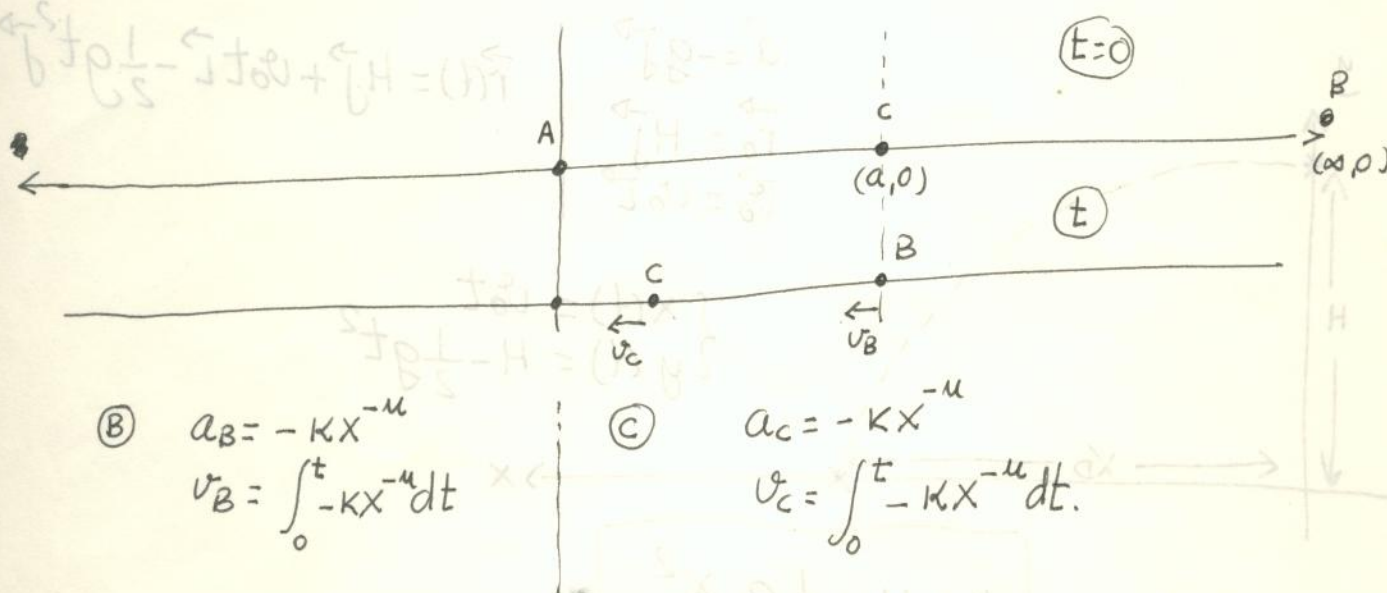
$$|\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = |\vec{a}|^2 - a_T^2 = g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2} =$$

$$= \frac{g^2 v_0^2 + g^4 t^2 - g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 v_0^2}{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$a_N = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$c) \rho = \frac{v^2}{a v} = \frac{v_0^2 + g^2 t^2}{g v_0 / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0}$$

8) Un punto situado en $(0,0)$ atrae a otros dos de masas iguales con aceleración igual a Kx^{-u} ($K=de$). En el instante inicial uno de los puntos está en el infinito del eje x y el otro en el $(a,0)$ y los dos en reposo. Cuando el primero llega a $(a,0)$ el segundo está en $(\frac{a}{4}, 0)$ y sus velocidades en ese instante son iguales. Halla n .



$$\textcircled{B} \quad a_B = -Kx^{-u} \\ v_B = \int_0^t -Kx^{-u} dt$$

$$\textcircled{C} \quad a_C = -Kx^{-u} \\ v_C = \int_0^t -Kx^{-u} dt$$

pero: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \Rightarrow v dv = a \cdot dx$

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

$$\frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^v = \int_{x_0}^x -Kx^{-u} dx = -K \frac{x^{-u+1}}{-u+1} \Big|_{x_0}^x$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -K \frac{x^{-u+1}}{-u+1} + K \frac{x_0^{-u+1}}{-u+1}$$

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{K}{1-u} \left(\frac{1}{x_0^{u-1}} - \frac{1}{x^{u-1}} \right)$$

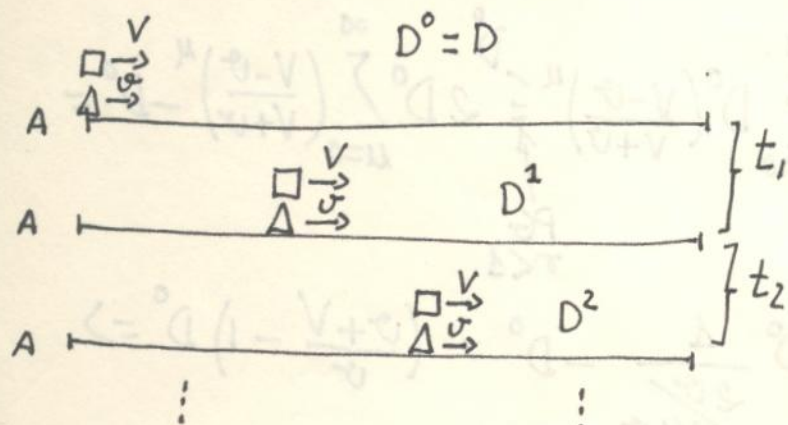
$$\textcircled{B} : \frac{1}{2} v^2 = \frac{K}{1-u} \left(-\frac{1}{a^{u-1}} \right) \quad \textcircled{C} : \frac{1}{2} v^2 = \frac{K}{1-u} \left(\frac{1}{a^{u-1}} - \frac{1}{(\frac{a}{4})^{u-1}} \right)$$

divido miembro a miembro y sale: $\frac{1}{4^{u-1} - 1} = 1 \Rightarrow 4^{u-1} = 2 \Rightarrow \boxed{u = \frac{3}{2}}$

9) PROBLEMAS DE CINEMATICA RELACIONADOS CON LA SUMACION DE SERIES

4

Un automovil y una persona salen del punto A hacia el B con velocidades V y v respectivamente siendo $V > v$. Cuando el auto llega a B da la vuelta al encuentro de la persona y cuando esto ocurre retorna a B para repetir el proceso. ¿Que distancia total recorrerá el automovil en las sucesivas idas y vueltas hasta que la persona llega a B suponiendo que las velocidades de ambos móviles se mantienen constantes siempre? La distancia $\overline{AB}$ es D .



t_k tiempo que media entre un encuentro y el siguiente.

$$t_1 = \frac{D^0}{V} + \frac{D^1}{V} = \frac{D^0}{V} + \frac{D^0 - vt_1}{V} = \frac{2D^0}{V} - \frac{v}{V} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2D^0}{V} \frac{1}{1 + \frac{v}{V}}$$

$t_1 = \frac{2D^0}{V+v}$. De forma completamente análoga se puede obtener:

$$t_2 = \frac{2D^1}{V+v}$$

y en general

$$t_n = \frac{2D^{n-1}}{V+v} \quad n \geq 1$$

La distancia pedida es la siguiente suma:

$$S = D^0 + D^1 + D^1 + D^2 + D^2 + D^3 + \dots = D^0 + 2D^1 + 2D^2 + \dots = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} D^n\right) + D^0$$

Veamos cuanto vale la suma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^n = D^1 + D^1 + \dots = D^0 + (D^0 - vt_1) + (D^1 - vt_2) + \dots = D^0 + \left(D^0 - \frac{2vD^0}{V+v}\right) + \left(D^1 - \frac{2vD^1}{V+v}\right) + \dots$$

$$D^1 = D^0 \left(1 - \frac{2v}{v+V}\right) = D^0 \left(\frac{V-v}{V+v}\right)$$

$$D^2 = D^1 \left(1 - \frac{2v}{v+V}\right) = D^1 \left(\frac{V-v}{V+v}\right) = D^0 \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$D^u = D^{u-1} \left(\frac{V-v}{V+v}\right) = D^0 \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^u$$

por tanto

$$S = 2 \left(\sum_{u=0}^{\infty} D^u \right) - D^0 = 2 \sum_{u=0}^{\infty} D^0 \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^u \stackrel{\substack{\text{PG} \\ r < 1}}{=} 2 D^0 \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^u - D^0 =$$

$$= 2 D^0 \frac{1}{1 - \frac{V-v}{V+v}} - D^0 = 2 D^0 \frac{1}{\frac{2v}{V+v}} - D^0 = \left(\frac{v+V}{v} - 1\right) D^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = D^0 \frac{V}{v}}$$

10) Dos móviles salen al mismo tiempo del mismo punto, siguiendo los dos un movimiento rectilíneo en la misma dirección y sentido. El primero tiene una ley de movimiento dada por $a_1 = -k v_1^2$ y el segundo $v_2 = v_0(1+kx)$ siendo x la distancia recorrida hasta el tiempo t . Se pide

a) Velocidad y desplazamiento del primer móvil en función de t y su velocidad inicial.

b) Aceleración y desplazamiento del 2º móvil en función de t y su velocidad inicial.

c) ¿Cual debe ser la velocidad inicial del 1º móvil para que los dos móviles vuelvan a encontrarse a una distancia $d = \frac{1}{k}$?

a) $a = -k v^2$

$$\frac{dv}{dt} = -k v^2 \Rightarrow -\frac{dv}{v^2} = k dt \Rightarrow \int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \int_{t=0}^t k dt \quad \left[\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v = kt$$

$$\boxed{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt} \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 k t} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k} \ln(1 + v_0 k t)$$

$\uparrow$
 $x_0 = 0$



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE MADRID

ESCUELA UNIVERSITARIA
DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL

1.º APELLIDO
2.º APELLIDO
NOMBRE
ESPECIALIDAD
ASIGNATURA
CURSO GRUPO FECHA

Nº DE MATRICULA

CALIFICACION

5

b) $v = v_0(1 + kx)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} = v_0 k \cdot v$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0(1 + kx) \Rightarrow \frac{dx}{1 + kx} = v_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{1 + kx} = \int_0^t v_0 dt$$

$$\frac{1}{k} \ln(1 + kx) \Big|_{x_0}^x = v_0 t \Rightarrow \uparrow_{x_0=0}$$

$$1 + kx = \exp(kv_0 t)$$

$$x(t) = \frac{1}{k} (\exp(kv_0 t) - 1)$$

c) Si $x(t) = \frac{1}{k}$ para ambos indica

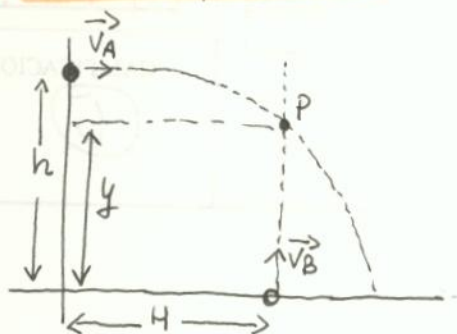
$$\frac{1}{k} = \frac{v_0}{k} \ln(1 + v_0' kt)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k} (e^{kv_0' t} - 1) \Rightarrow e^{kv_0' t} = 2 = kv_0' t = \ln 2 \Rightarrow kt = \frac{\ln 2}{v_0'}$$

$$1 = v_0 \ln(1 + v_0' \cdot \frac{\ln 2}{v_0}) \Rightarrow e^{\frac{1}{v_0}} = 1 + \frac{v_0'}{v_0} \ln 2 \Rightarrow$$

$$v_0 \frac{e^{\frac{1}{v_0}} - 1}{\ln 2} = v_0'$$

11) Calcula las coordenadas de P así como el tiempo invertido y las velocidades de ambas partículas.



$$\textcircled{A} : \begin{cases} x_A(t) = v_A t \\ y_A(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} : \begin{cases} y_B(t) = v_B t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x_B(t) = H \end{cases}$$

$$\begin{cases} H = v_A t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{H}{v_A}$$

$$y = v_B t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\begin{cases} y = h - \frac{1}{2} g \frac{H^2}{v_A^2} \\ y = v_B \frac{H}{v_A} - \frac{1}{2} g \frac{H^2}{v_A^2} \end{cases}$$

$$h = \frac{v_B}{v_A} H$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{h}{H}$$

RELACION ENTRE AMBAS VELOCIDADES

12) La velocidad de una partícula para $x > 0$ vale $v = \frac{k}{x}$ donde $k = \text{cte}$, en $t = 0$ $x = 2$. Calcula x , v , a en función de t y a en función de x .

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{k}{x} \Rightarrow x dx = k dt \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^x = kt$$

$$a) \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} 2^2 = kt \Rightarrow x^2 = 2(2 + kt) \Rightarrow x(t) = \sqrt{2(2 + kt)}$$

$$b) v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2(2+kt)}} \cdot 2k = \frac{k}{\sqrt{2(2+kt)}} \Rightarrow v(t) = \frac{k}{\sqrt{4+2kt}} = k(4+2kt)^{-1/2}$$

$$c) a = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} k(4+2kt)^{-3/2} \cdot 2k = \frac{-k^2}{(4+2kt)^{3/2}} \Rightarrow a(t) = \frac{-k^2}{(4+2kt)^{3/2}}$$

$$d) a(x) = -\frac{k^2}{x^3}$$

Nota: $a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = -\frac{k}{x^2} \cdot \frac{k}{x} = -\frac{k^2}{x^3}$



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE MADRID

ESCUELA UNIVERSITARIA
DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL

1.º APELLIDO

2.º APELLIDO

NOMBRE

ESPECIALIDAD

ASIGNATURA

CURSO

GRUPO

FECHA

Nº DE MATRICULA

CALIFICACION

6

Nº 13) La posición de un punto Q en un sistema de coordenadas O es $\vec{r}$ a) Calcular la velocidad de arrastre del sistema O' y la posición de Q por O es $\vec{r}'$ b) Demuestra que la aceleración de la partícula es la misma para ambos

$$\begin{aligned} a) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{i}(6t^2 - 4t) + \vec{j}(-3t^2) + 3\vec{k} \\ \vec{r}' &= \vec{i}'(6t^2 + 3t) + \vec{j}'(-3t^2) + 3\vec{k}' \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} \vec{v}_Q &= (12t - 4)\vec{i} - 6t\vec{j} \\ \vec{v}_Q' &= (12t + 3)\vec{i}' - 6t\vec{j}' \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_Q' + \vec{v}_d \Rightarrow \vec{v}_d = \vec{v}_Q - \vec{v}_Q' = -7\vec{i}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \vec{a}_Q &= 12\vec{i} \\ \vec{a}_Q' &= 12\vec{i}' \end{aligned}$$

