① La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta es $a=-Kv^2$, donde K es una constante. Sabiendo que en $t=0$, $v=v_0$, encontrar la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo. Encontrar también v en función de x.

a) Tenemos $a=-Kv^2=\frac{dv}{dt}$, luego para integrar separo variables

$$-Kv^2=\frac{dv}{dt} \rightarrow -Kdt=\frac{dv}{v^2} \rightarrow \int Kdt=-\int\frac{dv}{v^2} \rightarrow Kt=\frac{1}{v}+C$$

luego $$v=\frac{1}{Kt-C} \qquad (1)$$

y para hallar C uso la condición inicial del enunciado

$$v(t=0)=\frac{1}{0-C}=v_0 \rightarrow C=-\frac{1}{v_0}$$

luego (1) queda

$$\boxed{v(t)=\frac{1}{Kt+\frac{1}{v_0}}=\frac{v_0}{Ktv_0+1}} \qquad (2)$$

b) El desplazamiento será

$$x(t)=\int v(t)\,dt=\int\frac{v_0}{Ktv_0+1}dt=\frac{1}{K}\int\frac{Kv_0}{Ktv_0+1}dt=$$

$$=\frac{1}{K}\left(\ln(Ktv_0+1)+C\right) \qquad (3)$$

multiplico y divido por K para que me quede en el numerador la derivada del denominador, con lo que en la integral queda el neperiano del denominador.

Para hallar C, llamo $x_0=x(t=0)$, con lo que la última ecuación da para $t=0$

$$x(t=0)=\frac{1}{K}\Big(\underbrace{\ln(0+1)}_{\ln 1=0}+C\Big)=x_0 \rightarrow \frac{C}{K}=x_0 \rightarrow C=Kx_0$$

con lo que (3) queda

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{K}\left(\ln(Ktv_0+1)+Kx_0\right)=\frac{\ln(Ktv_0+1)}{K}+x_0} \qquad (4)$$

c) Por último me piden $v(x)$ y conozco $x(t)$ y $v(t)$, luego basta eliminar t para ligar v y x; para ello despejo t en función de x de (4) y lo llevo a (2) quedando v en función de x; o sea:

$$(4) \rightarrow K(x-x_0) = \ln(Ktv_0+1) \rightarrow e^{K(x-x_0)} = Ktv_0 + 1 \rightarrow t = \frac{e^{K(x-x_0)}-1}{Kv_0}$$

y lo llevo a (2) y queda

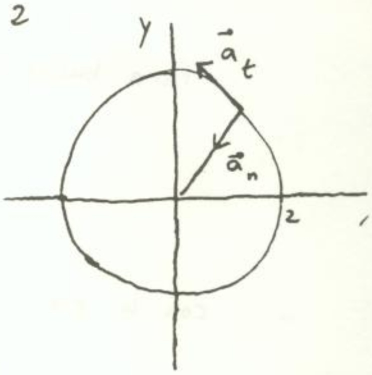
$$\boxed{v = \frac{v_0}{K\dfrac{(e^{K(x-x_0)}-1)}{Kv_0}v_0+1} = \frac{v_0}{e^{K(x-x_0)}} = v_0\, e^{-K(x-x_0)}}$$

Nota. Puesto que $a = -Kv^2$ y $v \neq cte$ pues depende de t, se tiene que $a \neq cte$, luego es un movim. rectilíneo pero no uniformemente acelerado; en realidad se trata de una típica aceleración de frenado viscoso.

② Las coordenadas de un cuerpo en movimiento son $x = 2\,\text{sen}\,\omega t$, $y = 2\cos\omega t$ con ω constante. a) Encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria. b) Calcular el valor de la velocidad en cualquier instante. c) Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante. Identificar el tipo de movimiento descrito por las ecuaciones expuestas.

a)
$$x = 2\,\text{sen}\,\omega t \rightarrow x^2 = 4\,\text{sen}^2\omega t$$
$$y = 2\cos\omega t \rightarrow y^2 = 4\cos^2\omega t$$
$$x^2+y^2 = 4(\text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t) \rightarrow \boxed{x^2+y^2=4}$$

que es la ecuación de una circunferencia ($x^2+y^2=r^2$) de radio 2



b)
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 2\omega\cos\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -2\omega\,\text{sen}\,\omega t \end{aligned}\right\}$$

luego $\boxed{v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{4\omega^2(\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t)} = 2\omega}$ (m/s)

Vemos que $v =$ cte pues ω lo era, de modo que se trata de movimiento uniforme.

c) Sabemos que

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$$

donde

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2\omega)}{dt} = 0} \quad (ms^{-2})$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\omega^2}{2} = 2\omega^2} \quad (ms^{-2})$$

luego es un movimiento circular uniforme.

(3) Un cuerpo, inicialmente en reposo ($\theta = 0$, $\omega = 0$ cuando $t = 0$) es acelerado en una trayectoria circular de 1.3 m de radio de acuerdo a la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$. Encontrar la posición angular y la velocidad angular del cuerpo en función del tiempo, y las componentes tangencial y centrípeta de su aceleración.

i) En el enunciado me dan α, luego podemos hallar directamente la velocidad angular ω mediante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_0=0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0=0}^{t} \alpha\, dt \rightarrow \boxed{\omega =} \int_0^t (120t^2 - 48t + 16)\, dt =$$

$$= 120\frac{t^3}{3} - 48\frac{t^2}{2} + 16t = \boxed{40t^3 - 24t^2 + 16t}$$

ii) Entonces la posición angular es θ dada por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_{\theta_0=0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0=0}^{t} \omega\, dt \rightarrow \boxed{\theta =} \int_0^t (40t^3 - 24t^2 + 16t)\, dt =$$

$$= 40\frac{t^4}{4} - 24\frac{t^3}{3} + 16\frac{t^2}{2} = \boxed{10t^4 - 8t^3 + 8t^2}$$

iii) La aceleración tangencial es

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

luego $\boxed{a_t = 1.3\,(120t^2 - 48t + 16) \quad ms^{-2}}$

La aceleración normal es

$$\boxed{a_n} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \boxed{(40t^3 - 24t^2 + 16t)^2 \times 1.3 \quad ms^{-2}}$$

(4) La velocidad angular de un volante aumenta uniformemente de 20 rad s^{-1} a 30 rad s^{-1} en 5 s. Calcular la aceleración angular y el ángulo total recorrido.

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, luego sus ecuaciones son

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

De la primera ecuación

$$\boxed{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{30 \text{ rad s}^{-1} - 20 \text{ rad.s}^{-1}}{5 \text{ s}} = \boxed{2 \text{ rad.s}^{-2}}$$

donde tomé $\omega(t=0) = \omega_0 = 20$ rad s^{-1}, o sea la veloc. angular cuando comience a contar el tiempo, y ω es la veloc. angular en el instante t considerado que aquí es $t = 5$ s.

(Esta solución era previsible pues como ω aumenta en 10 rad s^{-1} en 5 s y lo hace de modo uniforme, aumentará $\frac{10}{5} = 2$ rad.s^{-1} cada seg, o sea $\alpha = 2$ rad.s^{-2}).

El ángulo recorrido será

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

y si tomo el origen de ángulos $\theta_0 = 0$ en $t = 0$, queda

$$\theta = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 5 \text{ s} + \frac{1}{2} 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 5^2 \text{ s}^2$$

o sea, operando

$$\boxed{\theta} = (100 + 25) \text{ rad} = \boxed{125 \text{ rad}}$$

que giró el volante en esos 5 seg.

(5) Un auto parte del reposo y se mueve con una aceleración de $4\ ms^{-2}$ y viaja durante 4 s. Durante los próximos 10 s se mueve con movim. uniforme. Se aplican luego los frenos y el auto desacelera a razón de $8\ ms^{-2}$ hasta que se detiene. Hacer un gráfico de la veloc. contra el tiempo y demostrar que el área comprendida entre la curva y el eje del tiempo mide la distancia total recorrida.

Objetivo. Se trata de un ejercicio sencillo de aparato matemático, pero que expone al alumno dos ideas fundamentales; de un lado, el analizar un movim. a tramos, y de otro, comprobar el concepto de integral.

Solución.

1) En el 1^er tramo tenemos un movim. unif. acel., luego la distancia recorrida es

$$x_1 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v_0}} t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{pues parte del reposo}$$

luego en este tramo, que dura 4 s, queda

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\ ms^{-2} \cdot (4\ s)^2 = 32\ m}$$

2) En el 2° tramo, durante 10 s viaja con mov. unif., luego

$$x_2 = vt$$

(la x_0 que añadiría aquí sería la x con que acabó el 1^er tramo, o sea x_1, pero no la añado porque con x_2 no me estoy refiriendo al origen, sino a la distancia recorrida desde que acabó el 1^er tramo hasta que acaba el 2° tramo)

y aquí v es la que obtuvo el auto al final del 1^er tramo, que es

$$v = at = 4\ ms^{-2} \cdot 4\ s = 16\ ms^{-1}$$

luego

$$\boxed{x_2 = 16\ ms^{-1} \cdot 10\ s = 160\ m}$$

3) En el 3^er tramo tenemos un mov. uniformem. decelerado, luego la distancia recorrida en ese tramo es

$$x_3 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

donde aquí t es el tiempo invertido en el 3^er tramo, o sea el tiempo que tarda en pararse, y que hemos de calcular previamente.

$$v = v_0 - at \quad \rightarrow \quad 0 = 16\ ms^{-1} - 8t \quad \rightarrow \quad t = 2\ s$$

↑ veloc. inicial del 3^er tramo, o sea, la veloc. con que acabó el 2° tramo, (y que la misma con la que terminó el 1^er tramo, pues en el 2° tramo su veloc. no cambia), o sea $16\ ms^{-1}$

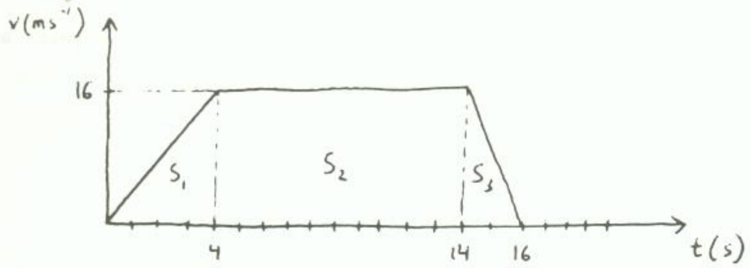
Entonces en esos 2 s que tarda en recorrer el 3^er tramo, el espacio recorrido es

$$\boxed{x_3 = 16\ ms^{-1} \cdot 2\ s - \frac{1}{2}\, 8\ ms^{-2} \cdot (2\ s)^2 = 16\ m}$$

El espacio total recorrido será entonces

$$\boxed{x = x_1 + x_2 + x_3 = 32\text{ m} + 160\text{ m} + 16\text{ m} = 208\text{ m}}$$

Representando $v = v(t)$ queda .



Las áreas encerradas son .

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{b\,h}{2} = \frac{4 \times 16}{2} = 32 \text{ m} \\ S_2 &= b\,h = 10 \times 16 = 160 \text{ m} \\ S_3 &= \frac{b.h}{2} = \frac{2 \times 16}{2} = 16 \text{ m} \end{aligned}\right\} \text{luego } \boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 = 208\text{ m.}}$$

de modo que el área encerrada por la curva coincide con el espacio recorrido , de acuerdo con el concepto de que el área encerrada por la curva $v(t)$ y el eje t es la integral

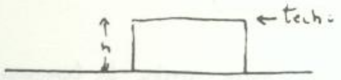
$$S = \int v(t)\,dt$$

y ésta es precisamente la expresión del espacio recorrido

$$x = \int v(t)\,dt$$

que aquí hemos utilizado tramo a tramo .

5) Un hombre parado en el techo de un edificio tira una bola verticalmente hacia arriba con una veloc. de $12{,}2\ ms^{-1}$. La bola llega al suelo $4{,}25\ s$ más tarde. 1) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la bola? 2) ¿Qué altura tiene el edificio? 3) ¿Con qué veloc. llegará la bola al suelo?



1) La ecuac del desplazam. es la de un movim. rectil. uniform decelerado, debido a la acción de g, o sea:

$$x = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{x_0} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

0 si tomo el origen en el techo

La altura máxima la alcanza cuando $v=0$ (o sea, la bola lanzada hacia arriba llega a un punto en que se para ($v=0$, altura máxima) y luego empieza a caer. Entonces, como

$$v = v_0 - gt$$

queda que, cuando $v=0$ se tiene

$$0 = 12{,}2\ ms^{-1} - 9{,}8\ ms^{-2} \cdot t$$

de donde se obtiene

$t = 1{,}244\ s$ que tarda en llegar a la altura máxima,

luego introduciendo este t en la ec. (1) queda

$$\boxed{x = 12{,}2\ ms^{-1} \cdot 1{,}244\ s - \frac{1}{2}\, 9{,}8\ ms^{-2} \cdot (1{,}244\ s)^2 \simeq 7{,}6\ m}$$

por encima del techo, desde el suelo sería este valor más la altura h.

2) Si ahora tomo el origen en el suelo, cuando la bola llegue al suelo tendré $x=0$, y habrán pasado, según el enunciado, $4{,}25\ s$. Sustituyendo estos datos en

$$x = \underset{\substack{\shortparallel \\ h}}{x_0} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

h (ahora llamo x_0 a la altura del edificio, pues es la x inicial referida al suelo cuando lanzamos la bola)

resulta que

$$0 = h + 12{,}2\ ms^{-1} \cdot 4{,}25\ s - \frac{1}{2}\, 9{,}8\ ms^{-2} \cdot (4{,}25\ s)^2$$

de donde se obtiene que la altura del edificio es

$$\boxed{h \simeq 36{,}7\ m}$$

3) La bola llega al suelo cuando $t = 4{,}25$ s, según el enunciado, de manera que la veloc. con que la bola llega al suelo, será la v en $t = 4{,}25$ s, luego

$$\boxed{v = v_0 - gt} = 12{,}2\ ms^{-1} - 9{,}8\ ms^{-2} \cdot 4{,}25\ s = \boxed{-29{,}46\ ms^{-1}}$$

donde el signo − indica que la veloc. es hacia abajo (puesto que la veloc. inicial v_0 hacia arriba la tomamos como positiva)

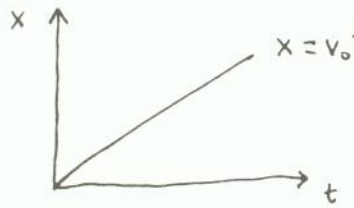
<u>Nota</u>. Podemos ver que la veloc. final es (en módulo) mayor que la inicial, y ello es debido a que la energía potencial que tenía la bola por estar inicialmente a una altura h sobre el suelo, se ha transformado en cinética (o sea, aumentando su veloc) al llegar al suelo.

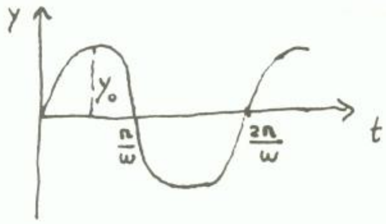
(7) Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas en función del t están dadas por $x = v_0 t$, $y = y_0 \operatorname{sen} \omega t$. a) Representar x e y en función del t. b) Representar la trayectoria de la partícula. c) ¿Qué fuerza es necesaria para producir este movimiento?. d) Encontrar las magnitudes de la velocidad y la aceleración en función del t.

a) $x = v_0 t$ es una recta

$y = y_0 \operatorname{sen} \omega t$ es una función sinusoidal

$\operatorname{sen} \omega t = 0 \Rightarrow \omega t = n\pi$, $t = \frac{n\pi}{\omega}$
$n = 0, 1, 2, \ldots$





o sea, avanza en línea recta en x y además va oscilando en y hacia arriba y abajo (sería como un electrocardiograma donde la aguja oscila y el papel avanza).

b) La trayectoria sería $y = y(x)$, es decir

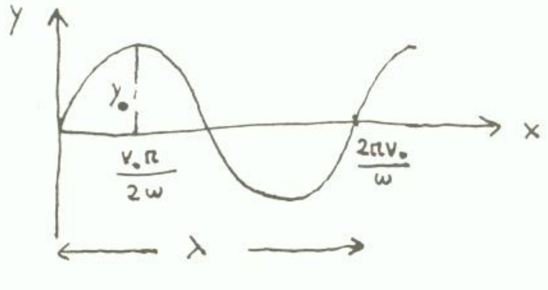
$$y = y_0 \operatorname{sen} \omega t \underset{\uparrow}{=} y_0 \operatorname{sen}\left(\omega \frac{x}{v_0}\right) \quad \text{que es otra sinusoide}$$

$x = v_0 t \rightarrow t = x/v_0$

donde y es máxima cuando $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega x}{v_0}\right) = 1$, o sea $\frac{\omega x}{v_0} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{v_0 \pi}{2\omega}$

y la longitud de onda de esta función sería $\lambda = 4 \frac{v_0 \pi}{2\omega} = 2\pi \frac{v_0}{\omega}$. Entonces:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega x}{v_0}\right) = 0$
$\Downarrow$
$\frac{\omega x}{v_0} = n\pi$
$x = \frac{n\pi v_0}{\omega}$
$n = 0, 1, 2, \ldots$



es el plano xy donde se mueve la partícula

c) En dirección x no hay aceleración pues es movim. uniforme rectilíneo, luego

$$a_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_x = m a_x = 0}$$

En dirección y tengo un m.a.s., luego

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y_0 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 y$$

luego $$\boxed{F_y = ma_y = -m\omega^2 y_0 \operatorname{sen} \omega t}$$

que es la única fuerza precisa para producir este movimiento.

d)

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = v_0} \quad , \quad \boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0}$$

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = \omega y_0 \cos \omega t} , \quad \boxed{a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 \underbrace{y_0 \operatorname{sen} \omega t}_{y} = -\omega^2 y}$$