Problemas de Cinemática HOJA-3

① Una partícula se mueve a lo largo del eje x de manera que su posición en cualquier t está dada por $x = 5t^2 + 1$ con x en metros y t en segundos. Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre a) 2 s y 3 s, b) 2 s y 2.1 s, c) 2 s y 2.001 s, d) 2 s y 2.00001 s. e) Calcular también la velocidad instantánea a los 2 s.

② Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones $x = pt$, $y = \frac{1}{2}pt^2$, con p constante. Determinar: 1°) Velocidad y aceleración del móvil; 2°) componentes intrínsecas de la aceleración; 3°) radio de curvatura.

③ La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a = 4 - t^2$ con a en ms^{-2} y t en segundos. Encontrar las expresiones de la velocidad y el desplazamiento en función del t, suponiendo que para $t = 3$ s, $v = 2\,ms^{-1}$ y $x = 9$ m.

④ Encontrar el radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria de un proyectil disparado haciendo un ángulo inicial α con la horizontal.

⑤ La aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje x es $a = 4x - 2$ (ms^{-2}) con x en metros. Suponiendo que $v_0 = 10\,ms^{-1}$ cuando $x_0 = 0$ m, encontrar la velocidad en cualquier otra posición.

⑥ Una piedra cae desde un globo que desciende a una velocidad uniforme de $12\,ms^{-1}$. Calcular la velocidad y la distancia recorrida por la piedra después de 10 s. Resolver el mismo problema para el caso cuando el globo se eleva a la misma velocidad.

⑦ Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba con 2 seg. de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 80 m/s. 1°) ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura?. 2°) ¿A qué altura sucederá?. 3°) ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento?

⑧ Un volante cuyo diámetro es de 2.44 m tiene una velocidad angular que disminuye uniformemente de 100 rpm en $t = 0$, hasta detenerse cuando $t = 4$ s. Calcular las aceleraciones tangencial y normal de un punto situado sobre el borde del volante cuando $t = 2$ s.

⑨ Un disco está rotando libremente alrededor de su eje horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor de la circunferencia exterior del disco, y un cuerpo, unido a la cuerda, cae bajo la acción de la gravedad (con movimiento uniformemente acelerado pero con aceleración menor que g). Cuando $t = 0$, la velocidad del cuerpo es de $0.04\,ms^{-1}$, y dos segundos más tarde el cuerpo ha caído 0.2 m. Encontrar las aceleraciones tangencial y normal, en cualquier t, de un punto cualquiera del borde del disco, de radio 0.1 m.

10. Una partícula recorre con celeridad cte ($|\vec{v}| = cte$) un círculo de 3 m de radio y da una revolución en 20 s. Encontrar: a) vectores de posición cuando han transcurrido 5, 7.5 y 10 s. b) Magnitud y dirección del desplazamiento durante el intervalo $5s \leq t \leq 10$ s. c) Velocidad media en este intervalo. d) Velocidad instantánea al comenzar y terminar el intervalo. e) Aceleración media en el intervalo. f) Vector aceleración instantánea al empezar y terminar el intervalo.

11. Una partícula de 1 gramo vibra con movim. armónico simple de 2 mm. de amplitud. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de $8 \times 10^3 \ ms^{-2}$. Calcular la frecuencia del movimiento y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de 1.2 mm. Escribir la ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre la partícula en función de la posición y del tiempo.

12. Una ametralladora dispara una bala con velocidad de $198.1 \ ms^{-1}$. Determinar los ángulos bajo los cuales la bala alcanzará un blanco situado a 137.1 m de distancia y 5.5 m de alto.

13. En un río cuya anchura es de 10 m y cuyas aguas llevan una veloc. cte de 18 Km/h intenta cruzar un fuera-borda, cuyo peso total es de 150 Kg, y cuyo motor le impulsa con una fuerza constante de 5 N. Suponiendo que la posición del fuera borda sea siempre $\perp$ a las orillas, calcular: a) tiempo que tardará en cruzar; b) desviación de la normal a la orilla que sufrirá el fuera-borda al cruzar el río; c) ecuación de la trayectoria.

14. Un turismo va por una carretera horizontal tras un camión. Entre los neumáticos dobles de las ruedas traseras del camión se atrancó una piedra. ¿A qué distancia del camión deberá ir el coche a fin de que la piedra desprendida de las ruedas del camión no dé en el coche?. Los dos vehículos se mueven a velocidad de 50 Km/h.

15. La posición de una partícula Q en un sistema de coordenadas O se mide por $\vec{r} = \vec{u}_x (6t^2 - 4t) + \vec{u}_y (-3t^2) + \vec{u}_z 3$ (m). a) Determinar la velocidad relativa constante del sistema O' (con respecto de O) si la posición de Q se mide por $\vec{r}\,' = \vec{u}_x (6t^2 + 3t) + \vec{u}_y (-3t^2) + \vec{u}_z 3$ (m). b) Demostrar que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas.

16. Un tren pasa por una estación a $30 \ ms^{-1}$. Una bola rueda sobre el piso del tren con una velocidad de $15 \ ms^{-1}$ dirigida a) en el sentido del movim. del tren; b) en el sentido opuesto; c) en dirección perpendicular a la del tren. Encontrar, en cada caso, la velocidad de la bola con respecto a un observador parado en la plataforma de una estación.

Soluciones problemas Cinemática

(1) veloc. media $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$. En todos los intervalos el instante inicial es el mismo ($t_0 = 2s$) y en él se tiene $x_0 = 5t_0^2 + 1 = 20 + 1 = 21\ m$, luego en todos los intervalos pedidos se tiene que $v_m = \frac{x - 21}{t - 2}$.

Entonces:

a) $t = 3\,s$, $x = 5t^2 + 1 = 5 \times 3^2 + 1 = 46\ m \Rightarrow \boxed{v_m} = \frac{46-21}{3-2} = \boxed{25\ m/s}$ con $\Delta t = t - 2 = 1s$

b) $t = 2{,}1\,s$, $x = 5t^2 + 1 = 5 \times (2{,}1)^2 + 1 = 23{,}05\,m \Rightarrow \boxed{v_m} = \frac{23{,}05 - 21}{2{,}1 - 2} = \boxed{20{,}5\ m/s}$ con $\Delta t = t - 2 = 0{,}1s$

c) $t = 2{,}001\,s$, $x = 5t^2 + 1 = 5 \times (2{,}001)^2 + 1 = 21{,}020005\,m \Rightarrow \boxed{v_m = 20{,}005\ m/s}$ con $\Delta t = t - 2 = 0{,}001s$

d) $t = 2{,}00001\,s$, $x = 5t^2 + 1 = 21{,}0002000005\ m \Rightarrow \boxed{v_m = 20{,}00005\ m/s}$ con $\Delta t = t - 2 = 0{,}00001s$

e) veloc. instantánea $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 1) = 10t \Rightarrow \boxed{v(t=2)} = 10 \times 2 = \boxed{20\ m/s}$

Nota: Se observa que conforme $\Delta t = t - 2 \to 0$, la veloc media v_m tiende a la veloc instantánea v (concepto de límite)

---

(3) $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int a\,dt = \int (4 - t^2)\,dt = 4t - \frac{t^3}{3} + C_1$

cálculo de C_1: se impone la condición del enunciado de que para $t = 3\,s \Rightarrow v = 2\ m/s$ $\Rightarrow 2 = 4 \times 3 - \frac{3^3}{3} + C_1 \Rightarrow C_1 = -1$

luego queda $\boxed{v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1}$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int v\,dt = \int \left(4t - \frac{t^3}{3} - 1\right) dt = 2t^2 - \frac{t^4}{12} - t + C_2$

cálculo de C_2: se impone la condición del enunciado de que para $t = 3\,s \Rightarrow x = 9\,m$ $\Rightarrow 9 = 2 \times 3^2 - \frac{3^4}{12} - 3 + C_2 \Rightarrow C_2 = 3/4$

luego queda $\boxed{x = 2t^2 - \frac{t^4}{12} - t + \frac{3}{4}}$

---

(5) Es un ejemplo en que no se conoce $a(t)$ sino $a(x)$, luego $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v\,dv = v\,a\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow v\,dv = \frac{dx}{dt} a\,dt \Rightarrow v\,dv = a\,dx \Rightarrow \int v\,dv = \int a\,dx$, que en este caso queda

$$\frac{v^2}{2} = \int (4x - 2)\,dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = 2x^2 - 2x + C$$

cálculo de C: se impone la condición del enunciado: $v = 10\ m/s$ cuando $x = 0\ m$ $\Rightarrow \frac{10^2}{2} = 2 \times 0^2 - 2 \times 0 + C \Rightarrow C = 5($

luego queda $\frac{v^2}{2} = 2x^2 - 2x + 50 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}}$

---

(8) $a_t = R\alpha$, $a_n = \omega^2 R$

cálculo de α: mov. circular uniformem. decelerado $\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

t inicial: $t_0 = 0$, $\omega_0 = 100\ rpm = 100 \times \frac{2\pi}{60} \frac{rad}{s} = 10{,}47\ rad/s$

t final: $t = 4$, $\omega = 0\ rpm = 0\ rad/s$

$\Rightarrow 0 = 10{,}47 + \alpha . 4 \Rightarrow \alpha = -2{,}62\ rad/s^2$

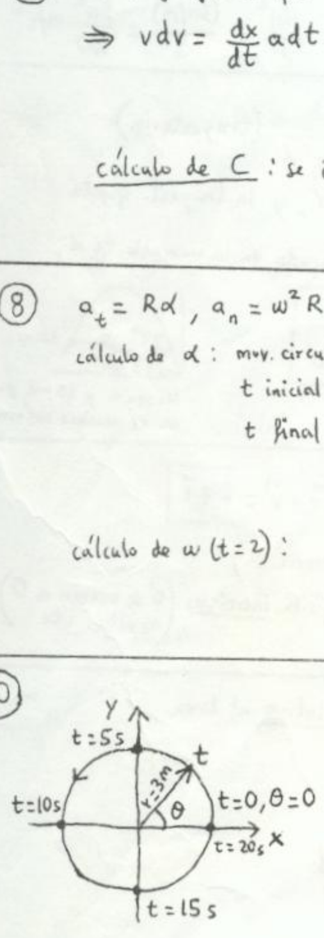
$\boxed{a_t(t=2)} = R\alpha(t=2) \underset{\alpha = cte\ \forall t}{=} R.\alpha = 1{,}22 \times (-2{,}62) = \boxed{-3{,}2\ m/s^2} < 0$ (frenado)

cálculo de $\omega(t=2)$: $\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \Rightarrow \omega(t=2) = 10{,}47 - 2{,}62 \times 2 = 5{,}23\ rad/s$

$\boxed{a_n(t=2) = \omega^2(t=2) . R = (5{,}23)^2 \times 1{,}22 = 33{,}4\ m/s^2}$

---

(10)



a) $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = 3\cos\theta\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,\theta\,\vec{j}$

mov. circular uniforme $\Rightarrow \theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{20} t = \frac{\pi}{10} t$

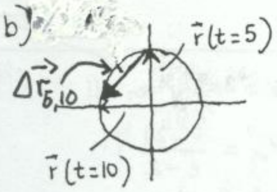
luego $\vec{r}(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec{i} + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec{j}$

y particularizando:

$\vec{r}(t=5) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = 0\vec{i} + 3\vec{j} = 3\vec{j}$

$\vec{r}(t=7{,}5) = 3\cos(0{,}75\pi)\vec{i} + 3\,\text{sen}(0{,}75\pi)\vec{j} = -2{,}12\vec{i} + 2{,}12\vec{j}$

$\vec{r}(t=10) = 3\cos\pi\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,\pi\,\vec{j} = -3\vec{i} + 0\vec{j} = -3\vec{i}$

b) 

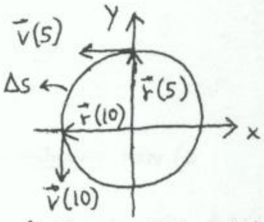
vector desplazam. $\boxed{\Delta\vec r_{5,10} = \vec r(10) - \vec r(5) = -3\vec i - 3\vec j \text{ m}}$

cuyo módulo es $\boxed{|\Delta\vec r_{5,10}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt2 = 4{,}24 \text{ m}}$

y su direcc. y sentido los dan su vector unitario $\boxed{\vec u = \frac{\Delta\vec r}{|\Delta\vec r|} = \frac{-3\vec i - 3\vec j}{3\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}(-\vec i - \vec j)}$

c) $\boxed{\vec v_{m_{5,10}}} = \frac{\Delta\vec r_{5,10}}{\Delta t} = \frac{\vec r(10) - \vec r(5)}{10-5} = \boxed{-\frac{3}{5}(\vec i + \vec j) \text{ m/s}}$ $\left(|\vec v_{m_{5,10}}| = \sqrt{(3/5)^2 + (3/5)^2} = 6/5 \text{ m/s}\right)$

d) veloc. instant. $\forall t$: $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = -\frac{3\pi}{10}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec i + \frac{3\pi}{10}\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec j$



y particularizando $\boxed{\vec v(t=5)} = -\frac{3\pi}{10}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,\vec i + \frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{2}\,\vec j = \boxed{-\frac{3\pi}{10}\vec i \text{ m/s}}$

$\boxed{\vec v(t=10)} = -\frac{3\pi}{10}\,\text{sen}\,\pi\,\vec i + \frac{3\pi}{10}\cos\pi\,\vec j = \boxed{-\frac{3\pi}{10}\vec j \text{ m/s}}$

¡ $\vec v$ es tg a la trayectoria !

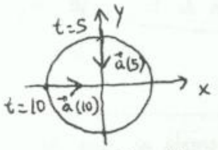
Nótese que $|\vec v(5)| = |\vec v(10)| = \frac{3\pi}{10} = |\vec v(t)|\ \forall t$ por ser uniforme (celeridad cte). Por otro lado, aunque $|\vec v| = \frac{3\pi}{10} = 0{,}94$ m/s, sin embargo $|\vec v_m| = 6/5 = 1{,}2$ m/s, lo que refleja que $|\vec v| \neq |\vec v_m|$ pues en $\vec v$ se usa Δs (arco) mientras que en $\vec v_m$ se usa $\Delta\vec r$ (cuerda).

e) $\boxed{\vec a_{m_{5,10}}} = \frac{\Delta\vec v_{5,10}}{\Delta t} = \frac{\vec v(t=10) - \vec v(t=5)}{10-5} = \frac{1}{5}\left(-\frac{3\pi}{10}\vec j + \frac{3\pi}{10}\vec i\right) = \boxed{\frac{3\pi}{50}(\vec i - \vec j) \text{ m/s}^2}$

f) $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{3\pi^2}{10^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec i - \text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right)\vec j\right] = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{apartado a)}}}{\frac{\pi^2}{100}(-\vec r)} = -\frac{\pi^2}{100}\vec r \Rightarrow$ $\vec a$ es radial (normal), lógico pues estamos en mov. circular uniforme ($a_t = 0$)

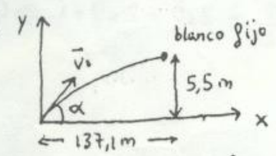
y particularizando: $\boxed{\vec a(t=5)} = \frac{3\pi^2}{100}\left[-\cos\frac{\pi}{2}\,\vec i - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,\vec j\right] = \boxed{-\frac{3\pi^2}{100}\vec j}$

$\boxed{\vec a(t=10)} = \frac{3\pi^2}{100}\left[-\cos\pi\,\vec i - \text{sen}\,\pi\,\vec j\right] = \boxed{\frac{3\pi^2}{100}\vec i}$



Nota: se puede comprobar que $a = a_n$ pues $a = |\vec a| = \frac{\pi^2}{100}|\vec r| = \frac{\pi^2}{100}3 = \frac{3\pi^2}{100}$ m/s^2 ; $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{|\vec v|^2}{r} = \frac{(3\pi/10)^2}{3} = \frac{3\pi^2}{100}$ m/s^2

---

(12) 

$$\begin{cases} x = v_{0_x}t = (v_0\cos\alpha)t & \rightarrow t = x/v_0\cos\alpha \\ y = v_{0_y}t - \frac12 gt^2 = (v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \frac12 gt^2 & \rightarrow y = x\,\text{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \text{ (trayectoria)}\end{cases}$$

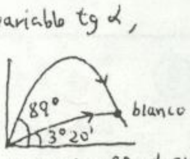
y para dejarlo en una ecuac. en tg α usamos $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$, y la trayect. queda

$y = x\,\text{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\text{tg}^2\alpha) \Rightarrow \left(\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)\text{tg}^2\alpha - x\,\text{tg}\,\alpha + \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + y\right) = 0$ que es ec. de 2º grado en la variable tg α,

luego su solución es

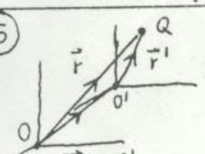
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x \pm\sqrt{x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2}+y\right)}}{2\left(\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)} \begin{cases}\text{tg}\,\alpha = 58{,}26 \Rightarrow \boxed{\alpha = 89^\circ} \\ \text{tg}\,\alpha = 0{,}058 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3^\circ 20'}\end{cases}$$

imponemos impacto en blanco haciendo $x = 5{,}5$ m, $y = 137{,}1$ m



No son α y $90-\alpha$ pues no es alcance máximo

---

(15) 

$\vec r = \vec{OO'} + \vec r\,'$

$\vec v = \vec v_{O'O} + \vec v\,'$

a) $\vec r = (6t^2 - 4t)\vec i - 3t^2\vec j + 3\vec k \Rightarrow \vec v = (12t-4)\vec i - 6t\vec j$

$\vec r\,' = (6t^2+3t)\vec i - 3t^2\vec j + 3\vec k \Rightarrow \vec v\,' = (12t+3)\vec i - 6t\vec j$

$\boxed{\vec v_{O'O} = \vec v - \vec v\,' = -7\vec i}$

que es cte (mov. de traslación uniforme) y negativa (O' se acerca a O en direcc. x)

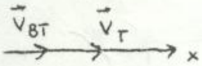
b) $\vec a = d\vec v/dt = 12\vec i - 6\vec j$; $\vec a\,' = d\vec v\,'/dt = 12\vec i - 6\vec j \Rightarrow \boxed{\vec a = \vec a\,'}$ sist. inerciales (O' se acerca a O a veloc. cte)

---

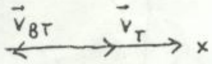
(16) $\vec v_B$: veloc. absoluta de la bola respecto al observador fijo en la estación | $\vec v_{BT}$: veloc. de la bola relativa al tren

$\vec v_T$: " " del tren " " " " " "

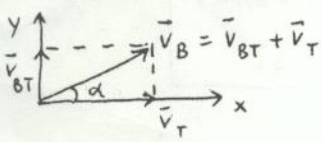
$$\vec v_{BT} = \vec v_B - \vec v_T \Rightarrow \boxed{\vec v_B = \vec v_{BT} + \vec v_T}$$

a) 

$\vec v_T = 30\vec i$, $\vec v_{BT} = 15\vec i \Rightarrow \boxed{\vec v_B = 15\vec i + 30\vec i = 45\vec i \text{ m/s}}$

b) 

$\vec v_T = 30\vec i$, $\vec v_{BT} = -15\vec i \Rightarrow \boxed{\vec v_B = -15\vec i + 30\vec i = 15\vec i \text{ m/s}}$

c) 

$\vec v_T = 30\vec i$, $\vec v_{BT} = 15\vec j \Rightarrow \boxed{\vec v_B = 30\vec i + 15\vec j} \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{30^2+15^2} = 33{,}5 \text{ m/s}}$ módulo

$\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{30} \Rightarrow \boxed{\alpha = 26^\circ 34'}$ dirección