Un cilindro de masa M y radio R está inicialmente en reposo en el plano horizontal de la figura. Otra masa m, inicialmente en reposo en el punto A, está suspendida de un hilo inextensible de longitud L formando un ángulo "theta" con la vertical tal como indica la figura. Al liberar la masa m, ésta se encuentra con el cilindro en el punto B produciéndose un choque totalmente elástico. Como consecuencia del choque, el cilindro rueda sin deslizar a lo largo del plano horizontal y sube por el plano inclinado hasta pararse a una cierta altura h sobre el suelo. Se pide calcular:

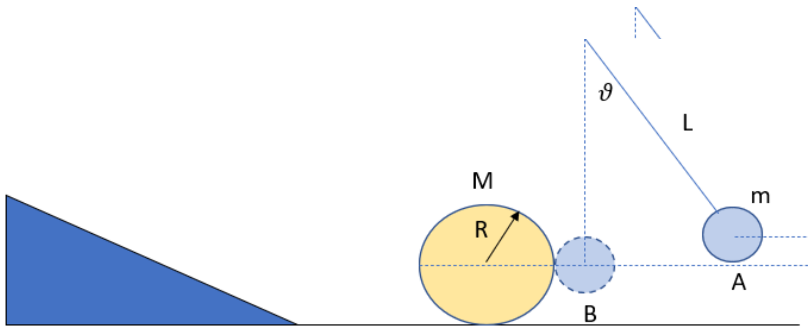
a) La velocidad de la masa m antes de chocar con el cilindro.

b) La tensión de la cuerda en el punto B.

c) La velocidad del CM del cilindro justo después del choque y su velocidad angular mientras se desplaza a lo largo del plano horizontal. Suponga que el cilindro adquiere instantáneamente y sin pérdidas de energía la condición de rodadura sin deslizamiento.

d) La altura máxima H que alcanza el cilindro sobre el suelo en el tramo inclinado.

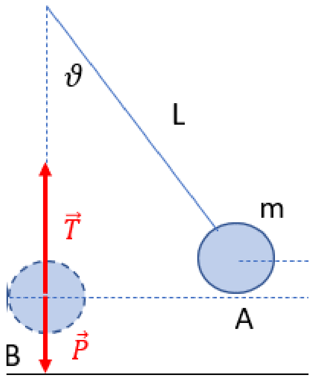
DATOS: L, theta, M, m, R, $I = \frac{1}{2} M R^2$.



a) Como el péndulo es un sistema conservativo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 \xrightarrow{v_A=0} v_b = \sqrt{2gh} \xrightarrow{h=L(1-cos\vartheta)} v_b = \sqrt{2gL(1-cos\vartheta)} = 0{,}888 m/s$$

b) Antes de la colisión



$$F_c = T - P \quad \Rightarrow \quad T = F_c + P = m\frac{v_b^2}{L} + mg = m\frac{2gL(1-cos\vartheta)}{L} + mg = mg(3-2cos\vartheta) = 2{,}49\ N$$

c) Después de la colisión

$$mv_b + 0 = mv + Mv_{CM} \qquad [1]$$

$$\frac{1}{2}mv_b{}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left[\frac{v_{CM}}{R}\right]^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{4}Mv_{CM}{}^2 \qquad [2]$$

$$[1] \Rightarrow v = v_b - \frac{M}{m}v_{CM} \qquad [3]$$

Y sustituyendo [3] en [2]

$$\frac{1}{2}mv_b{}^2 = \frac{1}{2}m\left[v_b - \frac{M}{m}v_{CM}\right]^2 + \frac{3}{4}Mv_{CM}{}^2 = \frac{1}{2}mv_b{}^2 - \frac{1}{2}m2\,v_b\frac{M}{m}v_{CM} + \frac{1}{2}m\left[\frac{M}{m}v_{CM}\right]^2 + \frac{3}{4}Mv_{CM}{}^2$$

$$v = v_b - \frac{M}{m} v_{CM}$$

$$\frac{1}{2} m {v_b}^2 = \frac{1}{2} m \left[v_b - \frac{M}{m}\ v_{CM} \right]^2 + \frac{3}{4} M {v_{CM}}^2 = \frac{1}{2} m {v_b}^2 - \frac{1}{2} m 2\, v_b \frac{M}{m}\ v_{CM} + \frac{1}{2} m \left[\frac{M}{m}\ v_{CM} \right]^2 + \frac{3}{4} M {v_{CM}}^2$$

$$0 = -\, M v_b v_{CM} + \frac{1}{2} m \left[\frac{M}{m}\ v_{CM} \right]^2 + \frac{3}{4} M {v_{CM}}^2 = -\, M v_b v_{CM} + {v_{CM}}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{M^2}{m} + \frac{3}{4} M \right) = v_{CM} \left(v_{CM} \left(\frac{1}{2} \frac{M^2}{m} + \frac{3}{4} M \right) - M v_b \right) \quad [4]$$

v_{CM}=0 Solución trivial y no física de [4]

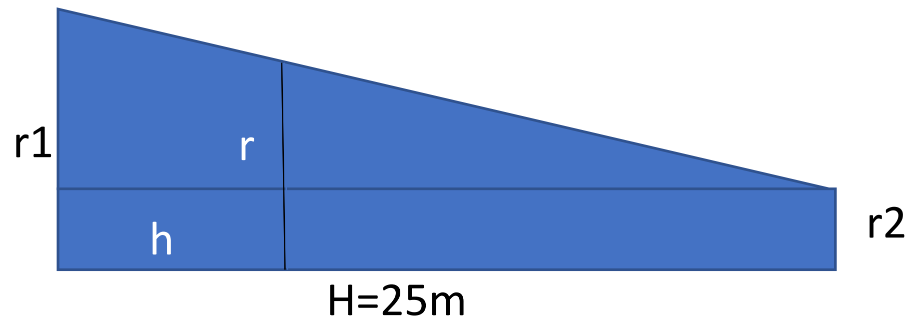
$$\left(v_{CM} \left(\frac{1}{2} \frac{M^2}{m} + \frac{3}{4} M \right) - M v_b \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \frac{M v_b}{\left(\frac{M^2}{2m} + \frac{3}{4} M \right)} = v_b \frac{1}{\left(\frac{M}{2m} + \frac{3}{4} \right)} = 0{,}444 \frac{m}{s} \qquad \omega = v_b \frac{1}{R\left(\frac{M}{2m} + \frac{3}{4} \right)} = 4{,}44 s^{-1}$$

$$Además \qquad v = v_b - \frac{M}{m}\ v_{CM} = v_b \left(1 - \frac{M}{m} \frac{1}{\left(\frac{M}{2m} + \frac{3}{4} \right)} \right) = v_b \left(\frac{3m - 2M}{3m + 2M} \right) = -0{,}2220\ m/s$$

d) Como todo es conservativo

$$mgh = MgH + \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow H = \frac{m}{M} \left(L(1 - cos\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right) = 1{,}51 \text{ cm}$$

El agua en un edificio, de 25 metros de altura en su último piso, fluye por una tubería. En la calle la presión es de 3,3 atmosferas, la tubería tiene un radio de 2,5 cm y el agua fluye a 0,50 m/s. La tubería se angosta de manera gradual con la altura hasta que en el último piso su radio es de 1,25 cm. Suponiendo que el régimen es estacionario obtenga una expresión que proporcione la velocidad y la presión en función de la altura. Usando el resultado anterior, o mediante cualquier otro procedimiento, obtenga la velocidad del agua y la presión en el último piso (3 puntos).



$$\frac{r-0{,}0125}{0{,}0250-0{,}0125}=\frac{h-25}{0-25} \quad \Rightarrow \quad r=0{,}025-0{,}0005h \quad \Rightarrow \quad S(h)=\pi(0{,}025-0{,}0005h)^2$$

Como el caudal ha de ser constante $S(h)\cdot v(h)=\text{Cte} \quad \Rightarrow \quad v(h)=\frac{\pi(0{,}025)^2\cdot 0{,}5}{\pi(0{,}025-0{,}0005h)^2}=\frac{(0{,}025)^2\cdot 0{,}5}{(0{,}025-0{,}0005h)^2}$

Además $3{,}3\cdot 1{,}013\cdot 10^5+\frac{1}{2}1000\cdot 0{,}5^2+0=\mathrm{p(h)}+\frac{1}{2}1000\cdot\left[\frac{(0{,}025)^2\cdot 0{,}5}{(0{,}025-0{,}0005h)^2}\right]^2+9800\mathrm{h}$

$$\mathrm{p(h)}=3{,}3\cdot 1{,}013\cdot 10^5+\frac{1}{2}1000\cdot 0{,}5^2\left(1-\left[\frac{(0{,}025)^2}{(0{,}025-0{,}0005h)^2}\right]^2\right)-9800\mathrm{h}$$

$v(25m)$ =2m/s $\qquad$ $\mathrm{p}(25m)=0.88$ atm