

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### *A – NOCIONES FUNDAMENTALES*

- 1.14. La relación entre dos cantidades ( $A$ ) y ( $B$ ) de la misma magnitud es 2. Si la unidad con la cual se ha medido ( $A$ ) es la mitad de la unidad con la que se ha medido ( $B$ ), ¿qué relación existe entre  $A$  y  $B$  (las respectivas medidas de ( $A$ ) y ( $B$ ))?

(Solución:  $A = 4B$ )

- 1.15. ¿Cómo habría que modificar la ecuación  $F = ma$  para que fuese coherente con las unidades m, kg, s, dyn?

(Solución:  $F = 10^5 ma$ )

- 1.16. Si se emplea como base dimensional en Mecánica ( $F$ ,  $L$ ,  $T$ ), ¿cuál será la fórmula dimensional de la potencia?

(Solución:  $[P] = FLT^{-1}$ )

- 1.17. En Electricidad, además de longitud,  $L$ , masa,  $M$ , y tiempo,  $T$ , se introduce una cuarta magnitud fundamental, que puede ser la intensidad,  $I$ . Averiguar la fórmula dimensional de la resistencia eléctrica en la base  $L$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $I$ .

(Solución:  $L^2 MT^{-3} I^{-2}$ )

- 1.18. El movimiento de un punto es tal que su distancia,  $x$ , a un punto fijo varía con el tiempo,  $t$ , según la ecuación  $x = at + bt^2$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. ¿Cuáles deben ser sus fórmulas dimensionales para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea?

(Solución:  $LT^{-1}$  y  $LT^{-2}$ )

- 1.19. ¿Cuáles han de ser las fórmulas dimensionales, en la base ( $L$ ,  $M$ ,  $T$ ), de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que  $x$  sea una longitud, si  $m$  representa masa,  $v$ , velocidad,  $\rho$ , densidad,  $V$ , volumen,  $\gamma$ , peso específico,  $Q$ , calor,  $t$ , tiempo,  $P$ , potencia y  $p$ , presión en la ecuación siguiente?

$$x = \frac{mv^2a^2}{\rho V \gamma} + \frac{Q t + c}{P p b^2}$$

(Solución:  $[a] = L^{-3/2} M^{1/2}$ ;  $[b] = M^{-1/2} T^2$ ;  $[c] = L^2 M T^{-1}$ )

#### B – TEOREMA DE PI

- 1.20. Se lanza un proyectil de masa  $m$  y peso  $W$  desde el suelo con una velocidad inicial  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Averiguar el alcance  $x$ .

(Solución:  $x = \frac{v_0^2}{g} \phi(\alpha)$ )

- 1.21. Un depósito de gran sección tiene un pequeño orificio a una profundidad  $h$ . Averiguar la velocidad de salida del fluido suponiendo que sólo depende de  $h$ , de la densidad del fluido,  $\rho$ , y de su peso específico,  $\gamma$ . (Dato:  $\gamma = \rho g$ ).

(Solución:  $v = C\sqrt{gh}$ )

- 1.22. Averiguar la tracción (fuerza),  $F$ , que produce una hélice de radio  $r$ , que gira con velocidad angular  $\omega$ , en un fluido de densidad  $\rho$ .

(Solución:  $F = C \rho \omega^2 r^4$ )

- 1.23. Averiguar la fuerza tangencial,  $F$ , que hay que aplicar en la periferia de un cilindro de radio  $r$  y momento de inercia  $I$  para que gire con una aceleración angular  $\alpha$ .

(Solución:  $F = CaI/r$ )

- 1.24. El colibrí es un pájaro que se puede mantener prácticamente inmóvil en el aire por medio del aleteo. Obtener la expresión de la potencia,  $P$ , que debe suministrar a las alas para soportar su peso,  $W$ , en el aire de densidad  $\rho$ , suponiendo que sólo intervenga otra variable que es la sección de sus alas,  $A$ .

(Solución:  $P = C \sqrt{\frac{W^3}{\rho A}}$ )

#### C – TEORÍA DE MODELOS

- 1.25. Una esfera,  $A$ , maciza y homogénea pende de una cuerda de 1 cm de radio que se halla a punto de romperse. ¿Cuál debería ser el radio de la cuerda para soportar en las mismas condiciones una esfera,  $B$ , de volumen 9 veces el de la esfera  $A$ . ¿Y si la esfera  $B$  tuviera un diámetro 9 veces el de la esfera  $A$ ?

(Solución: 3 cm; 27 cm)

- 1.26. Una piscina rectangular se encuentra a 10 cm de altura sobre el suelo soportada por cuatro columnas de 10 cm de radio. Si la piscina se hiciera 10 veces más larga, más ancha más profunda, se pregunta:

a) ¿Qué radio necesitarían las nuevas columnas?

b) ¿Qué altura?

c) ¿En cuánto habría aumentado la capacidad de la piscina?

(Solución: a) 316,2 cm; b) cualquiera, pues la resistencia de las columnas no depende de la altura; c) se habría multiplicado por  $10^3$ )

- 1.27. Supóngase que la fuerza de sustentación de un avión,  $F$ , depende solamente de la velocidad,  $v$ , de la densidad del aire,  $\rho$ , y de un área plana,  $A$ . Se construye un modelo reducido y se ensaya en un túnel aerodinámico.

a) Si para una velocidad del aire de 20 m/s se midió una fuerza de 200 N, ¿qué fuerza aparecerá cuando se duplique la velocidad?

b) Si en el túnel se empleara un fluido de densidad  $\rho/4$  con velocidad  $v/2$  y el modelo reducido tuviera una escala 1/50 y sobre él se hubiera medido una fuerza de 10 N ¿cuál sería la fuerza que aparecería sobre el prototipo?

(Solución:  $F = C \rho v^2 A$ ; a) 800 N; b) 400.000 N)

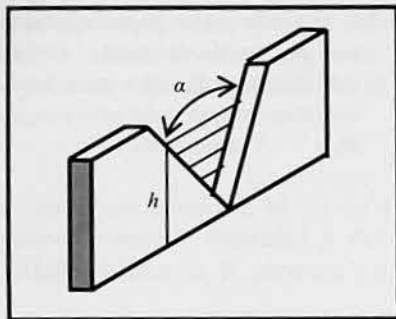
- 1.28. Considérese un vertedero triangular consistente en una pared vertical con un orificio triangular simétrico respecto de la vertical que pasa por el vértice de ángulo  $\alpha$ , como se indica en la figura. Un líquido de densidad  $\rho$  y peso específico  $\gamma$  fluye por él bajo una altura  $h$ .

a) Averiguar el caudal,  $Q$  (volumen/tiempo), que sale por el vertedero.

b) Si se construye un modelo semejante de vertedero a escala 1/20 del prototipo, y se mide en él un caudal de 3 l/s, ¿cuál será el caudal que saldrá por el prototipo?

(Solución; a)  $Q = \sqrt{gh^5} \phi(\alpha)$ ; b) 5367

l/s)



1.29. Se desea construir un gran péndulo con una cuerda de 3 m de longitud y masa despreciable que colgará del techo de una gran vitrina en la que reinará el vacío, y donde se le dotará inicialmente de oscilaciones de amplitud máxima correspondientes a un ángulo de  $60^\circ$  respecto de la vertical. La lenteja del péndulo tendrá una masa de 9 kg. Se desea averiguar el período de las oscilaciones y, para ello, se ha construido un modelo a escala reducida 1/3 y en su extremo se ha situado una masa de 1 kg. Supóngase que medidas hechas con el modelo en una cámara de vacío para un ángulo de oscilación máximo de  $60^\circ$  ofrecieron un resultado de un período de 2,2 s. Se pregunta:

a) ¿Cuál será el período del prototipo?

b) Si la masa de la lenteja del modelo con la que se obtuvieron los 2,2 s hubiera sido también de 9 kg, ¿cuál sería el período del prototipo?

c) Y si los ensayos se hubieran hecho con un modelo que hubiera mantenido la escala 1/3 tanto en las oscilaciones máximas, o sea, de  $20^\circ$ , como en la masa de la lenteja, o sea de 3 kg, ¿cuál sería el período del prototipo?

d) ¿Cuáles son las condiciones para conseguir similitud total en estos ensayos?

(Solución: a) 3,81 s; b) 3,81 s; c) incógnita; d) igual valor de cada uno de los dos monomios en modelo y prototipo)

---

## PROBLEMAS PROPUESTOS

---

### *A – VELOCIDAD Y ACELERACIÓN*

- 2.11.** Si un móvil recorre una distancia con velocidad  $v_1$  (constante) y, a continuación recorre otra distancia igual con velocidad  $v_2$  (constante), demostrar

que la rapidez media,  $v_m$ , está relacionada con  $v_1$  y  $v_2$  por:  $\frac{2}{v_m} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$ .

- 2.12.** Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un punto son:

$$\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = 3 \sin 2t \end{cases}$$

Averiguar la ecuación de la trayectoria y la aceleración en el instante  $t = \pi/2$ .

(Solución:  $x^2 + y^2 = 3^2$ , circunferencia de radio 3 centrada en el origen;  
 $a_x = 12$  y  $a_y = 0$ )

### *B – MOVIMIENTO RECTILÍNEO*

- 2.13.** En el instante  $t = 0$  una partícula parte del origen de coordenadas con movimiento rectilíneo estando dada su velocidad por  $v = 40 - 2x$ . Averiguar: a) el instante en que la partícula pasa por  $x = 3$ ; b) la aceleración en el instante inicial ( $t = 0$ ).

(Solución: a) 0,0813; b) -80)

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{v_{ar}}{v_r} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\varphi = 41,8^\circ}$$

b) La velocidad absoluta,  $v_{ab}$ , valdrá, a partir del triángulo rectángulo:

$$v_r^2 = v_{ab}^2 + v_{ar}^2 \Rightarrow v_{ab} = \sqrt{v_r^2 - v_{ar}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$$

$$t = \frac{h}{v_{ab}} = \frac{200}{\sqrt{20}} = \boxed{44,7 \text{ s}}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### A – VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

2.11. Si un móvil recorre una distancia con velocidad  $v_1$  (constante) y, a continuación recorre otra distancia igual con velocidad  $v_2$  (constante), demostrar que la rapidez media,  $v_m$ , está relacionada con  $v_1$  y  $v_2$  por:  $\frac{2}{v_m} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$ .

2.12. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un punto son:

$$\begin{cases} x = 3 \cos 2t \\ y = 3 \sin 2t \end{cases}$$

Averiguar la ecuación de la trayectoria y la aceleración en el instante  $t = \pi/2$ .

(Solución:  $x^2 + y^2 = 3^2$ , circunferencia de radio 3 centrada en el origen;  
 $a_x = 12$  y  $a_y = 0$ )

### B – MOVIMIENTO RECTILÍNEO

2.13. En el instante  $t = 0$  una partícula parte del origen de coordenadas con movimiento rectilíneo estando dada su velocidad por  $v = 40 - 2x$ . Averiguar: a) el instante en que la partícula pasa por  $x = 3$ ; b) la aceleración en el instante inicial ( $t = 0$ ).

(Solución: a) 0,0813; b) -80)

2.14. Un cuerpo cae libremente en el vacío partiendo del reposo durante 10 segundos. ¿Qué distancia recorre en el último segundo?

(Solución: 93,20 m)

2.15. Se deja caer una piedra en un pozo. Al cabo de tres segundos se oye el eco de la piedra al golpear con el fondo. Supóngase que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s y que la resistencia que ofrece el aire a la piedra en su caída se puede despreciar. a) calcular la profundidad del pozo y b) ¿qué tiempo es mayor el que la piedra está bajando o el que el sonido está subiendo?

(Solución: a) 40,7 m, b) la piedra bajando)

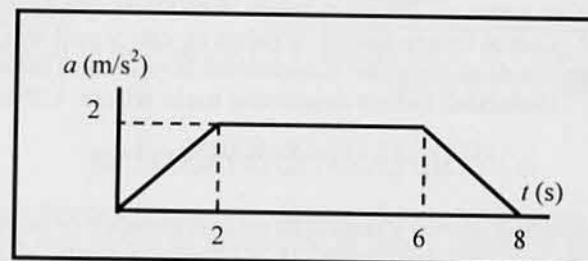
2.16. Un coche que se mueve a 100 km/h tiene delante a una distancia de 500 m otro que se mueve a 50 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo y qué distancia habrá recorrido?

(Solución: 36 s y 1 km)

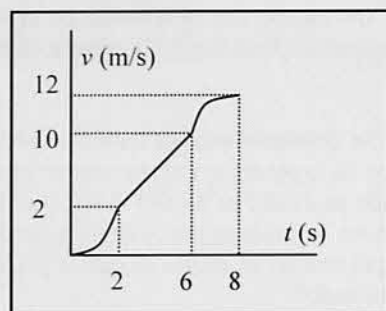
2.17. Nicolás y Andrés se sitúan, respectivamente, en la base y en lo alto de una torre de 30 m. Supóngase que Nicolás lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s y en el mismo instante Andrés deja caer sin velocidad inicial otra piedra. ¿A qué altura de la torre, medida desde el suelo, se cruzarán ambas piedras si se desprecia la resistencia del aire? ¿Alcanzará a Andrés la piedra lanzada por Nicolás?

(Solución: 19,0 m; no)

2.18. La gráfica de la aceleración de un movimiento rectilíneo, que parte del reposo, viene representada en la figura. Dibujar la gráfica correspondientes a  $v$ - $t$  y determinar la posición del móvil en el instante  $t = 6$  s si en el instante inicial el móvil se hallaba en el origen.



(Solución:  $x_6=25,3$  m)



### C – MOVIMIENTO DE PROYECTILES

2.19. Un jugador de baloncesto efectúa un lanzamiento de un balón situado a una altura de 2 m con un ángulo de  $45^\circ$  y una velocidad inicial de 7,3 m/s desde una distancia de 4 m a la base de la canasta, o sea, medidos sobre el suelo del campo hasta la vertical del aro de la canasta. ¿A qué altura sobre el suelo debe estar situado el aro de la canasta para que el jugador enceste perfectamente, de modo que el centro del balón pase por el centro del aro? (Despréciase la resistencia del aire).

(Solución: 3,05 m)

2.20. Nicolás se encuentra asomado en la galería de su casa, que está a 6 m de altura, hablando con su hermana Jimena que está en el jardín. Ésta le pide que le lance una pelota y a ser posible que le caiga en las manos, que se hallan a 1 m del suelo. Como Jimena se halla a una distancia horizontal de 4 m desde la vertical de la casa, Nicolás calcula que debe comunicarle a la pelota una velocidad de 3 m/s con una inclinación de  $45^\circ$  hacia arriba. ¿Caerá la pelota en las manos de Jimena o deberá desplazarse ésta hacia delante o hacia atrás? ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en caer y cuál será su velocidad en el instante de su recogida? (Despréciase la resistencia del aire)

(Solución: Deberá desplazarse hacia delante; 1,25 s; 10,3 m/s)

### D – COMPONENTES INTRÍNSECAS

2.21. Las componentes normal y tangencial de la aceleración de un móvil en un instante dado son, respectivamente, 10 y 12 m/s<sup>2</sup>. Calcular el ángulo que forman velocidad y aceleración.

(Solución:  $39,8^\circ$ )

### E – MOVIMIENTO CIRCULAR

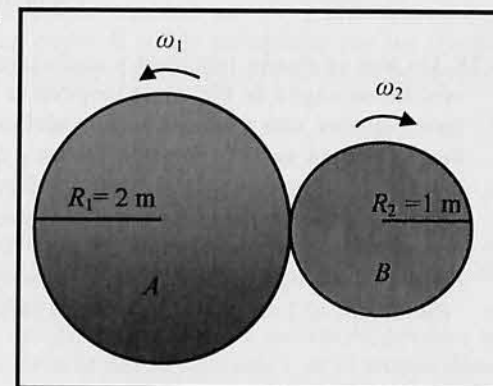
2.22. Una partícula tarda 2 segundos en describir una circunferencia de 4 m de radio con velocidad angular constante. Calcular: a) la frecuencia, b) la velocidad angular, c) la velocidad, d) las componentes tangencial y normal de la aceleración, e) la aceleración angular y f) el ángulo entre velocidad y aceleración.

(Solución: a)  $1/2$  vuelta/s; b)  $\pi$  rad/s; c)  $4\pi$  m/s, d)  $a_t=0$ ,  $a_n=4\pi^2$  m/s<sup>2</sup>, e) 0, f)  $90^\circ$ )

2.23. Calcular el valor de la aceleración normal de un punto situado en el ecuador de la Tierra en su rotación terrestre si el radio de la Tierra se puede considerar igual a 6370 km y compararlo con el de la aceleración de la gravedad, g. Repetir el cálculo para la órbita terrestre alrededor del Sol admitiendo que el radio de la órbita sea de  $1,5 \times 10^{11}$  m.

(Solución: 0,034 m/s<sup>2</sup>, 0,3 %, 0,006 m/s<sup>2</sup>, 0,06 %)

2.24. A la rueda B de la figura se le aplica una aceleración angular de 2 rad/s<sup>2</sup>. Si ambas ruedas parten del reposo, a) ¿cuál será la velocidad angular de cada rueda al cabo de 5 s?; b) ¿cuál será la aceleración angular de la rueda A? y c) ¿cuáles serán las aceleraciones tangencial y normal de un punto de la periferia de cada rueda en ese instante?



(Solución: a) 10 rad/s para la B y 5 rad/s para la A; b) 1 rad/s<sup>2</sup>; c) 2 y 50 m/s<sup>2</sup> para la A y 2 y 100 m/s<sup>2</sup> para la B)

### F – MOVIMIENTO RELATIVO

2.25. Jimena quiere averiguar la velocidad del vagón de metro en el que está viajando. Para ello se ha provisto de un reloj y cuando un tren cruza por la vía adyacente en sentido contrario, toma dos lecturas: la primera corresponde al instante en que el punto delantero de la máquina del tren pasa delante de ella, y la segunda al instante en que el último punto de la cola del tren pasa también delante de ella. El intervalo transcurrido es de 5 segundos. Si

la longitud del tren completo es de 90 metros ¿cuál es la velocidad de su tren si se supone que los trenes circulan a la misma velocidad constante?  
(Solución: 32,4 km/h)

2.26. Julián se encuentra en un tren que se mueve uniforme y rectilíneamente a 100 km/h. Si lanza una pelota con una velocidad, respecto de él, de 100 km/h, ¿con qué velocidad verá Sofía la pelota en el momento del lanzamiento si ella se encuentra en el andén y si Julián lanzó la pelota: a) en la misma dirección y sentido que el movimiento del tren; b) en sentido contrario y c) verticalmente para él?

(Solución: a) 200 km/h; b) 0 km/h; c) 141,4 km/h y ángulo de 45°).

2.27. Los pueblos A y B, se hallan en la misma orilla de un río pero separados una distancia de 100 km. Un barco realiza el recorrido de ida y vuelta de A a B en 4 horas cuando la corriente del río es de 10 km/h de A a B. ¿Cuánto tarda en cada trayecto? ¿Tardaría más o menos si las aguas estuvieran en reposo? Calcularlo.

(Solución: 1,61 y 2,39 h; menos, 3,85 h)

2.28. Un tren se mueve rectilínea y uniformemente con una velocidad de 100 m/s. En un vagón de 800 m de longitud se han situado en su centro dos cañones iguales, uno apuntando hacia adelante y el otro hacia atrás. Los artilleros disparan simultáneamente ambos y los proyectiles salen con una velocidad, respecto de los artilleros, de 200 m/s. Se pregunta: a) ¿cuánto tiempo tardan los proyectiles en llegar a la puerta delantera y trasera?; b) ¿qué distancia recorre cada proyectil respecto de los artilleros?; c) ¿qué distancia recorre cada proyectil para los observadores que están en el andén?

(Solución: a) 2 s; b) 400 m; c) 600 m para la puerta delantera y 200 m para la trasera)

## Capítulo 3

### DINÁMICA DEL PUNTO

#### 3.1. PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LAS FUERZAS

**Fuerza** es todo aquello capaz de alterar el movimiento de un cuerpo o de deformarlo.

El principio de independencia de las fuerzas establece que *varias fuerzas que actúan en un mismo punto se pueden sustituir por su resultante*. Así mismo, una fuerza actuando sobre un punto se puede reemplazar por sus componentes. O sea, cada fuerza produce su efecto independientemente de las demás.

#### 3.2. LEYES DE NEWTON

**Primera ley de Newton.** «Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, mientras no haya una fuerza que actúe sobre él». («Principio de la inercia»).

**Segunda ley de Newton.** «Si una fuerza actúa sobre un cuerpo, produce un cambio de movimiento proporcional a la fuerza aplicada y en la misma dirección de ésta». («Ecuación fundamental de la Dinámica»).

**Tercera ley de Newton.** «Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último reacciona sobre el primero con una fuerza igual y de sentido contrario». («Principio de la acción y reacción»).

La expresión matemática de la segunda ley de Newton es:

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

donde  $F$  es la fuerza, que en el Sistema Internacional de Unidades (SI) se mide en newtons (N) y  $m$  la masa, que en el SI se mide en kilogramos (kg). También se emplea como unidad de fuerza, aunque no pertenezca al SI, el kilopondio, kp, o kilogramo fuerza, que equivale a 9,81 N. El producto  $mv$  se denomina

También podría haberse calculado por energías:

Energía total en  $C$  menos la energía mecánica perdida por rozamiento entre  $C$  y  $D$  será igual a la energía total en  $D$ , que coincidirá con su energía cinética si se toma en  $D$  el origen de energías potenciales. En ese caso, se tendrá

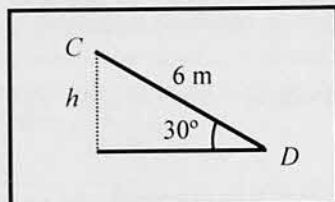
$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh - F_{roz} \cdot s = \frac{1}{2}mv_D^2,$$

siendo  $h = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ m}$  y  $s = 6 \text{ m}$ .

Sustituyendo en la ecuación precedente, resulta:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}80 \times 1,22^2 + 80 \times 9,81 \times 3 - 136 \times 6 =$$

$$1,60 \times 10^3 \text{ J}$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS

### A – LEYES DE NEWTON

- 3.11. Dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  se encuentran unidos. Una fuerza de 90 N actúa sobre ambos y les produce una aceleración de  $10 \text{ m/s}^2$ . ¿Qué aceleración produciría esa misma fuerza sobre cada una de ellos por separado si  $m_1 = 2m_2$ ?

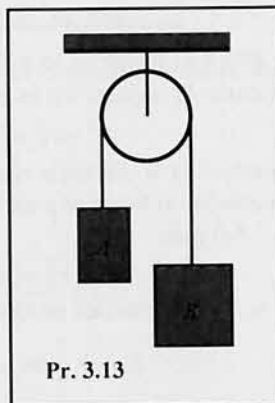
(Solución: 15 y  $30 \text{ m/s}^2$ )

- 3.12. Un cuerpo de masa  $m$  desciende libremente por un plano inclinado un ángulo  $\varphi$ . Calcular su aceleración de caída en ausencia de rozamiento.

(Solución:  $g \sin \varphi$ )

- 3.13. Máquina de Atwood. Calcular la tensión de la cuerda y la aceleración con la que se mueven los cuerpos  $A$  y  $B$  de la figura, de masas 20 y 100 kg, respectivamente, suponiendo que no hay rozamiento y que las masas de la cuerda y de la polea son despreciables.

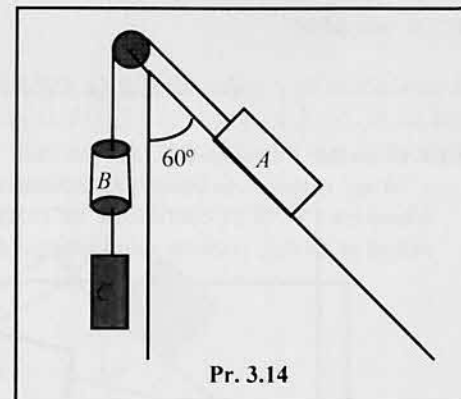
(Solución: 327 N y  $6,54 \text{ m/s}^2$ )



Pr. 3.13

- 3.14. Indicar el sentido del movimiento del sistema de la figura y calcular las tensiones de las dos cuerdas suponiendo que carecen de masa, lo mismo que la polea, y que los cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , poseen 80, 20 y 30 kg de masa, respectivamente. Supóngase que no existe rozamiento.

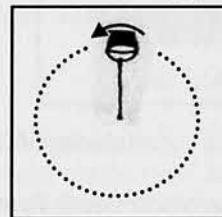
(Solución:  $A$  asciende; 453 y 272 N)



Pr. 3.14

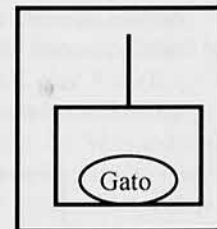
- 3.15. Un niño está jugando con un pequeño cubo lleno de agua. Su hermano mayor le dice que si hace dar al cubo una vuelta vertical de medio metro de radio con una velocidad, en su punto más alto, de  $8 \text{ km/h}$ , el agua no se caerá. ¿Se mojará el niño pequeño al hacer el experimento para comprobar la teoría de su hermano?

(Solución: No)

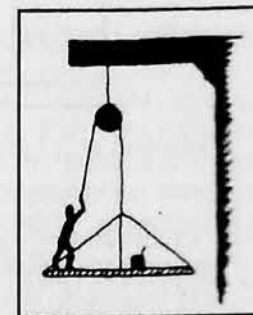


- 3.16. Mediante una cuerda se sube una jaula de 2 kg de masa con un gato de 5 kg de masa en su interior. La aceleración con la que se sube la jaula es de  $2 \text{ m/s}^2$ . Si se desprecia la masa de la cuerda, calcular: a) la tensión de la cuerda; b) la fuerza que el suelo de la jaula ejerce sobre el gato.

(Solución: a) 82,7 N; b) 59,1 N)

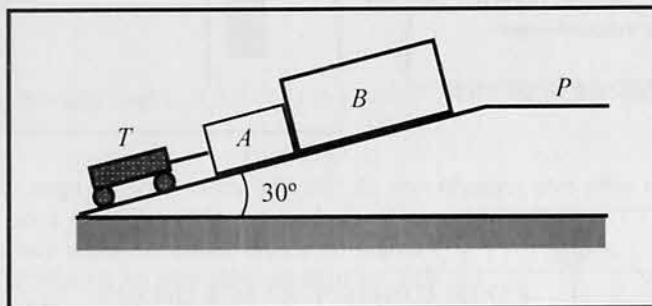


- 3.17. Para pintar la fachada de su casa, Nicolás construye el andamio indicado en la figura. Para hacerlo subir, tira de la cuerda y el tablero inferior del andamio ejerce sobre él una fuerza de 192 N. La masa de Nicolás es de 70 kg, la del bote de pintura, de 10 kg y la del andamio, de 30 kg. Suponiendo despreciables las masas de la cuerda y de la polea, averiguar la aceleración con la que está subiendo Nicolás.

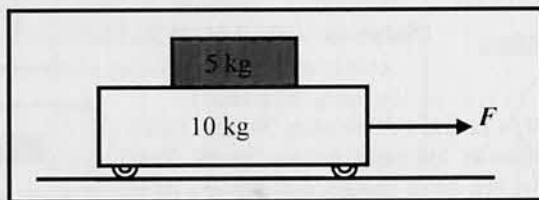


(Solución:  $2,99 \text{ m/s}^2$ )**B – FUERZA DE ROZAMIENTO**

- 3.18. El tractor  $T$  empuja con una fuerza de  $1000 \text{ N}$  las cajas  $A$  y  $B$ , de masas  $20$  y  $30 \text{ kg}$ , respectivamente, que ascienden por la rampa de la figura hacia la plataforma  $P$ . Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las cajas y la rampa es de  $0,3$ , ¿cuánto vale la fuerza de contacto entre  $A$  y  $B$ ?

(Solución:  $601 \text{ N}$ )

- 3.19. El coeficiente de rozamiento estático entre los dos bloques de la figura es de  $0,5$  y el cinético es de  $0,4$ , y con el suelo se admite que el rozamiento es despreciable. Averiguar: a) la aceleración de cada bloque y la fuerza de rozamiento entre ambos bloques en los dos casos siguientes: I) si  $F$  vale  $15 \text{ N}$  y II) si  $F$  vale  $200 \text{ N}$ ; b) el valor máximo de  $F$  para que el bloque de arriba no deslice sobre el de abajo.

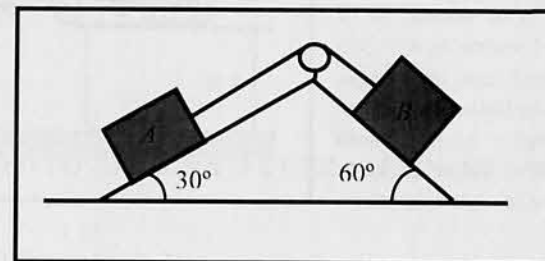


(Solución: a) I)  $1 \text{ m/s}^2$  y  $5 \text{ N}$ ; II)  $a_5 = 3,92 \text{ m/s}^2$ ;  $a_{10} = 18,0 \text{ m/s}^2$  y  $19,6 \text{ N}$ ; b)  $73,6 \text{ N}$ )

- 3.20. Un cuerpo desciende por un plano inclinado  $30^\circ$  por la acción de su propio peso con una aceleración constante de  $3 \text{ m/s}^2$ , ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento cinético?

(Solución:  $0,224$ )

- 3.21. Si el cuerpo  $A$  tiene una masa de  $10 \text{ kg}$  y el  $B$ ,  $20 \text{ kg}$ , y el coeficiente de rozamiento estático con los planos es de  $0,3$  y el cinético  $0,2$ : a) ¿se moverá el sistema? y b) si se mueve, ¿en qué sentido lo hará y con qué aceleración si se desprecia la masa y el rozamiento de la polea?



(Solución: a) Sí; b) El cuerpo  $B$  descenderá con una aceleración de  $2,81 \text{ m/s}^2$ )

**C – TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA**

- 3.22. Miguel, jugador de fútbol, golpea el balón de  $430 \text{ g}$  de masa horizontalmente sin elevarlo del suelo y en línea recta con una velocidad de  $60 \text{ km/h}$  hacia Javier. Éste tarda en detenerlo totalmente un tiempo de  $0,1 \text{ s}$ . Averiguar: a) la cantidad de movimiento inicial del balón y b) la fuerza media ejercida por Javier para detener el balón si se desprecian los rozamientos.

(Solución: a)  $7,17 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ ; b)  $71,7 \text{ N}$ )

- 3.23. *Momento cinético de la Tierra.* Averiguar el momento cinético (o angular) de la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol suponiendo que la masa de la Tierra es de  $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  y que describe una circunferencia de  $1,50 \times 10^8 \text{ km}$  de radio con una velocidad de traslación constante de  $30 \text{ km/s}$ . Ignórese el movimiento de rotación de la Tierra en torno de su eje.

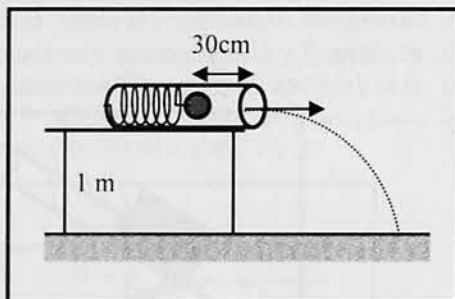
(Solución:  $2,69 \times 10^{40} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ )

- 3.24. Juan debe desplazar una mesa de  $20 \text{ kg}$  por el suelo horizontal con el que el coeficiente de rozamiento es  $0,2$  una distancia de  $5 \text{ m}$ . Para ello ejerce una fuerza constante de  $100 \text{ N}$  inclinada un ángulo de  $30^\circ$  hacia arriba respecto de la horizontal. Calcular: a) el trabajo total efectuado por Juan; b) el trabajo disipado por el rozamiento; c) la energía cinética adquirida por la mesa al cabo de los  $5 \text{ m}$ ; d) la potencia gastada por Juan.

(Solución: a)  $433 \text{ J}$ ; b)  $146 \text{ J}$ ; c)  $287 \text{ J}$ ; d)  $232 \text{ W}$ )

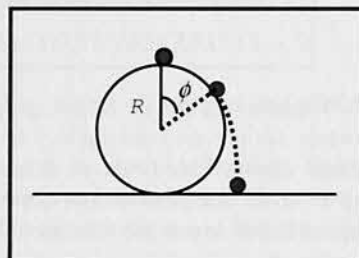
## D – CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

- 3.25. Un resorte está comprimido 30 cm. Con él se disparan horizontalmente canicas de acero de 400 g de masa desde una mesa de 1 m de altura. Si la constante del resorte es  $k = 200$  N/m: a) ¿cuál será la energía cinética de las bolas al separarse del resorte? y b) ¿cuál será su velocidad al llegar al suelo si se desprecian los rozamientos?



(Solución: a) 9 J; b) 8,04 m/s)

- 3.26. Una bolita pequeña rueda o desliza sin rozamiento sobre una esfera grande de radio  $R$  como indica la figura, hasta que llega a un punto en que se separa de ella y cae libremente al suelo. Calcular el ángulo  $\phi$  correspondiente al punto de separación si se desprecia el radio de la bolita frente al radio de la esfera. (Solución:  $\cos \phi = 2/3$ ;  $\phi = 48,2^\circ$ )



## Capítulo 4

## ESTÁTICA

## 4.1. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RELACIÓN A UN PUNTO

El momento de una fuerza  $F$  con relación a un punto  $O$  es el producto vectorial de  $r$  por  $F$ , siendo  $r$  el vector que va de  $O$  al punto de aplicación de la fuerza  $F$ :

$$M_O = r \times F$$

Aunque la fuerza deslice a lo largo de su recta de acción, su momento respecto del punto  $O$  no varía.

El momento de la fuerza  $F$  respecto de otro punto  $O'$  está relacionado con el momento respecto del punto  $O$ , por la siguiente expresión:

$$M_{O'} = M_O + \overrightarrow{O'O} \times F$$

Cuando varias fuerzas son concurrentes, el momento de la fuerza suma (resultante) es igual a la suma de los momentos de las fuerzas componentes (Teorema de Varignon).

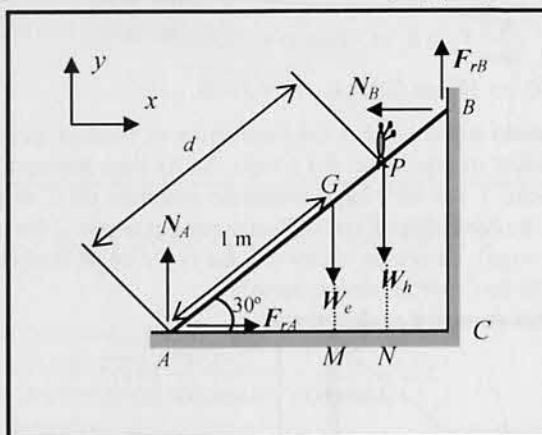
## 4.2. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RELACIÓN A UN EJE

Se llama momento de una fuerza con relación a un eje, la magnitud *escalar* que resulta de *proyectar, sobre dicho eje, el momento de la fuerza respecto de un punto cualquiera del eje*. Sea cual sea el punto del eje elegido, el momento de la fuerza con relación al eje no varía.

4.4. Una escalera homogénea de 2 m de larga y 2 kg de masa está apoyada en el suelo por un extremo y en una pared vertical por el otro formando un ángulo de  $30^\circ$  con el suelo. Cada 20 cm hay un escalón. Los coeficientes de rozamiento estáticos con la pared y con el suelo, valen 0,20. Por ella comienza a subir un hombre de 100 kg de masa. ¿Cuántos escalones podrá ascender sin que la escalera comience a deslizarse?

**Solución:**

Comiencese por dibujar las fuerzas que actúan sobre la escalera. Supóngase que el hombre se halla en el punto  $P$ , y sea  $W_h$  su peso. El punto  $G$  es el centro de gravedad de la escalera y  $W_e$  es el peso de la misma. En los extremos de la escalera,  $A$  y  $B$ , se han dibujado las reacciones normales del suelo y de la pared, respectivamente, así como las fuerzas de rozamiento,  $F_{rA}$  y  $F_{rB}$ .



Para que exista equilibrio deben cumplirse las dos condiciones:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_A = 0,$$

donde se ha elegido como origen de momentos el punto  $A$  y sentido positivo el antihorario.

Los valores máximos que pueden tener las fuerzas de rozamiento en  $A$  y en  $B$  son:

$$F_{rA} = \mu_A N_A = 0,20 N_A \quad \text{y} \quad F_{rB} = \mu_B N_B = 0,20 N_B.$$

Estos valores máximos de las fuerzas de rozamiento condicionarán el máximo ascenso posible del hombre.

Las condiciones de equilibrio dan lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{rA} - N_B = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N_A - W_e - W_h + F_{rB} = 0 \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{cases} 0,20 N_A - N_B = 0 \\ N_A - 2 \times 9,81 - 100 \times 9,81 + 0,20 N_B = 0 \end{cases} \quad (a)$$

Despejando  $N_B$  en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se resuelve el sistema:

$$N_A = 962,13 \text{ N} \quad \text{y} \quad N_B = 192,43 \text{ N}$$

Por otra parte:

$$+ \sum M_A = 0 \Rightarrow N_B \overline{BC} + F_{rB} \overline{AC} - W_e \overline{AM} - W_h \overline{AN} = 0,$$

donde se ha tenido en cuenta que el momento de una fuerza no se modifica porque se deslice la fuerza a lo largo de su recta de acción, y así se ha deslizado la fuerza  $N_B$  a lo largo de su recta de acción hasta situar su punto de aplicación sobre la vertical del punto  $A$ , y entonces su momento tendrá por módulo el producto de la fuerza  $N_B$  por su distancia al punto  $A$ , que es la distancia  $BC$ . Del mismo modo se ha procedido en los demás casos.

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación precedente, resulta:

$$N_B \times 2 \sin 30^\circ + 0,20 N_B \times 2 \cos 30^\circ - 2 \times 9,81 \cos 30^\circ - 100 \times 9,81 \times d \cos 30^\circ = 0$$

Y como  $N_B$  vale 192,43, resulta:

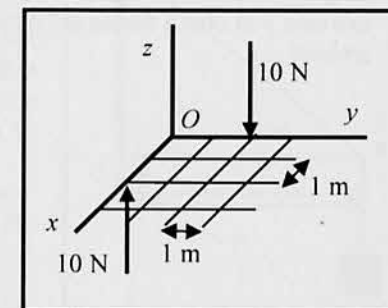
$$d = 0,285 \text{ m}$$

O sea, sólo puede subir **un escalón**.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

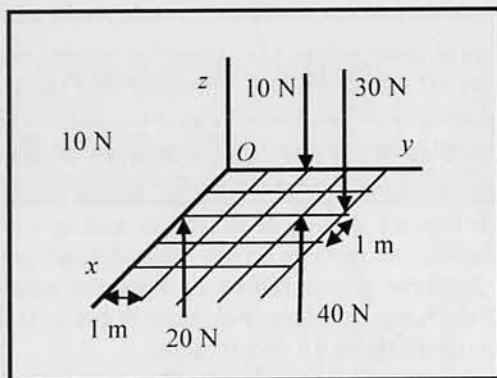
### A - PARES Y MOMENTOS

4.5. Dado el par de fuerzas de la figura, calcular su momento.



(Solución:  $-20(i + j)$ )**B – SISTEMAS EQUIVALENTES**

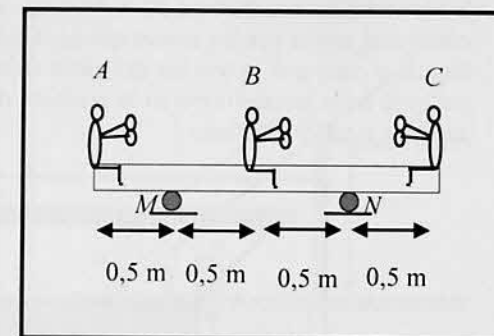
- 4.6. Sustituir el sistema de fuerzas de la figura por otro equivalente, consistente en una única fuerza.

(Solución:  $R = 20k$  aplicada en  $P(3, -1)$ )**C – EQUILIBRIO DEL SÓLIDO RÍGIDO**

- 4.7. Un columpio de niños está formado por una barra homogénea de 4 m de longitud apoyada por su punto medio en un pivote que la permite oscilar hacia arriba y hacia abajo. Un niño de 40 kg de masa se sienta a 80 cm de un extremo. ¿A qué distancia del otro extremo debe sentarse un niño de 30 kg de masa para que haya equilibrio? (Solución: 40 cm)
- 4.8. Dos hombres sujetan una barra homogénea de 30 kg de masa y 2 m de longitud a la misma altura sobre el suelo. Uno se encuentra a 20 cm de un extremo y el otro a 50 cm del otro extremo. ¿Cómo se reparte el peso entre ambos? (Solución: 113 y 181 N)

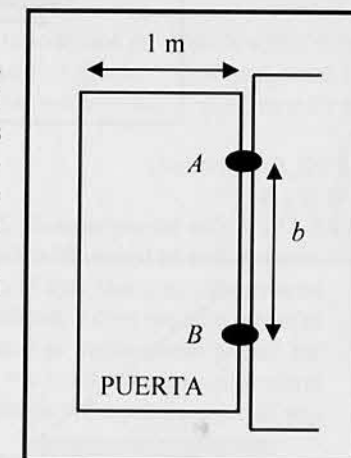
- 4.9. Los niños  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura pesan, respectivamente, 300, 400 y 500 N, y la viga sobre la que están sentados 100 N. La viga, que es homogénea, está apoyada en los rodillos  $M$  y  $N$  y el sistema se halla en equilibrio. ¿Cuánto valdrán las reacciones en los apoyos?

(Solución: 450 N y 850 N)

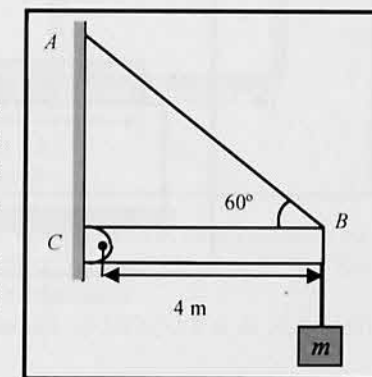


- 4.10. Una puerta homogénea de 1 m de anchura y 20 N de peso tiene dos bisagras,  $A$  y  $B$ . Supóngase que el peso de la puerta es soportado íntegramente por la bisagra superior,  $A$ . Calcular la separación,  $b$ , entre ambas bisagras si se desea que la reacción horizontal de la bisagra  $A$ , valga 10 N.

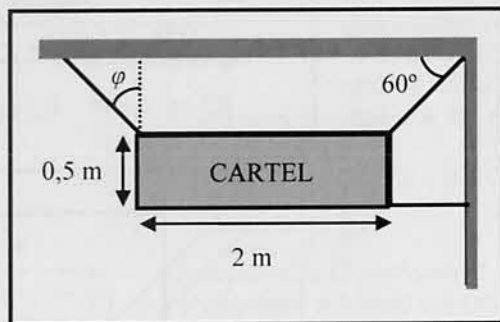
(Solución: 1 m)



- 4.11. Si la viga homogénea de la figura mide 4 m, pesa 200 N y la tensión del cable  $AB$  es de 300 N, calcular la masa  $m$  y la reacción en la articulación o bisagra  $C$ . Despréciase el espesor de la viga.

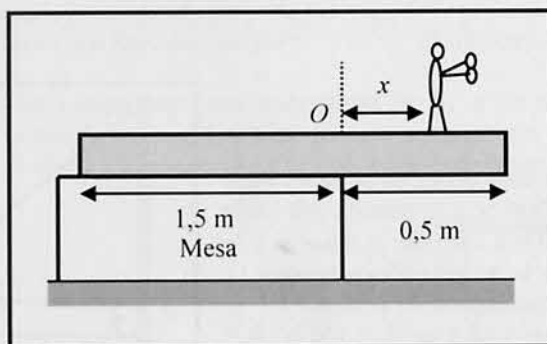
(Solución:  $m = 16,3$  kg;  $R_x = 150$  N;  $R_y = 100$  N)

- 4.12. Un cartel homogéneo de 50 N de peso, 2 m de longitud y 0,50 m de anchura está sujeto por los cables que se indican en la figura. Averiguar: a) el ángulo  $\varphi$  para que la tensión del cable inferior horizontal sea de 10 N y el cartel se halle en equilibrio en la posición de la figura y b) el ángulo  $\varphi$  si se suprime el cable inferior.



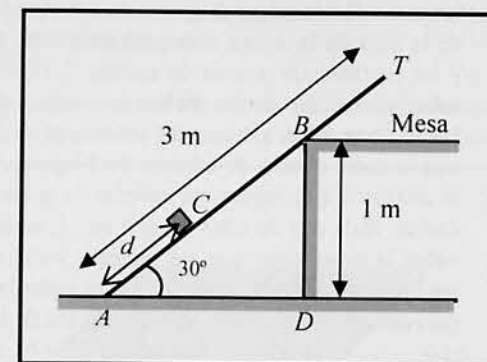
(Solución: a)  $39,9^\circ$ , b)  $30^\circ$ )

- 4.13. Un tablón homogéneo de 2 m de longitud se encuentra sobre una mesa, como indica la figura. Si 0,5 m del tablón sobresalen del borde de la mesa, se pregunta: a) ¿cuál será la distancia máxima,  $x$ , medida desde el borde de la mesa, a la que podrá desplazarse un niño, que pesa el doble que el tablón, sin que se desequilibre el sistema del tablón con el niño? y b) si el niño se encuentra a una distancia  $x = 0,15$  m del borde, ¿dónde actuará la reacción que la mesa ejerce sobre el tablón?



(Solución: a) 0,25 m, b) -0,0667 m)

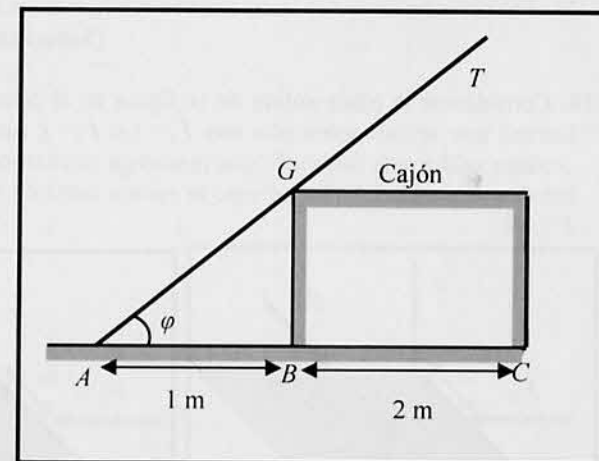
- 4.14. El tablón homogéneo  $T$  de la figura, de 3 m de longitud, se halla apoyado por el extremo  $A$  en el suelo donde existe un coeficiente de rozamiento estático  $\mu = 0,2$  y, en cambio, se supone que no existe rozamiento en la esquina  $B$  de la mesa donde también se apoya. La altura de la mesa es de 1 m, y el peso del tablón es de 20 N. Sobre el tablón se desea poner una cesta,  $C$ , de 40 N de peso que se supone que no desliza sobre el tablón. ¿Cuál será la distancia máxima,  $d$ , medida desde  $A$ , a la que podrá situarse la cesta para que no deslice el tablón sobre el suelo si su ángulo de inclinación es de  $30^\circ$ ?



(Solución: 0,279 m)

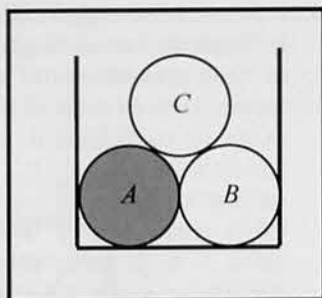
0,37 m

- 4.15. Un tablón  $T$  de 60 N de peso apoya su centro de gravedad,  $G$ , sobre la esquina de un cajón homogéneo que pesa 40 N y tiene 2 m de largo, como indica la figura, donde  $\varphi$  es el ángulo máximo de inclinación del tablón. Calcúlese: a) la reacción normal del suelo sobre el cajón y su línea de acción y b) el valor de  $\varphi$  si el coeficiente de rozamiento estático con el suelo tanto del tablón como del cajón es de 0,2. Entre el tablón y la esquina del cajón no hay rozamiento.



(Solución: a) 50 N; 2,8 m de A; b)  $45^\circ$ )

- 4.16. Hallar las reacciones que ejerce el fondo de la caja de la figura sobre las bolas  $A$  y  $B$  y las fuerzas que la bola de arriba,  $C$ , ejerce sobre cada una de las bolas de abajo, sabiendo que todas son iguales y homogéneas, que la masa de una de ellas es de 2 kg y que la distancia que separa los centros de gravedad de cada dos de ellas es de 1 m. ¿Cuánto valen la reacciones que las paredes verticales ejercen sobre las bolas  $A$  y  $B$  si tanto las paredes de la caja como las superficies de las bolas son perfectamente lisas?

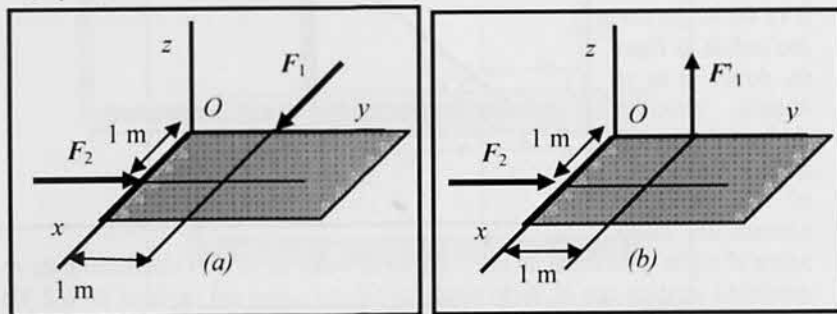


(Solución: 29,4 N, 29,4 N; 11,3 N e indeterminadas).

- 4.17. Una maceta cuadrada de 0,5 m de lado contiene en su centro una planta completamente vertical. Supóngase que la fuerza del viento actúa horizontalmente con 20 N y siempre en un punto de la planta que dista 1 m (medido en vertical) del suelo. Si la maceta está llena de mantillo hasta una altura de 0,5 m y se supone despreciable el peso de la planta, averiguar: a) el peso mínimo de la maceta con el mantillo para que no vuelque, si el ángulo máximo que puede inclinarse, respecto de la vertical, sin volcar es de  $30^\circ$  y b) el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre la maceta y el suelo.

(Solución: a) 219 N; b) 0,0915)

- 4.18. Considérese la placa sólida de la figura en el plano  $xy$ . a) Si las únicas fuerzas que actúan sobre ella son  $F_1 = i$  y  $F_2 = j$ , ambas a 1 m del origen, ¿cuánto valdrá una fuerza  $F_3$  que mantenga el cuerpo en equilibrio y dónde habrá que situarla? b) Resuélvase la misma cuestión si se reemplaza  $F_1$  por  $F'_1 = k$ .

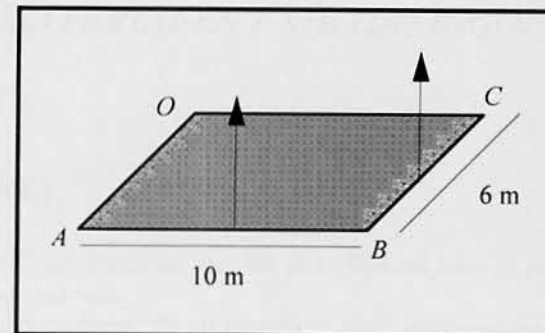


(Solución: a)  $-i - j$  en recta  $P(1,1) - O(0,0)$ ; b) Imposible)

- 4.19. Demostrar que si un cuerpo sometido a la acción de tres fuerzas está en equilibrio, las tres fuerzas han de ser coplanarias.

- 4.20. Se pretende mantener horizontal una placa de vidrio rectangular y homogénea de  $6 \times 10$  metros y 30 N de peso. Una persona se sitúa en el punto medio de  $AB$  y otra en el punto medio de  $BC$ . ¿En qué punto del perímetro de la placa deberá situarse una tercera persona para que soporten el mismo peso cada una de las tres y la placa se mantenga en equilibrio?

(Solución: En el punto  $O$ )



$$W - \frac{1}{2}ma_C = ma_C \Rightarrow mg = \frac{3}{2}ma_C \Rightarrow a_C = \frac{2}{3}g = 6,54 \text{ m/s}^2$$

Y la aceleración angular valdrá:

$$\alpha = \frac{a_C}{R} = \frac{(2/3)g}{R} = \frac{6,54}{0,02} = 327 \text{ rad/s}^2$$

b) De la primera ecuación se deduce:

$$T = W - ma_C = m(g - a_C) = 0,1(9,81 - 6,54) = 0,327 \text{ N}$$

c) Como  $a_C$  es constante, se pueden utilizar las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado, por ejemplo:

$$x_C = \frac{1}{2}a_C t^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}6,54t^2 \Rightarrow t = 0,782 \text{ s}$$

d) Como  $\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2$ , sustituyendo  $\phi = 2\pi$ , resulta:

$$2\pi = \frac{1}{2}327t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4\pi}{327}} = 0,196 \text{ s}$$

e) La energía cinética máxima corresponde al máximo de velocidad, que ocurrirá en el instante final del desenrollamiento del hilo. O sea:

$$v_{C\text{máx.}} = a_C t_{\text{máx.}} = 6,54 \times 0,782 = 5,11 \text{ m/s}$$

$$E_{\text{ktot}} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{4}mv_C^2 = \frac{3}{4}mv_C^2$$

$$E_{\text{ktot.máx.}} = \frac{3}{4}0,1 \times 5,11^2 = 1,96 \text{ J}$$

Este valor coincide con la energía potencial inicial:

$$E_{\text{pi}} = mgh = 0,1 \times 9,81 \times 2 = 1,96 \text{ J}$$

f) La relación entre la energía cinética de traslación y de rotación es:

$$\frac{E_{\text{ktrasl.}}}{E_{\text{krot.}}} = \frac{(1/2)mv_C^2}{(1/2)I_z\omega^2} = \frac{mv_C^2}{(1/2)mR^2\omega^2} = \frac{v_C^2}{(1/2)v_C^2} = 2$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

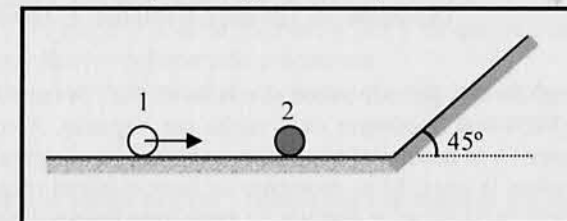
### A – TEOREMAS FUNDAMENTALES

5.10. Un helicóptero lleva sólo dos tripulantes, uno, A, de 50 kg de masa que se encuentra en la parte delantera y el otro, B, de 100 kg de masa que se halla en la parte trasera. Supóngase que en un momento determinado el helicóptero se encuentra inmóvil en el aire, instante que aprovechan los dos tripulantes para intercambiar sus posiciones. Si la masa del helicóptero vacío es de 1000 kg, cuánto se habrá desplazado el helicóptero debido al intercambio de las posiciones de A y B separadas 4 m si se desprecia la resistencia del aire? ¿Y si en lugar de intercambiar sus posiciones, el tripulante B se reúne con el A en la parte delantera?

(Solución: 0,174 m y 0,348 m)

### B – CHOQUES

5.11. La bola 1, de 4 kg de masa, animada de una velocidad de 8 m/s choca contra la bola 2, de 6 kg de masa, que se encontraba en reposo. El choque es central, directo y parcialmente elástico, con un coeficiente de restitución  $e = 0,8$ . La superficie sobre la que chocan es horizontal y no existe rozamiento. Calcular: a) la altura que ascienden las bolas sobre el plano inclinado  $45^\circ$  que se encuentra a continuación de la superficie horizontal y que tampoco presenta rozamiento. b) la energía cinética perdida durante el choque.



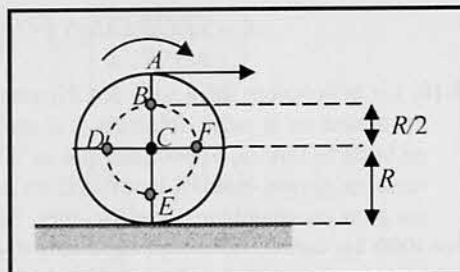
(Solución: a) 1,69 m la bola 2, la 1 no asciende; b) 27,6 J)

5.12. Desde un metro de altura se deja caer una pelota de tenis al suelo. Si se observa que rebota hasta 40 cm de altura, ¿cuánto vale el coeficiente de restitución? y ¿qué altura alcanzará la pelota después del tercer rebote? Supóngase despreciable la masa de la pelota frente a la del suelo.

(Solución:  $\sqrt{0,4}$  ; 6,4 cm)

## C – CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

- 5.13. La velocidad del punto  $A$  de la rueda de la figura es de 6 m/s. Sabiendo que la rueda no desliza, sino que solamente rueda, hallar las velocidades de los puntos  $B$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$ , que distan  $R/2$  del centro  $C$ , si la rueda tiene de radio  $R = 2$  m, y averiguar si son tangentes a la circunferencia dibujada de radio  $R/2$  y centro en  $C$ .



(Solución:  $v_B = 9/2$  m/s;  $v_D = 3\sqrt{5}/2$  m/s;  $v_E = 3/2$  m/s;  $v_F = 3\sqrt{5}/2$  m/s; en  $B$  y  $E$  son tangentes pero no en  $D$  y  $F$ )

## D – DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

- 5.14. Sobre la periferia de un cilindro vertical macizo y homogéneo de masa  $m = 10$  kg y radio  $R = 0,5$  m se aplica una fuerza horizontal constante de 100 N. El cilindro puede girar alrededor de un eje vertical fijo,  $z$ , paralelo a la generatriz y que pasa por su centro. Si  $I_z = (1/2)mR^2$  y el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcular: a) su velocidad angular al cabo de 3 s y el ángulo descrito; b) la velocidad de un punto de la periferia y de un punto situado a  $R/2$  del eje al cabo de 3 s.

(Solución: a) 120 rad/s y 180 rad; b) 60 m/s y 30 m/s)

- 5.15. Una patinadora está girando sobre sí misma con los brazos y una pierna extendidos y con una frecuencia de 1 vuelta por segundo. A continuación, cierra los brazos y la pierna sobre sí misma sin realizar ninguna acción con los patines sobre la pista. Si su momento de inercia inicial respecto del eje de rotación era de  $25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y después de aproximar brazos y piernas era de  $10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , ¿cuántas vueltas por segundo dará después de esa operación?

(Solución: 2,5)

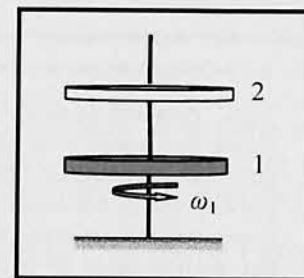
- 5.16. Nicolás se encuentra en un caballito en un tiovivo en un punto que dista 2 m del eje del tiovivo. El tiovivo comienza su movimiento aumentando su velocidad angular a razón de una vuelta por minuto cada minuto.

- a) Calcular las aceleraciones tangencial, normal y angular a que se encuentra sometido Nicolás cuando haya transcurrido un minuto.

b) Pasados dos minutos se desconectan los motores y supóngase que el tiovivo puede seguir girando libremente sin rozamiento y, en ese momento, Nicolás se baja del caballito y se mueve radialmente hasta el borde de la plataforma que dista 5 m del eje y salta al exterior. ¿Cuánto vale la velocidad angular de la plataforma después, si su masa es de 80 kg y la de Nicolás es de 40 kg y el momento de inercia de la plataforma respecto del eje de giro es  $(1/2)mR^2$ , donde  $m$  y  $R$  son, respectivamente, la masa y el radio de la plataforma).

(Solución: a)  $a_T = 3,49 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ ;  $a_N = 0,0219 \text{ m/s}^2$ ;  $\alpha = 1,75 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$ ; b) 0,243 rad/s)

- 5.17. Un disco homogéneo, 1, se encuentra girando alrededor de un eje fijo que pasa perpendicularmente por su centro con una velocidad angular  $\omega_1$ . Su momento de inercia respecto del eje de rotación es  $I_1$ . Sobre el eje se va a situar el centro de otro disco, 2, que se encuentra en reposo, y se va a dejar caer hasta que se encuentre con el anterior y terminen girando los dos conjuntamente. Se pregunta:



a) Si el disco 2 es igual que el 1, ¿cuánto valdrá la velocidad angular con la que girará el sistema formado por los dos discos?, y ¿se habrá conservado la energía cinética del sistema en el proceso de acoplamiento? En caso negativo, calcular la pérdida de energía cinética.

b) Si el disco 2 sólo se diferencia del 1 en que su radio es la mitad, repetir los cálculos del apartado precedente.

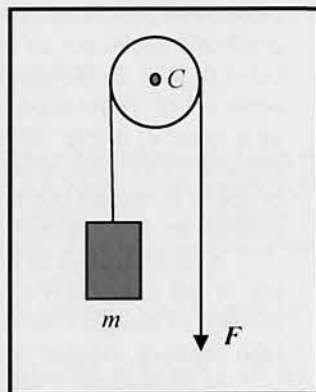
(Solución: a)  $\omega_1/2$ , la mitad de la energía cinética inicial; b)  $4\omega_1/5$ , la quinta parte de la energía cinética inicial)

- 5.18. Un cilindro sólido macizo y homogéneo de masa  $m = 6$  kg y radio  $R = 3$  m gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masas y es paralelo a su generatriz. Su velocidad angular es constante y vale  $\omega = 10$  rad/s. El momento de inercia respecto del eje de giro vale  $I_z = (1/2)mR^2$ . Se pregunta: a) velocidad y aceleración de un punto distante 2 m del eje de giro y velocidad y aceleración angulares; b) ¿cuál es el momento cinético (o angular) del cilindro respecto del eje de giro?; c) ¿cuál es su energía cinética?

(Solución: a) 20 m/s dirigida tangencialmente a la trayectoria,  $200 \text{ m/s}^2$  dirigida radialmente hacia dentro; 10 rad/s y 0 rad/s<sup>2</sup>; b)  $270 \text{ m}^2\text{kg/s}$ ; c)  $1,35 \times 10^3 \text{ J}$ )

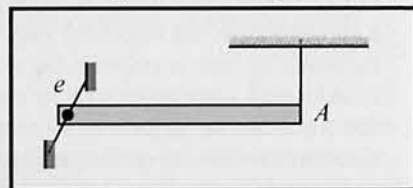
- 5.19. Una esfera sólida, maciza y homogénea, de masa  $m = 20 \text{ kg}$  y radio  $R = 2 \text{ m}$  se encuentra en lo alto de una ladera de  $10 \text{ m}$  de longitud, que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Partiendo del reposo se la deja en libertad y comienza a descender rodando sin deslizar. Su momento de inercia respecto de un eje,  $z$ , que pase por su centro de masas,  $C$ , y sea perpendicular al plano del movimiento es  $I_z = (2/5)mR^2$ . Se pregunta: a) ¿cuál será la velocidad de su centro de masas al llegar a la base de la ladera?; b) ¿cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que la esfera no deslice?; c) calcular el tiempo que tarda la esfera en recorrer la mitad de la ladera; hallar su energía total en ese instante y comprobar que coincide con la energía total inicial.  
(Solución: a)  $8,37 \text{ m/s}$ ; b)  $0,165$ ; c)  $1,69 \text{ s}$ ,  $981 \text{ J}$ , tomando el origen de energías potenciales en el suelo)

- 5.20. Se desea subir una caja de masa  $m = 20 \text{ kg}$  con una aceleración constante de  $1 \text{ m/s}^2$ . Para ello se dispone de la polea de la figura, que puede girar sin rozamiento alrededor de su eje fijo de simetría, ( $z$ ), que pasa por  $C$  y que es horizontal y perpendicular al plano del movimiento. Se supone que no hay deslizamiento de la cuerda sobre la polea, que tiene una masa  $m_p = 2 \text{ kg}$ , radio  $R = 2 \text{ m}$  y momento de inercia respecto del eje de rotación:  $I_z = (1/2)m_p R^2$ . Averiguar la fuerza  $F$  que hay que ejercer en el extremo de la cuerda, que se considera flexible, inextensible y de masa despreciable, y las tensiones en la cuerda.



(Solución:  $217,2 \text{ N}$ ;  $216,2 \text{ N}$  y  $217,2 \text{ N}$ )

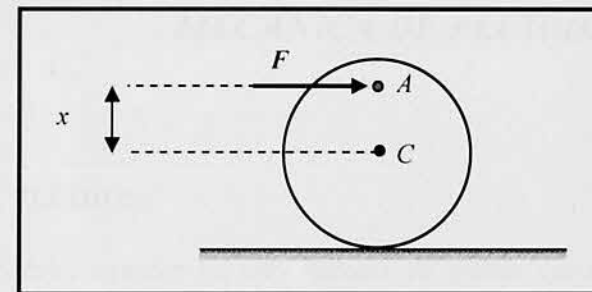
- 5.21. Se tiene una barra homogénea de peso  $W$  conocido, que puede girar libremente en un plano vertical alrededor de un eje horizontal fijo,  $e$ , que pasa por uno de sus extremos. El otro,  $A$ , se sujeta del techo mediante un hilo que la mantiene horizontal. Si se corta el hilo, ¿cuánto valdrá la reacción en el otro extremo un instante inmediatamente posterior al corte? ¿Y la aceleración del centro de masas en ese instante? (Dato: el momento de inercia de la barra respecto



de un eje que pase por su centro de masas y sea perpendicular al plano del movimiento es  $(1/12)ml^2$ , donde  $m$  es la masa de la barra y  $l$  su longitud).

(Solución:  $W/4$ ;  $3g/4$ )

- 5.22. Se aplica una fuerza constante de  $100 \text{ N}$  en el punto  $A$  de la rueda de la figura, que dista  $x$  del centro  $C$ . La masa de la rueda es de  $10 \text{ kg}$ , su radio vale  $0,5 \text{ m}$  y su momento de inercia respecto de un eje que pase por su centro de masas  $C$  y sea perpendicular al plano del movimiento es  $(1/2)mR^2$ . Si se produce un movimiento de rodadura pura sin deslizamiento, averiguar: a) la fuerza de rozamiento y la aceleración del centro de masas en función de  $x$ ; b) la fuerza de rozamiento y el valor de  $x$  si la aceleración del centro de masas,  $C$ , vale: I)  $7 \text{ m/s}^2$ , II)  $10 \text{ m/s}^2$ , III)  $12 \text{ m/s}^2$ .



(Solución: a)  $F_r = (1/3)(100 - 400x)$  y  $a_C = (1/3)(20 + 40x)$ ; b) I)  $30 \text{ N} \leftarrow$  y  $0,025 \text{ m}$ ; b) II)  $0 \text{ N}$  y  $0,25 \text{ m}$ ; b) III)  $20 \text{ N} \rightarrow$  y  $0,4 \text{ m}$ )

$$P = Q\Delta p = 1,01 \times 10^{-4} \times 5,73 \times 10^3 = \boxed{0,579 \text{ W}}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### A – ESTÁTICA DE FLUIDOS

- 6.11. Un buceador se encuentra a 10 m de profundidad. ¿Qué presión soportará si se supone que el agua que lo rodea tiene una densidad de  $1030 \text{ kg/m}^3$  y la presión que ejerce la atmósfera (presión atmosférica) sobre la superficie libre del agua vale aproximadamente  $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$  ( $\approx 1 \text{ atm}$ )?

(Solución:  $2,02 \times 10^5 \text{ Pa}$  ( $\approx 2 \text{ atm}$ ))

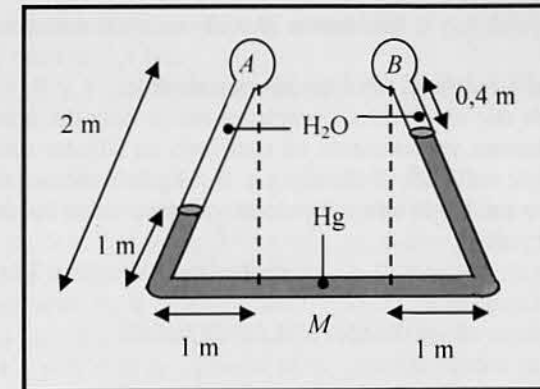
- 6.12. Una vasija tiene forma troncocónica con la base circular de radio 1 m. Si se llena de agua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) hasta una altura de 1 m, ¿qué fuerza se ejercerá sobre el fondo?

(Solución: 30,8 kN)

- 6.13. Un tubo en U abierto a la atmósfera por ambos extremos contiene mercurio ( $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) en el fondo. Por una de las ramas se añade agua hasta que la diferencia de alturas alcanzadas por el mercurio en ambas ramas es de 10 cm. Calcular la diferencia entre los niveles de las superficies libre del agua y del mercurio.

(Solución: 1,26 m)

- 6.14. ¿Cuál es la diferencia de presión entre los depósitos de agua A y B si  $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ? ¿Y cuál es la diferencia de presión entre A y M? (Supóngase que ambos depósitos son iguales, de 0,5 m de radio, y tómense como presiones en A y B las correspondientes a sus centros).



(Solución:  $0,642 \times 10^5 \text{ Pa}$  y  $-1,28 \times 10^5 \text{ Pa}$ )

- 6.15. Un barco de 10 000 toneladas de masa desaloja  $9,71 \times 10^3 \text{ m}^3$  de agua de mar. ¿Cuál es la densidad del agua en la que navega el barco?

(Solución:  $1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ )

- 6.16. Un iceberg de  $0,917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  de densidad flota en el océano de densidad  $1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . ¿Qué fracción del volumen del iceberg emerge sobre el agua del mar?

(Solución: 11%)

- 6.17. ¿Qué porcentaje de su peso pierde un cuerpo al sumergirlo completamente en agua si su densidad es 4 veces la del agua?

(Solución: 25%)

- 6.18. En un vaso lleno de agua se deposita un cubo de hielo que flota en el agua. Cuando el hielo se derrita, ¿se derramará agua, descenderá el nivel o el nivel permanecerá inalterado?

(Solución: inalterado)

- 6.19. Se sumerge un corcho de  $0,20 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  de densidad hasta una profundidad  $h$  en un depósito de agua (densidad  $10^3 \text{ kg/m}^3$ ) y se deja en libertad. Si tarda 2 segundos en llegar a la superficie, ¿cuánto vale  $h$ ?

(Solución: 78,5 m)

- 6.20. Desde una altura de 2 m sobre un depósito lleno de agua, se deja caer un objeto. Si la profundidad del depósito es de 3 metros, calcular: a) la velocidad con que llega al fondo si la densidad del cuerpo es 10 veces la del agua; b) la densidad del cuerpo si sólo penetra 2 metros y luego asciende hasta la superficie. Despréciense los rozamientos.

(Solución: a) 9,60 m/s; b) la mitad de la del agua)

- 6.21. Un recipiente contiene dos líquidos no miscibles, *A* y *B*, el primero de densidad doble que el segundo. Completamente sumergido, pero sin tocar el fondo, se encuentra verticalmente en equilibrio un cilindro sólido homogéneo de 10 cm de radio, 20 cm de altura y 18,9 kg de masa que tiene la mitad de su volumen en *A* y la otra mitad en *B*. ¿Cuánto valen las densidades de los líquidos *A* y *B*?

(Solución:  $4,01 \times 10^3$  y  $2,01 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>)

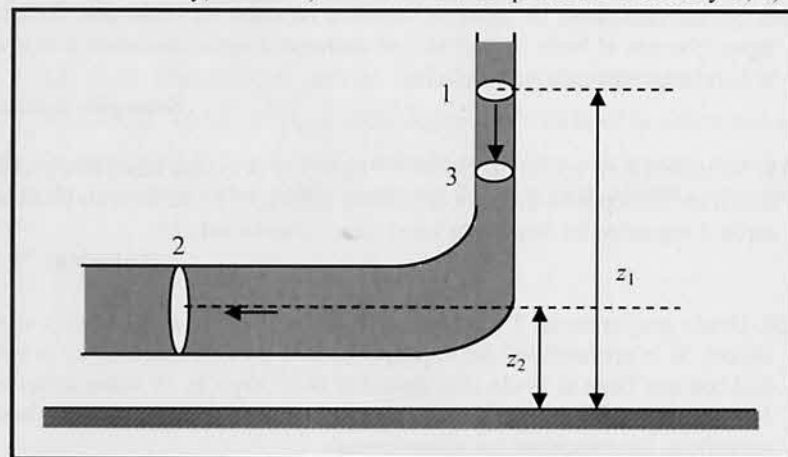
### B - CINEMÁTICA DE FLUIDOS

- 6.22. Un fluido incompresible circula en régimen permanente por una tubería circular de 50 mm de radio. Posteriormente, la tubería se ensancha hasta 100 mm de radio y, finalmente, se contrae hasta 25 mm de radio. ¿cuál será la velocidad del fluido en cada parte si el caudal es de 50 l/s?

(Solución: 6,37 m/s; 1,59 m/s; 25,5 m/s)

### C - DINÁMICA DE FLUIDOS

- 6.23. Por la tubería circular de la figura circula un fluido ideal, incompresible en régimen estacionario. Supóngase que la densidad del fluido es de  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>. La sección en 2 es doble que en 1 y la altura  $z_1$  es doble que  $z_2$ . Si el radio de la sección 1 es de 50 mm,  $z_1$  vale 2 m y la velocidad,  $v_1$ , en esa sección es de 5 m/s y, hallar: a) la diferencia de presiones entre 2 y 1; b) el

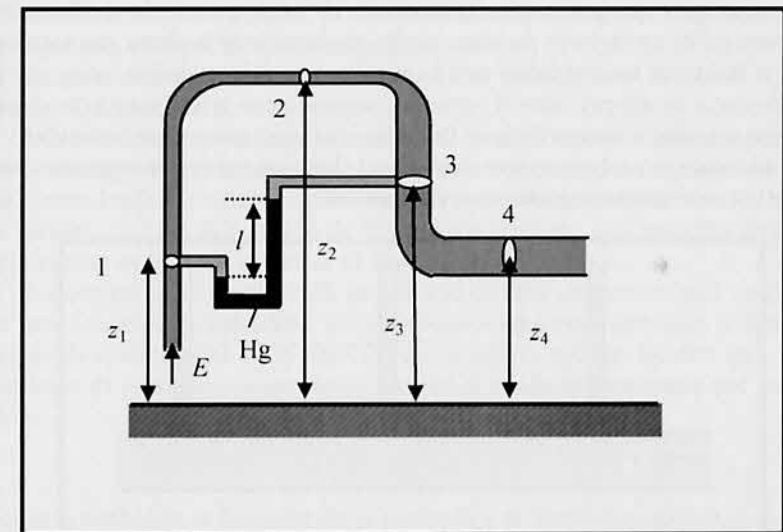


caudal; c) la presión en un punto 3 situado 0,5 m por debajo del 1, si la presión en 2 fuera de 1,4 bar.

(Solución: a) 19,2 kPa; b)  $39,3 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s; c) 1,26 bar)

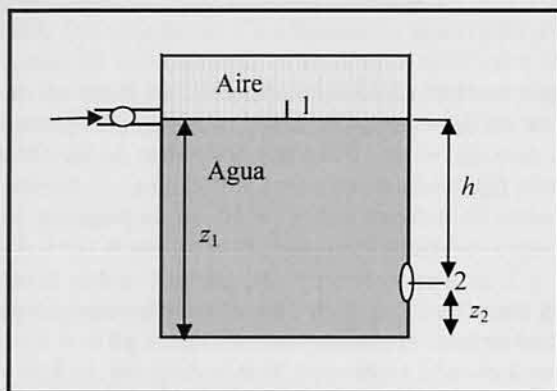
- 6.24. Se introduce un fluido ideal incompresible por *E* con un caudal de 60 l/s, que se mueve por las tuberías de la figura en régimen permanente. Supóngase que su densidad es de  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Los radios de las distintas secciones marcadas en la figura son:  $r_1 = 50$  mm,  $r_2 = 40$  mm;  $r_3 = 80$  mm y  $r_4 = 90$  mm. Si el manómetro de la figura indica  $l = 50$  cm, se pregunta: a) las velocidades en las cuatro secciones señaladas; b) la distancia vertical que separa las secciones 1 y 3; c) si  $z_2 - z_1$  fuera 10 m, ¿cuánto valdría la caída de presión entre 1 y 2 y entre 3 y 2?; d) si la diferencia de presión entre 4 y 3 fuera de 169 kPa, ¿cuál sería la separación vertical entre 3 y 4?

(Solución: a) 7,64 m/s; 11,9 m/s; 2,98 m/s; 2,36 m/s; b) 9,32 m; c) 140 kPa; 73,0 kPa; d) 17,1 m)



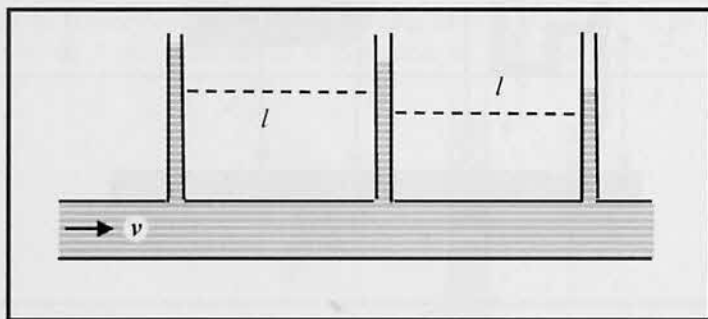
- 6.25. Calcular la velocidad de salida del agua por el orificio del recipiente de la figura, si sobre su superficie libre se encuentra aire a presión de 2 atm y se supone que la superficie libre del agua es mucho mayor que el orificio de salida. Despréciense las pérdidas por rozamiento y supóngase el agua incompresible y que se comporta como un fluido ideal. Tómese para *h* el va-

lor 1 m y supóngase que se está rellenando el depósito con agua a fin de que  $h$  permanezca constante.



(Solución: 14,9 m/s)

- 6.26. Supóngase que por la tubería cilíndrica de la figura circula un fluido incompresible en régimen permanente. Se desea saber si la altura que alcanza el fluido en los tres tubos será la misma y, en caso negativo, comparar la diferencia de alturas entre el primero y segundo con la diferencia de alturas entre segundo y tercero si: a) el fluido es ideal y se mueve con velocidad  $v$  y b) el fluido es real con viscosidad  $\eta$ , y el fluido se mueve en régimen laminar con corriente completamente desarrollada.



(Solución: a) misma altura; b) misma diferencia de alturas)

## Capítulo 7

## OSCILACIONES Y ONDAS

### 7.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO

Movimiento *periódico* es aquél en que el punto, o cada punto, si se trata de un sistema, pasan por la *misma posición* y con la *misma velocidad* con intervalos regulares de tiempo. El tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por la misma posición con la misma velocidad se denomina *período*,  $T$ , y se mide en segundos. Si, además, el movimiento es de *vaivén* se llama *oscilatorio*. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo.

Se denomina frecuencia,  $\nu$ , la inversa del período:  $\nu = 1/T$  y se mide en hercios. (Símbolo: Hz).

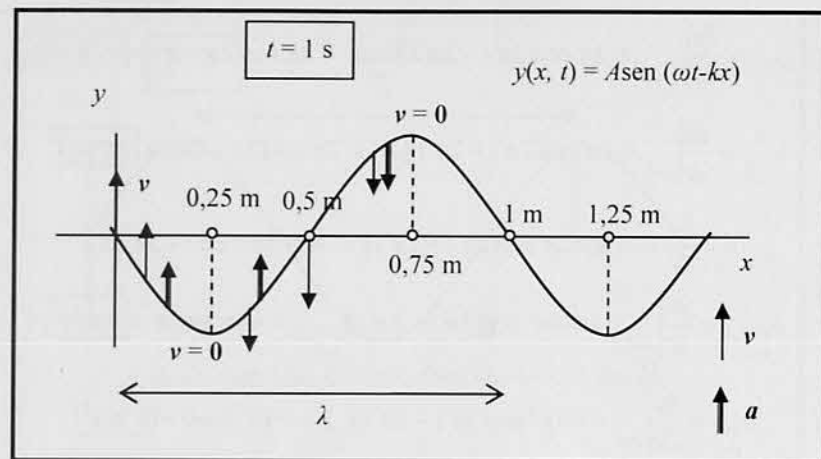
Los movimientos oscilatorios suelen ser *simétricos* con relación a una posición central, y los más sencillos y, al mismo tiempo, los más importantes son los denominados *movimientos armónicos* (o *armónicos simples*), en los cuales, la variable que fija la posición de la partícula respecto a su posición de equilibrio estable es función armónica (o sinusoidal) del tiempo.

Supóngase que una partícula de masa  $m$  ejecuta un movimiento oscilatorio en una dirección determinada. Elijase el eje  $x$  según esa dirección y tómese el origen de coordenadas en la posición de equilibrio estable. Se dirá que el movimiento es *armónico* (o *armónico simple*) si puede representarse por la ecuación:

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0),$$

donde  $x$  simboliza la posición de la partícula y se llama *elongación*, y la constante  $A$ , denominada *amplitud*, es el valor máximo que puede alcanzar la elongación  $x$ . La constante  $T$  es el *período*, y  $t_0$  es el tiempo que marca nuestro reloj cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio y  $x$  está aumentando, y el

intervalo  $t - t_0$  es el tiempo transcurrido desde entonces. El ángulo  $\frac{2\pi}{T} (t - t_0)$  se



- 7.9. Un foco perturbador produce ondas esféricas que, a una distancia de 2 m del mismo, tienen una intensidad de  $2 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ . Se pregunta: a) ¿cuánto valdrá la intensidad a 10 m de distancia?, b) ¿cuál será su amplitud a esta distancia,  $A_2$ , en función de la que posea,  $A_1$ , cuando la onda se encontraba a 2 m del foco?, c) ¿cuál es la potencia transmitida por la onda? Supóngase que no hay disipación de energía.

**Solución:**

- a) La intensidad varía en razón inversa al cuadrado de la distancia:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{2 \times 10^{-4}}{I_2} = \frac{10^2}{2^2} \Rightarrow \boxed{I_2 = 8 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2}$$

- b) La amplitud varía inversamente con la distancia:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{A_1}{5}}$$

- c) La potencia,  $P$ , se obtendrá multiplicando la intensidad,  $I$ , por la superficie de la esfera,  $S$ :

$$P = I_1 S_1 = I_1 \times 4\pi r_1^2 = 2 \times 10^{-4} \times 4\pi \times 2^2 = \boxed{10,1 \times 10^{-3} \text{ W}}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### A - MOVIMIENTO ARMÓNICO

- 7.10. Un punto material describe un movimiento armónico de 10 cm de amplitud. Cuando pasa por la posición de equilibrio, el reloj marca  $t_0 = 2 \text{ s}$  y se mueve hacia las  $x$  positivas. Si la frecuencia del movimiento es de 6 Hz, averiguar: a) la ecuación del movimiento; b) la velocidad, aceleración y tiempo transcurrido cuando pasa por  $x = 5 \text{ cm}$  la primera vez con posterioridad a  $t_0$ .

(Solución: a)  $x = 0,10 \text{ sen } 12\pi(t-2)$ ; b)  $v = 3,26 \text{ m/s}$ ,  $a = -71,1 \text{ m/s}^2$ ,  $2,01 \text{ s}$ )

- 7.11. Un punto material describe un movimiento armónico simple de 20 cm de amplitud. Si en el instante inicial,  $t = 0$ , el punto se encuentra en  $x = -0,10 \text{ m}$  y cuando pasa por la posición de equilibrio, dirigiéndose hacia las  $x$  positivas, el reloj marca  $t_0 = 0,1 \text{ s}$ , averiguar: a) el período del movimiento; b) la velocidad cuando hayan transcurrido 2 s; c) la ecuación del movimiento.

(Solución: a) 1,20 s; b)  $-0,907 \text{ m/s}$ ; c)  $x = 0,20 \text{ sen } 5,24(t - 0,1)$ )

- 7.12. Un movimiento armónico posee una aceleración máxima de  $4 \text{ m/s}^2$  y una velocidad máxima de  $2 \text{ m/s}$ . Si cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio moviéndose hacia las  $x$  positivas, el reloj marca  $t_0 = 2 \text{ s}$ , hallar: a) el período del movimiento; b) la amplitud; c) la ecuación del movimiento.

(Solución: a)  $\pi \text{ s}$ ; b) 1 m; c)  $x = 1 \text{ sen } (2t-4)$ )

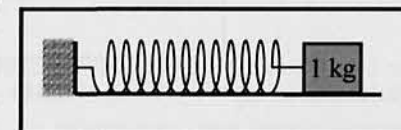
- 7.13. Un movimiento armónico viene expresado en la forma:

$$x = 2 \text{ sen } 10t + 3 \text{ cos } 10t$$

Determinar el período,  $T$ , la amplitud,  $A$ , y la fase inicial del movimiento,  $\varphi$ .

(Solución:  $\pi/5 \text{ s}$ ;  $\sqrt{13} \text{ m}$ ;  $\text{tg } \varphi = 3/2$ ,  $\varphi = 0,983 \text{ rad}$ )

- 7.14. Un cuerpo de 1 kg de masa se encuentra unido a un muelle horizontal de constante  $k = 100 \text{ N/m}$  sobre una mesa, sobre la que puede desplazarse sin rozamiento. Se separa 20 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad. Averiguar: a) el período del movimiento armónico producido; b) la ecuación del movimiento; c) la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial cuando hayan transcurrido  $\pi$  segundos.



(Solución: a)  $\pi/5 \text{ s}$ ; b)  $x = 0,2 \text{ cos } 10t$ ; c) 0,20 m, 0 m/s,  $-20 \text{ m/s}^2$ , 0 J, 2 J)

- 7.15. Un movimiento armónico tiene un periodo de 2 segundos y en el instante  $t = 1$  s la velocidad del punto material móvil es de 6 m/s y su aceleración vale  $a = -10$  m/s<sup>2</sup>. Calcular: a) su posición en ese instante; b) la amplitud del movimiento; c) la fase inicial; d) el tiempo que marca el reloj cuando el punto pasa por la posición de equilibrio la primera vez; e) la ecuación del movimiento; f) las energías cinética y potencial del punto cuando han transcurrido 3 segundos si la masa del punto es de 1 kg.

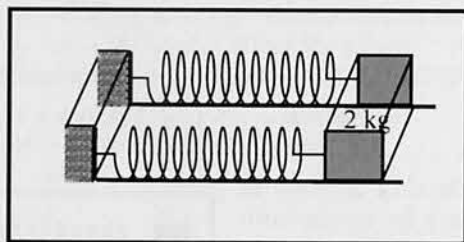
(Solución: a) 1,01 m; b) 2,16 m; c)  $\varphi = -2,65$  rad; d)  $t_0 = 0,844$  s; e)  $x = 2,16 \sin(\pi t - 2,65)$ ; f) 17,9 J y 5,03 J

- 7.16. Un movimiento armónico posee una energía total de 10 J y una frecuencia 10 Hz. Si cuando el punto material, de masa 1 kg, pasa por la posición de equilibrio, moviéndose hacia las  $x$  positivas, el tiempo transcurrido es  $t_0 = 0,59$  s, calcular  $M$  y  $N$  para que la ecuación del movimiento venga representada por:

$$x = M \sin \omega t + N \cos \omega t$$

(Solución:  $M = 0,0576$  m,  $N = 0,0419$  m)

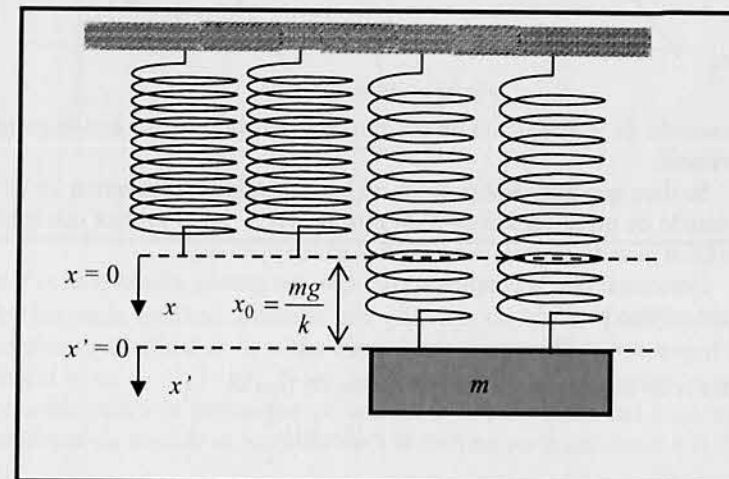
- 7.17. Dos resortes iguales de constante  $k = 200$  N/m se unen por un extremo a un cuerpo de 2 kg de masa. Situados en paralelo, se unen ambos resortes por el otro extremo a una pared fija y se colocan sobre una mesa horizontal. Si se tira del cuerpo alargando los resortes 50 cm y, a continuación, se dejan en libertad y se comienza a contar el tiempo, averiguar: a) la constante del resorte equivalente; b) el periodo y compararlo con el que tendría si sólo hubiera un resorte; c) la ecuación del movimiento; d) energía cinética y potencial cuando han transcurrido 3 s.



(Solución: a)  $k_{eq} = 400$  N/m; b) 0,444 s; 0,628 s;  $(1/2)^{0,5}$ ; c)  $x = 0,5 \cos \sqrt{200}t$ ; d) 50,0 J y 0,0111 J)

- 7.18. Dos resortes iguales de 1 m de longitud y de constante  $k = 50$  N/m cada uno cuelgan del techo. Los extremos libres de ambos muelles se unen a un mismo cuerpo de 2 kg de masa. A continuación, se tira del cuerpo hacia

abajo hasta desplazarlo 20 cm, se deja en libertad y se comienza a contar el tiempo. Supóngase que no existe rozamiento. Hallar: a) la longitud de los resortes cuando el sistema se encuentra en equilibrio después de colgar el cuerpo de 2 kg de masa de los resortes; b) la constante del resorte equivalente a ambos; c) el periodo del movimiento; d) la ecuación del movimiento.



(Solución: a) 1,20 m; b)  $k_{eq} = 100$  N/m; c) 0,889 s; d)  $x' = 0,20 \cos \sqrt{50}t$ )

### B – MOVIMIENTO ONDULATORIO

- 7.19. La ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio armónico unidimensional viene dado por:

$$y(x, t) = 0,60 \sin(4t + 2x).$$

Averiguar: a) ¿en qué sentido del eje  $x$  se propaga la onda?, b) el periodo,  $T$ , la longitud de onda,  $\lambda$  y la velocidad (de fase) de propagación,  $c$ . Se supone que se emplea el SI en todos los problemas de movimiento ondulatorio.

(Solución: a) hacia las  $x$  negativas; b)  $\pi/2$  s;  $\pi$  m; 2 m/s)

- 7.20. La ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio armónico unidimensional viene dado por:

$$y(x, t) = 0,50 \sin(10t - 20x + \frac{\pi}{2}).$$

Hallar: a) el período,  $T$ , la longitud de onda,  $\lambda$  y la velocidad de propagación,  $c$ ; b) la velocidad y la aceleración de la partícula situada en  $x = 3$  m en el instante  $t = 10$  s; c) algún punto que en el instante considerado,  $t = 10$  s, tenga perturbación máxima.

(Solución: a)  $\pi/5$  s;  $\pi/10$  m, 0,5 m/s; b) -3,73 m/s; 33,3 m/s<sup>2</sup>; c)  $x = 5$  m y  $5 \pm \lambda$  m)

### 7.21. Sea

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx),$$

la ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio armónico unidimensional.

Se dice que dos puntos están *en fase* cuando se encuentran en el mismo estado de perturbación en *todo instante* ( $y_1 = y_2$ ), y se dice que están en *oposición* cuando en *todo instante* se verifica  $y_1 = -y_2$ .

Demostrar que la condición para que dos puntos, situados en  $x_1$  y  $x_2$  estén en: a) fase es:

$$x_2 - x_1 = n\lambda,$$

siendo  $n$  un número entero; b) oposición de fase es:

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$

### 7.22. Demostrar que la ecuación general $y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$ se convierte en:

a)  $y = A \sin(kx - \omega t)$  si  $\phi = \pi$ ; b)  $y = A \cos(\omega t - kx)$  si  $\phi = \pi/2$ .

### 7.23. Una onda armónica transversal se propaga según la ecuación de un movimiento ondulatorio armónico unidimensional dada por:

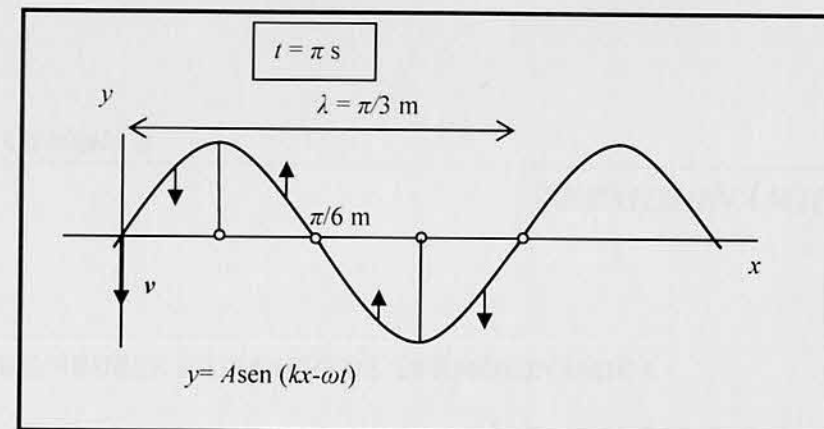
$$y(x, t) = 0,60 \sin(6x - 6t).$$

a) Calcular el período,  $T$ , la longitud de onda,  $\lambda$ , y la velocidad de propagación,  $c$ .

b) Averiguar los puntos en que la aceleración es nula cuando hayan transcurrido  $\pi$  segundos.

c) Representar gráficamente, con ejes  $x$ - $y$ , el estado del movimiento cuando hayan transcurrido  $\pi$  segundos, y estudiar el signo de la velocidad durante una longitud de onda.

(Solución: a)  $\pi/3$  s;  $\pi/3$  m; 1 m/s; b)  $x = \pi \pm n\pi/6$ ; c) negativa desde 0 hasta  $\pi/12$  m; positiva desde  $\pi/12$  hasta  $\pi/4$  y negativa de nuevo desde  $\pi/4$  hasta  $\pi/3$  )



7.24. Una onda esférica transmite una potencia de 10 W. Cuando dista  $r_2$  del centro, su amplitud es la mitad que cuando dista  $r_1$ . Si la intensidad a la distancia  $r_2$  es de  $12,3 \times 10^{-3}$  W/m<sup>2</sup>, se pregunta: a) ¿cuánto valen  $r_1$  y  $r_2$ ?; b) ¿cuánto valdrá la intensidad de la onda a una distancia del foco tal que la amplitud de la onda se ha reducido a la décima parte que tenía a la distancia  $r_1$ ?

(Solución: a) 4,02 m y 8,04 m; b)  $4,92 \times 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>)

$$\varepsilon = \frac{T_0}{T - T_0},$$

donde  $T$  y  $T_0$  son las temperaturas de las fuentes caliente y fría, respectivamente. En consecuencia:

$$\varepsilon = \frac{T_0}{T - T_0} = \frac{(-20 + 273,15)}{(25 + 273,15) - (-20 + 273,15)} = \boxed{5,63}$$

b) En virtud de la definición del coeficiente de efecto frigorífico, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{|W|}.$$

Dividiendo por el tiempo numerador y denominador y representando con un punto encima de la letra las magnitudes correspondientes, como en el problema 8.7, resultará:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_0}{|\dot{W}|} \Rightarrow 5,63 = \frac{\dot{Q}_0}{1} \Rightarrow \dot{Q}_0 = 5,63 \text{ kW}$$

Obsérvese que al frigorífico se le suministra 1 kW de potencia desde el exterior y él absorbe 5,63 kW de la fuente fría. La suma de estas dos cantidades la cederá a la fuente caliente y se conservará la energía.

Para pasarlo a frigorías/h, utilizaremos la relación  $1 \text{ kcal} = 4,18 \text{ kJ}$  y, en consecuencia:

$$5,63 \text{ kW} = 5,63 \text{ kJ/s} = \frac{1}{4,18} \times 3600 \times 5,63 \text{ kcal/h} = \boxed{4,85 \times 10^3 \text{ frigorías/h}}$$

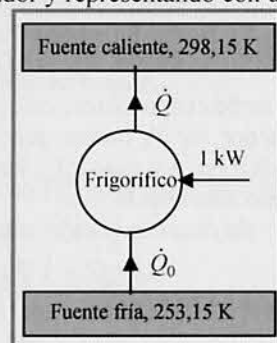
c) Como en cada ciclo la energía interna no varía, se verificará, en virtud del primer principio de Termodinámica:

$$|Q| - Q_0 = |W|,$$

donde  $Q_0$  representa el calor extraído a la fuente fría y  $|Q|$  el calor cedido a la fuente caliente. Recuérdese que  $Q$  es el calor intercambiado con la fuente caliente y que, como en este ciclo, es calor cedido, le corresponde signo negativo según el criterio de signos utilizado. De forma análoga, el trabajo  $W$  es negativo por ser trabajo absorbido por el frigorífico.

Dividiendo por el tiempo los dos miembros de la última ecuación, resultará:

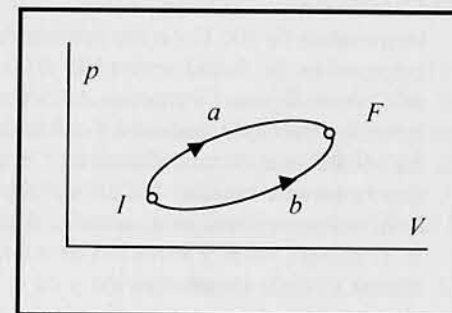
$$|\dot{Q}| - \dot{Q}_0 = |\dot{W}| \Rightarrow |\dot{Q}| = \dot{Q}_0 + |\dot{W}| = 5,63 + 1 = \boxed{6,63 \text{ kW}}$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS

### A – PRIMER PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

- 8.10. Cuando el sistema evoluciona reversiblemente de I a F por el camino  $a$  absorbe 30 kJ de calor. Cuando lo hace reversiblemente por el camino  $b$ , absorbe 20 kJ de calor y su energía interna aumenta en 10 kJ. Supóngase que la energía interna en I vale 40 kJ. Averiguar: a) el trabajo a lo largo de  $IaF$ ; b) el trabajo a lo largo de  $IbF$ ; c) el calor intercambiado a lo largo de  $FaI$ ; d) el calor intercambiado a lo largo de  $FbI$ ; e) la energía interna en F; f) el área encerrada por el bucle de la figura.



(Solución: a) 20 kJ; b) 10 kJ; c) -30 kJ; d) -20 kJ; e) 50 kJ; f) 10 kJ)

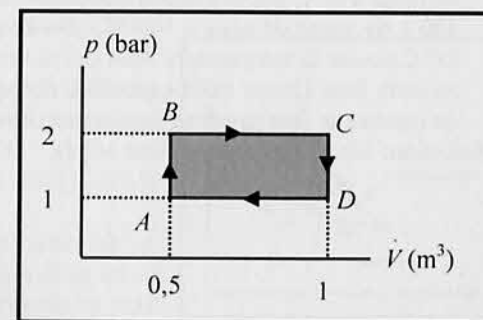
- 8.11. Un  $\text{m}^3$  de gas ideal evoluciona reversiblemente según la ecuación  $pV^2 = \text{cte.}$  desde una presión inicial de 4 bar hasta 1 bar. Calcular el trabajo realizado.

(Solución:  $2 \times 10^5 \text{ J}$ )

- 8.12. Un  $\text{m}^3$  de gas ideal (índice adiabático:  $\gamma = 1,4$ ;  $C_p = 29,3 \text{ J/(mol K)}$ ;  $R = 8,31 \text{ J/(mol K)}$ ) que se halla a una temperatura de 400 K y 2 bar de presión, se expande adiabáticamente hasta una presión final de 1 bar. Hallar la temperatura final, el volumen final y el trabajo realizado si: a) la expansión es reversible; b) la expansión se produce contra una presión exterior constante de 1 bar.

(Solución: a) 328 K;  $1,64 \text{ m}^3$ ;  $90,0 \times 10^3 \text{ J}$  b) 343 K;  $1,72 \text{ m}^3$ ;  $72,0 \times 10^3 \text{ J}$ )

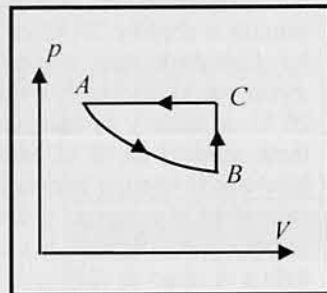
- 8.13. Un gas ideal ( $C_v = 3R/2$ ,  $R = 8,31 \text{ J/(mol K)}$ ) recorre el ciclo de la figura por vía reversible. La temperatura en el punto A es de 300 K. Calcular: a) el número de mo-



les; b) la temperatura en B, C y D; c) el trabajo y calor total intercambiados en el ciclo; d) la variación de energía interna entre A y C y la variación de energía interna en todo el ciclo.

(Solución: a) 20,1; b) 600 K, 1200 K; 600 K; c) 50 000 J; d)  $225 \times 10^3$  J, 0 J)

- 8.14. Un mol de oxígeno ( $C_V = 5$  y  $C_P = 7$  cal/(mol K)) que se encuentra a una temperatura de 300 K y a una presión de 3 bar, realiza de forma reversible el ciclo ABC de la figura. El proceso AB es una isoterma reversible hasta una presión de 1 bar, el BC una isocora reversible y el CA una isobara reversible. Hallar: a) la presión, volumen y temperatura en A, B y C, b) el trabajo, calor y variación de energía interna en cada transformación y en el ciclo completo. Considérese el oxígeno como un gas perfecto,  $R = 8,31$  J/(mol K)



(Solución: a) A (3 bar;  $8,31 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>; 300 K); B (1 bar;  $24,9 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>; 300 K); C (3 bar;  $24,9 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>; 899 K); b)  $W_{AB} = 2,74 \times 10^3$  J;  $W_{BC} = 0$  J;  $W_{CA} = -4,98 \times 10^3$  J;  $W_{tot} = -2,24 \times 10^3$  J;  $Q_{AB} = 2,74 \times 10^3$  J;  $Q_{BC} = 12,5 \times 10^3$  J;  $Q_{CA} = -17,5 \times 10^3$  J;  $Q_{tot} = W_{tot} = -2,24 \times 10^3$  J;  $\Delta U_{AB} = 0$  J;  $\Delta U_{BC} = 12,5 \times 10^3$  J;  $\Delta U_{CA} = -12,5 \times 10^3$  J;  $\Delta U_{tot} = 0$  J)

- 8.15. ¿Cuántos gramos de hielo se pueden fundir con la condensación a 100 °C de 100 g de vapor de agua? El calor de fusión del hielo en condiciones normales (0 °C y 1 atm de presión) es  $L_f = 333$  kJ/kg y el calor de vaporización del agua (a 100 °C y 1 atm de presión) es  $L_v = 2257$  kJ/kg.

(Solución: 678 g)

- 8.16. En un recipiente aislado térmicamente se tiene una barra de hielo de 1 kg de masa a 0 °C y a la presión normal de 1 atm. Para fundirla se introducen 400 g de vapor de agua a 100 °C. ¿Será suficiente para derretir todo el hielo? Calcular la temperatura final del sistema y la cantidad de agua que hay en cada fase. Datos: calor específico del agua: 4,18 kJ/(kg °C) y los calores de cambio de fase tómense los del problema precedente.

(Solución: Sí; 100 °C; 0 kg en fase sólida, 1,33 kg en fase líquida y 67 g en fase gaseosa)

### B – TRANSMISIÓN DEL CALOR

- 8.17. Una placa plana tiene 1 m de espesor y 2 W/(m °C) de conductividad térmica. Si la cara izquierda posee una temperatura de 100 °C y la derecha 0 °C, ¿Cuál será la temperatura a 25 cm de la cara derecha?

(Solución: 25 °C)

- 8.18. Para combatir el frío exterior (-10 °C), el conductor de un automóvil ha puesto en funcionamiento la calefacción, que consigue mantener el aire del interior a 25 °C. Si el vidrio de la ventanilla tiene un espesor de 1 cm y una conductividad térmica de 1 W/(m °C) y el coeficiente de transmisión del calor del aire en el exterior es de 50 W/(m<sup>2</sup> °C) y el del aire interior de 30 W/(m<sup>2</sup> °C), ¿cuál será la temperatura de las caras interior y exterior de la ventanilla?

(Solución: 6,58 °C y 1,06 °C)

- 8.19. Tómese para el radio del Sol  $7 \times 10^5$  km y supóngase que emite por radiación  $4,5 \times 10^{26}$  W y que puede considerarse como un cuerpo negro. ¿Cuál sería su temperatura? ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup> K))

(Solución: 5990 K)

### C – SEGUNDO PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA

- 8.20. Un ciclo reversible de Carnot posee un rendimiento del 25% y proporciona una potencia de 60 W. Si la temperatura del foco caliente es de 373 K, calcular: a) el calor, por unidad de tiempo, absorbido del foco caliente; b) el calor, por unidad de tiempo, cedido al foco frío; c) la temperatura del foco frío.

(Solución: a) 240 W; b) 180 W; c) 280 K)

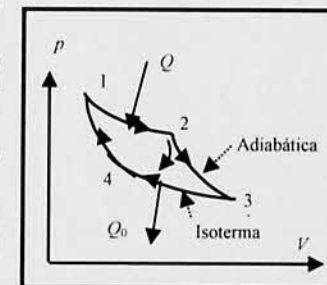
- 8.21. Calcúlese el rendimiento del ciclo del problema 8.13.

(Solución: 0,154 (15,4%))

- 8.22. Inviértase el sentido de recorrido del ciclo del problema 8.14 y calcúlese su rendimiento.

(Solución: 0,128 (12,8%))

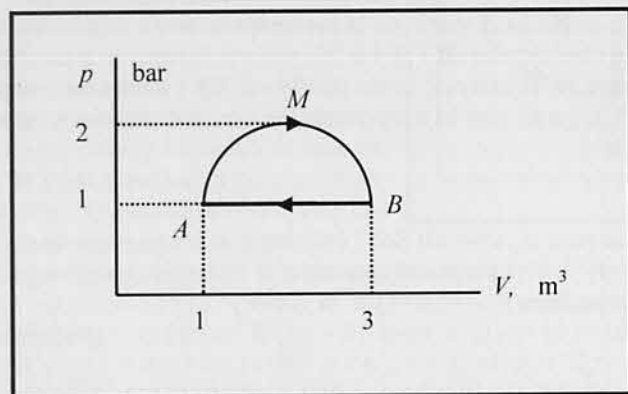
- 8.23. Supóngase que un gas ideal describe un ciclo reversible de Carnot. Comienza en el punto 1 de la isoterma de temperatura más



alta. Obtener la relación que deben cumplir entre sí los volúmenes  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  de los vértices del cuadrilátero curvilíneo del ciclo de Carnot.

(Solución:  $V_1 \times V_3 = V_2 \times V_4$ )

- 8.24. Un gas ideal ( $C_V = 3R/2$ ,  $R = 8,31 \text{ J/(mol K)}$ ) recorre el ciclo de la figura por vía reversible. La temperatura en el punto  $A$  es de 300 K. Calcular: *a)* el trabajo, calor y variación de energía interna en cada transformación; *b)* el rendimiento del ciclo.



(Solución: *a)*  $W_{AMB} = 357 \times 10^3 \text{ J}$ ;  $\Delta U_{AMB} = 300 \times 10^3 \text{ J}$ ;  $Q_{AMB} = 657 \times 10^3 \text{ J}$ ;  $W_{BA} = -2 \times 10^5 \text{ J}$ ;  $\Delta U_{BA} = -300 \times 10^3 \text{ J}$ ;  $Q_{BA} = -302 \times 10^5 \text{ J}$ ; *b)* 0,239 (23,9%)

- 8.25. Una máquina frigorífica funciona reversiblemente según un ciclo inverso de Carnot. Su coeficiente de efecto frigorífico es 8 y la potencia que absorbe del exterior es de 0,5 kW. Si la temperatura de la fuente fría es de  $-22^\circ\text{C}$ , calcular: *a)* la temperatura de la fuente caliente; *b)* el calor, por unidad de tiempo, absorbido a la fuente fría; *c)* el calor, por unidad de tiempo, cedido a la fuente caliente.

(Solución: *a)* 283 K; *b)* 4 kW; *c)* 4,5 kW)