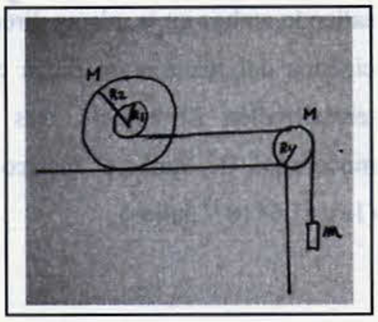
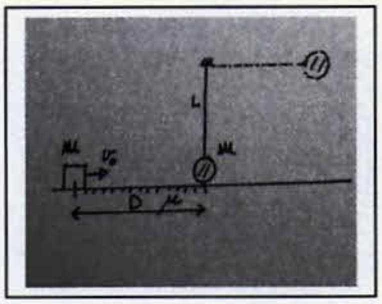
Entregable PEC2

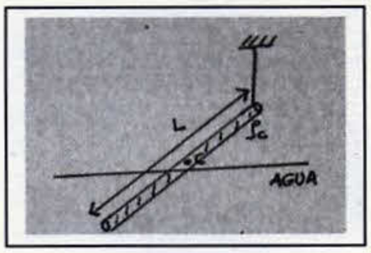
1) Considérese el sistema de masas cuerdas inextensibles y discos con masa de la figura adjunta, el cual se encuentra inicialmente en reposo. Determine mediante Newton y balance de energía cuál será la velocidad adquirida por el cuerpo colgante de masa m cuando el disco móvil sobre la mesa ha rodado sin deslizar una distancia D respecto de su posición inicial. Los radios de los dos discos son R1 y R2 para el disco móvil y R3=R1 para el fijo y ambos tienen la misma masa M.



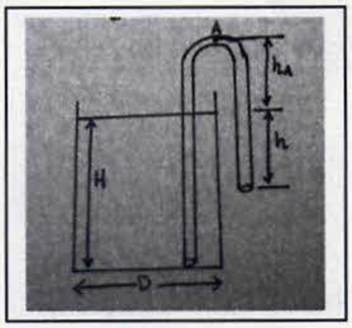
2) Un objeto de masa m se impulsa con una velocidad inicial v_0 sobre una superficie horizontal rugosa μ=0.2 al encuentro de un péndulo de longitud L y de la misma masa que se encuentra en reposo a una distancia D inicial del objeto. Los dos cuerpos colisionan elásticamente y el péndulo asciende hasta colocarse en posición horizontal, para después volver a chocar con el cuerpo elásticamente en su retorno. Determinar la velocidad inicial del objeto para que el péndulo alcance la posición horizontal. En el retorno del péndulo y tras la segunda colisión con el objeto, que distancia alcanzará sobre la superficie horizontal respecto a la posición del péndulo en su camino inverso?



3) Una barra de longitud L está hecha de un material de densidad ρ_c menor que la del agua. Se sujeta por el extremo a un cable y se introduce parcialmente en agua. Calcular la longitud de barra que queda fuera del agua una vez que se alcanza el equilibrio. Aplicación numérica: ρ_c =0.75 gr/cm3.



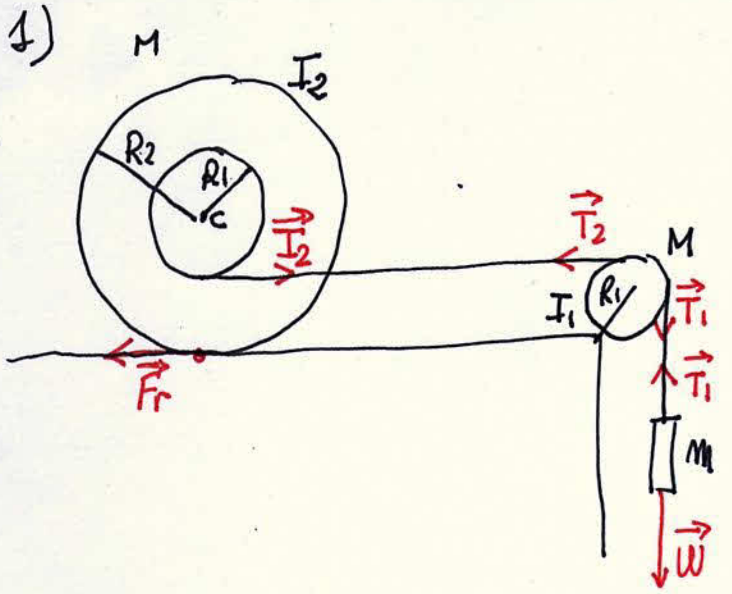
4) Se pretende vaciar un depósito cilíndrico abierto de 4m de altura y 1m de diámetro mediante aspiración del agua por el método del sifón con una goma de sección 1 cm2 colocándola según indica la figura, donde H es el nivel de agua del deposito y h_A y h están referidas a la superficie del agua del deposito.



a) En qué condiciones se podrá vaciar toda el agua del depósito?
b) Con qué velocidad saldrá el agua por el extremo al aire de la goma en función de h?
c) En el caso de que se pueda vaciar todo el deposito, cuánto tiempo se tardará en ello?

5) Un neutrón rápido de 100 keV de energía producido en un reactor nuclear, colisiona elásticamente con el núcleo en reposo de número másico A de una barra del moderador, saliendo ambos en la misma dirección incidente (choque frontal). Calcular la perdida de energía cinética del neutrón en dicha colisión. Si se desea que el neutrón adquiera la energía de termalización Et=25meV, tras varias colisiones del mismo tipo que la descrita con un moderador de numero másico A=2, ¿cuántas de esas colisiones deberá experimentar? ($1eV=1.6*10^{-19}$ Julios)

1)



$$\left\{\begin{array}{l} m\,a_1 = mg - T_1 \\ I_1\, a_{\alpha_1} = R_1 (T_1 - T_2) \\ a_1 = a_{\alpha_1}\cdot R_1 \\ M\, a_c = T_2 - F_r \\ I_2\, a_{\alpha_2} = R_2 F_r - R_1 T_2 \\ a_c = a_{\alpha_2}\cdot R_2 \\ a_1 = a_c - a_{\alpha_2} R_1 = a_c\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \end{array}\right.$$

Eliminando algunas de las variables podemos reducir el sistema a

$$\left.\begin{array}{l} m a_1 = mg - T_1 \\ I_1 \dfrac{a_1}{R_1^2} = T_1 - T_2 \\ \left(\dfrac{I_2}{R_2} + M R_2\right)\dfrac{R_2}{R_2 - R_1}\, a_1 = (R_2 - R_1)\cdot T_2 \end{array}\right\} \quad \boxed{a_1 = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M + \frac{3}{2}M\frac{R_2^2}{(R_2-R_1)^2}}}$$

de donde, al recorrer el disco superior una distancia D, la masa habrá recorrido una altura $h = D\cdot\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$ y $v_1 = \sqrt{2 a_1 h}$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2mgD\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)}{m + \frac{1}{2}M + \frac{3}{2}\frac{M R_2^2}{(R_2-R_1)^2}}}}$$

Si lo planteamos por Energías

$$E_{INICIAL} = mgh$$

$$E_{FINAL} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad \text{CON}$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R_1 \qquad v_1 = v_c\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \qquad \omega_2 = \frac{v_c}{R_2}\ , \quad h = D\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Sustituyendo queda:

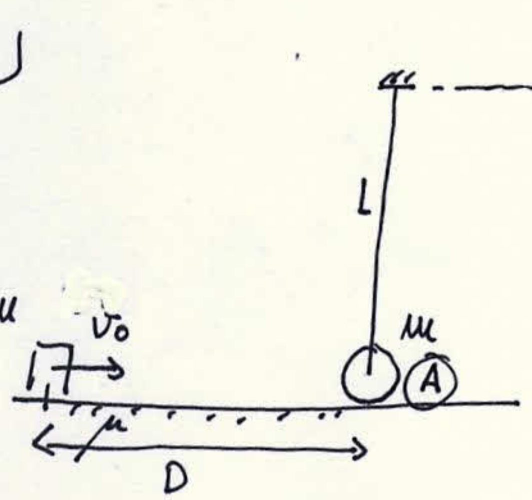
$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\cdot\frac{v_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{2}M\cdot\frac{v_1^2}{\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^2} + \frac{1}{2}I_2\cdot\frac{v_1^2}{\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\cdot\frac{1}{R_2^2}$$

con lo que

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mgD\cdot\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)}{m + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M\frac{R_2^2}{(R_2-R_1)^2} + \frac{1}{2}M\frac{R_2^2}{(R_2-R_1)^2}}}$$

que coincide con la obtenida por mecánica de Newton.

2)



Según las fórmulas para la colisión elástica

$$\begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

↑ velocidad justo antes del choque.

Antes del choque la velocidad v_1 de la masa es

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgD\mu = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gD\mu}$$

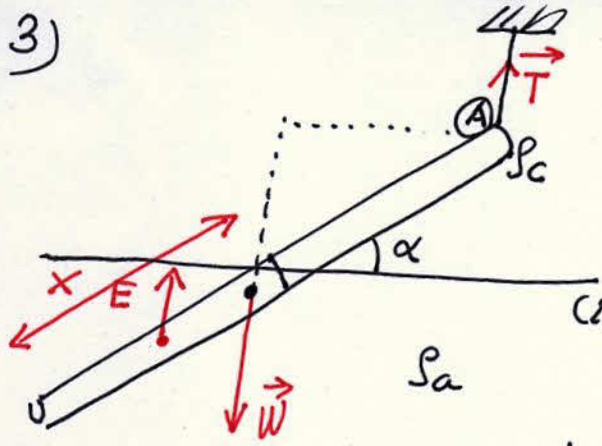
Si el péndulo alcanza la posición B se cumplirá

$$\frac{1}{2}m v_2'^2 = mgL \Rightarrow \frac{1}{2}(v_0^2 - 2gD\mu) = gL \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gL + 2gD\mu}}$$

A la vuelta, el péndulo entra en la nueva colisión con la velocidad v_2' y tras la colisión $v_2'' = 0$, $v_1'' = v_2' = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gD\mu}$. Por tanto la masa retrocederá una distancia tal que

$$0 = \frac{1}{2}mv_1''^2 - \mu mgD' \Rightarrow \boxed{D' = \frac{v_0^2 - 2gD\mu}{2\mu g}}$$

3)



(1) $T+E-W=0$ con $E=\rho_a x\cdot S g$

$S \equiv$ sección de la barra

(2) $\frac{L}{2}\cancel{\cos\alpha}\cdot W-\left(L-\frac{x}{2}\right)\cancel{\cos\alpha}\, E=0$

de donde

$$\frac{L}{2}\underset{\substack{\uparrow \\ L\cdot S\cdot\rho_c}}{M}g-\left(L-\frac{x}{2}\right)\rho_a x S g=0$$

La ecuación a resolver es

$$\rho_c\frac{L^2}{2}-\left(L-\frac{x}{2}\right)\rho_a x=0$$

que puede ponerse como

$$x^2-2Lx+\frac{\rho_c}{\rho_a}L^2=0 \Rightarrow x=L\pm L\sqrt{1-\rho_c/\rho_a}$$

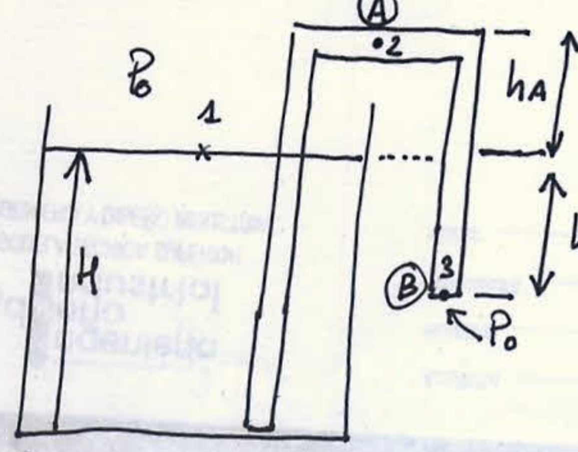
la solución válida es $\boxed{x=L\left(1-\sqrt{1-\rho_c/\rho_a}\right)}$ y por tanto,

la longitud de varilla fuera del agua es $\mathcal{L}=L-x=L\sqrt{1-\rho_c/\rho_a}$

Aplicación: Si $\rho_c=0{,}75$ y $\rho_a=1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}L}$

---

4)



a) Aplicando Bernoulli entre 1 y 2

$$(1)\begin{cases}\frac{1}{\rho}P_0+gH+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{1}{\rho}P_A+g(H+h_A)+\frac{1}{2}v_A^2\\ S_1v_1=S_2v_2\end{cases}$$

y entre 1 y 3

$$(2)\begin{cases}\cancel{\frac{1}{\rho}P_0}+gH+\frac{1}{2}v_1^2=\cancel{\frac{1}{\rho}P_0}+g(H-h)+\frac{1}{2}v_3^2\\ S_1v_1=S_3v_3\end{cases}$$

Finalmente entre 2 y 3

$$(3)\begin{cases} \frac{1}{\rho} P_A + g(H+h_A) + \frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{\rho} P_0 + g(H-h) + \frac{1}{2} v_B^2 \\ S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_A = v_B \end{cases}$$

De (3) se obtiene
de (2)

$$\begin{cases} P_A = P_0 - \rho g (h+h_A) \\ v_3^2 = v_1^2 + 2gh = \left(\frac{S_3}{S_1}\right)^2 v_3^2 + 2gh \end{cases}$$

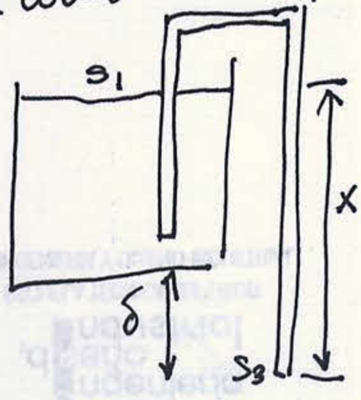
por tanto
$$\boxed{\begin{aligned} P_A &= P_0 - \rho g (h+h_A) \\ v_3 &= \sqrt{\frac{2gh}{1-(S_3/S_1)^2}} \end{aligned}}$$

y para que se pueda vaciar toda el agua del depósito, el punto (3) debe estar en línea con el fondo del depósito, y además h_A no puede valer cualquier cosa sino que $P_A \geq 0$, es decir

$$P_0 \geq \rho g (h+h_A)$$

y en conclusión, la rama al aire debe tener una longitud total $h+h_A \leq \frac{P_0}{\rho g}$, debiendo llegar la boca hasta el nivel del fondo del depósito como mínimo.

En cuanto al tiempo de vaciado, este dependerá de $h \equiv x$



$$-S_1 \frac{dx}{dt} = S_3 \sqrt{\frac{2gx}{1-(S_3/S_1)^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{S_3}{S_1}\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{S_3}{S_1}\right)^2}}\, dt$$

$$\int_{H+\delta}^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{S_3}{S_1}\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{S_3}{S_1}\right)^2}}\, dt \Rightarrow t = \frac{2(\sqrt{H+\delta}-\sqrt{\delta})}{\frac{S_3}{S_1}\sqrt{\frac{2g}{1-(S_3/S_1)^2}}}$$

Nº5) Se trata de una colisión frontal.

las formulas para ese tipo de colisión frontal nos dicen que

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_n - A \cdot m_n}{m_n + A\, m_n} v_1 = \frac{1-A}{1+A} v_1$$

$$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{1+A} v_1 \quad \text{con } A \equiv \text{nº másico}$$

por tanto para el neutrón

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\frac{1}{2} m_n \cdot v_1'^2}{\frac{1}{2} m_n v_1^2} = \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2 = \alpha$$

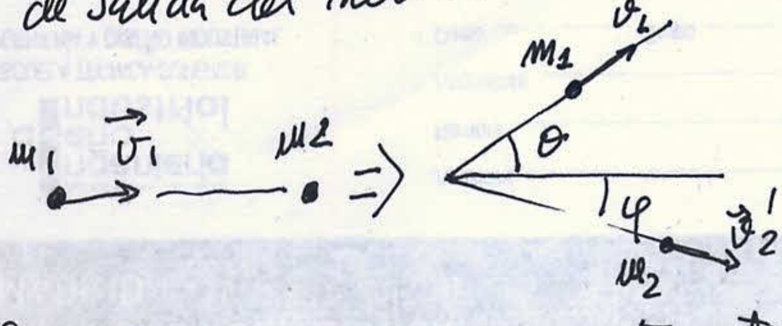
en cada colisión. Por tanto al experimentar N colisiones de este tipo

$$\frac{E_f^N}{E_i} = \alpha^N \Rightarrow E_f^N = \alpha^N \cdot E_i$$

y $$\boxed{N = \frac{\log(E_f^N / E_i)}{\log \alpha}} = \frac{\log(25 \cdot 10^{-3} / 10^5)}{\log\left[\left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2\right]_{A=2}} = \underline{\underline{6{,}92}}$$

por tanto con 7 colisiones, el neutrón se "termaliza"

<u>Nota</u>: Este resultado es el más favorable puesto que la colisión real puede no ser frontal y venir afectada por un ángulo de salida del neutrón



En este caso es más conveniente estudiar la colisión en el CDM

(LO QUE VIENE A CONTINUACION ES UN CALCULO OPCIONAL)

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1{}' + m_2 v_2{}' \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + A\vec{v}_2{}'$$

en CDM: $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1{}' + m_2 \vec{v}_2{}'}{m + m_2} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{\vec{v}_1}{1+A}$

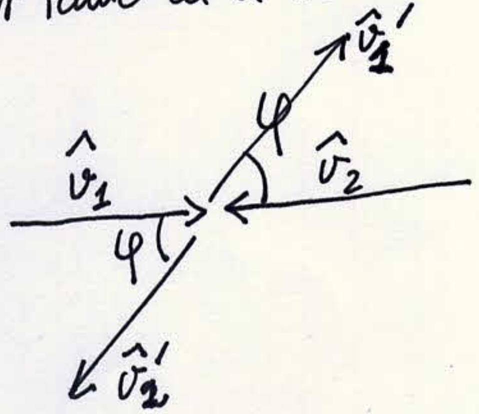
$$\hat{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1\left(1 - \frac{1}{1+A}\right) = \frac{A\vec{v}_1}{1+A}$$

$$\hat{v}_2 = \cancel{\vec{v}_2}^{\,0} - v_{CM} = -\frac{\vec{v}_1}{1+A}$$

En CDM $\quad m_1 \hat{v}_1 + m_2 \hat{v}_2 = 0 \Rightarrow \hat{v}_1 + A\hat{v}_2 = 0$

$\quad m_1 \hat{v}_1{}' + m_2 \hat{v}_2{}' = 0 \Rightarrow \hat{v}_1{}' + A\hat{v}_2{}' = 0$

Por tanto en el sistema del CDM la imagen de la colisión es



$$\hat{v}_1{}' = |\hat{v}_1{}'|(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j})$$

$$\vec{v}_1{}' = \hat{v}_1{}' + \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_1}{1+A} + |\hat{v}_1{}'|(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j})$$

pero por la conservación de la energía, en el CDM.

$$\frac{1}{2}m_1 \hat{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \hat{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \hat{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \hat{v}_2'^2 \Rightarrow$$

$$\hat{v}_1^2 + A\cdot\frac{\hat{v}_1^2}{A^2} = \hat{v}_1'^2 + A\cdot\frac{\hat{v}_1'^2}{A^2} \Rightarrow \hat{v}_1^2 = \hat{v}_1'^2 \Rightarrow |\hat{v}_1'| = |\hat{v}_1|$$

por tanto

$$\vec{v}_1{}' = \frac{\vec{v}_1}{1+A} + \hat{v}_1(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}) = \frac{\vec{v}_1}{1+A} + \frac{A\cos\varphi|\vec{v}_1|\cos\varphi}{1+A}\vec{i} + \frac{A|\vec{v}_1|\operatorname{sen}\varphi}{1+A}\vec{j}$$

o bien $\quad \vec{v}_1{}' = \left(\dfrac{v_1}{1+A} + \dfrac{A}{1+A}v_1\cos\varphi\right)\vec{i} + \dfrac{Av_1}{1+A}\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$

<u>N</u>: Para colisión frontal $\varphi = \Pi$ y $\vec{v}_1{}' = \dfrac{1-A}{1+A}v_1\vec{i}$.

Entonces

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{v_1'^2}{v_1^2} = \left(\frac{1}{1+A} + \frac{A}{1+A}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{A}{1+A}\operatorname{sen}\varphi\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(1+A)^2}\left[1 + A^2\cos^2\varphi + 2A\cos\varphi + A^2\operatorname{sen}^2\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+A)^2}\left(1 + A^2 + 2A\cos\varphi\right) = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\cos\varphi$$

donde $\alpha = \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2$ y donde se verifica que $\underbrace{\left\langle \frac{E_f}{E_i} \right\rangle}_{\text{VALOR MEDIO}} = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\underbrace{\langle\cos\varphi\rangle}_{0}$

Ej

Tras N colisiones del tipo general con φ variable entre 0 y 2π

$$\left\langle \frac{E_f}{E_i} \right\rangle_N = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^N \underset{A=2}{=} \cancel{25,86} \Rightarrow N = \frac{\log\langle E_f/E_i\rangle_N}{\log\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} = \underline{\underline{25,86}}$$