Algunos ejemplos de sistemas de masa variable: (ver vuelta página)

1-D)

fuerza por u. de masa

$$m\ddot{x} + \dot{x}\cdot\frac{dm}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dot{x}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{F}{m} = f$$

Simplificación: 1) $f = cte$ fuerza por u. de masa constante.

2) $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \alpha \underset{>0}{cte} \Rightarrow m(t) = m_0 e^{\alpha \cdot t}$

$\alpha > 0$ gano masa

$\alpha < 0$ pierdo masa.

Solución: $\boxed{\ddot{x} + \dot{x}\alpha = f} \Rightarrow x(t) = A + Be^{-\alpha t} + \frac{f}{\alpha}\cdot t$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -\alpha B + \frac{f}{\alpha} = v_0 \Rightarrow B = \left(\frac{f}{\alpha} - v_0\right)\frac{1}{\alpha} = -A \end{array}$$

luego

$$x(t) = \frac{1}{\alpha}\left(v_0 - \frac{f}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \frac{f}{\alpha}\cdot t$$

Nota: Si α es pequeño $e^{-\alpha t} \simeq 1 - \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha}\left(v_0 - \frac{f}{\alpha}\right)\left(\alpha t - \frac{1}{2}\alpha^2 t^2\right) + \frac{f}{\alpha}t \simeq$$

$$= \left(v_0 - \frac{f}{\alpha}\right)\left(t - \frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \frac{f}{\alpha}t \simeq v_0 t - \frac{1}{2}v_0\alpha t^2 \cancel{- \frac{f}{\alpha}t} + \frac{1}{2}ft^2 \cancel{+ \frac{f}{\alpha}t}$$

$$\simeq v_0 t + \frac{1}{2}ft^2 - \cancel{\frac{1}{2}v_0\alpha t^2}^{\,0} \simeq v_0 t + \frac{1}{2}ft^2$$

Conclusión: Es como si actuara una fuerza de fricción proporcional a la velocidad.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL	1.er APELLIDO 2.º APELLIDO NOMBRE ESPECIALIDAD ASIGNATURA CURSO GRUPO FECHA	N.º DE MATRICULA CALIFICACION

Simplificación: Es mucho mejor trabajar con la ley

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = F}$$

Si F es constante $\Rightarrow dp = F \cdot dt \Rightarrow \int_{p_0}^{p} dp = \int_0^t F\,dt = F \cdot t$

$$p(t) - p_0 = F \cdot t \Rightarrow m(t)\,v(t) = m_0 \cdot v_0 + F \cdot t \Rightarrow v(t) = \frac{m_0 v_0 + F \cdot t}{m(t)}$$

ha de determinarse

Supongamos que $\frac{dm}{dt} = \alpha \Rightarrow m(t) = m_0 + \alpha t$

$$\boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0 + F \cdot t}{m_0 + \alpha \cdot t}}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{m_0 v_0 + F \cdot t}{m_0 + \alpha \cdot t}\,dt$$

Nota: Si $f = \frac{F}{m}$ es cte $\Rightarrow \int_{p_0}^{p} dp = \int_0^t m \cdot f\,dt = f \cdot \int_0^t m\,dt.$

Suponemos $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \alpha$ (cte) $\Rightarrow m(t) = m_0 e^{\alpha t} \Rightarrow$

$$\int_0^t m(t)\,dt \Rightarrow m_0 \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_0^t = \frac{m_0}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right)$$

con lo que

$$v(t) = \frac{m_0 v_0 + f \frac{m_0}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right)}{m_0 e^{\alpha t}} =$$

$$= v_0 e^{-\alpha t} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

que coincide con el resultado anterior

Veamos una fórmula general.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} = F(t) \Rightarrow \\[2ex] \dfrac{dm}{dt} = f(m,t) \end{array}\right\} \rightarrow p(t) = p(0) + \int_0^t F(t)\,dt$$

$$\frac{dm}{dt} = f(m,t) \;\downarrow\; m(t)$$

$$m(t)\cdot v(t) = m(0)\cdot v(0) + \int_0^t F(t)\,dt$$

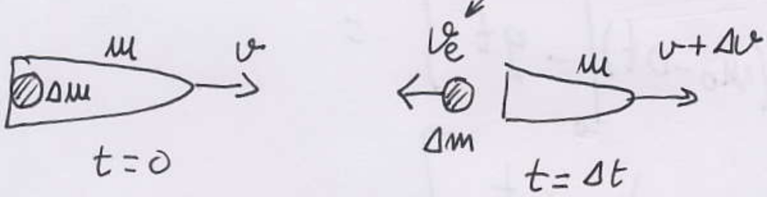
$$\boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0 + \int_0^t F\,dt}{m(t)}}$$

Dinámica de un cohete

En realidad es un sistema de 2 cuerpos: el cohete y los gases.

En un sistema inercial.

relativa al cohete, constante



$$\frac{dP}{dt} = F \Rightarrow \underset{\text{cohete + gases}}{P(t+\Delta t)} - \underset{\text{cohete}}{P(t)} = F\cdot\Delta t$$

$$\overbrace{m\cdot(v+dv) + \Delta m\,(v \overset{+\Delta V}{-} v_e)}^{P(t+\Delta t)} - \overbrace{(m+\Delta m)\cdot v}^{P(t)} = F\cdot\Delta t$$

$$\cancel{mv} + m\,dv + \cancel{\Delta m\, v} - \Delta m\, v_e - \cancel{mv} - \cancel{\Delta m\, v} = F\Delta t$$

$$+\cancel{\Delta m \Delta v}^{\,0}$$

$$m\,dv - \Delta m\, v_e = F\,dt$$

pero $\Delta m = -dm$ ya que la masa disminuye

$$\boxed{m\,dv + v_e\,dm = F\,dt}$$

Si F es la gravedad $F = -mg$

$\Rightarrow$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL	1.er APELLIDO 2.º APELLIDO NOMBRE ESPECIALIDAD ASIGNATURA CURSO GRUPO FECHA	N.º DE MATRICULA CALIFICACION

$$dv + v_e \frac{dm}{m} = -g\,dt$$

Supongamos $\frac{dm}{dt} = -D$

$$m(t) = m_0 - D.t$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} = -g$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{v_e D}{m_0 - Dt} = -g$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_e D}{m_0 - Dt} - g \Rightarrow dv = \left(\frac{v_e D}{m_0 - Dt} - g\right)dt$$

$$v(t) - v_0 = \left[-\frac{v_e \cancel{D}}{\cancel{D}} \ln(m_0 - Dt)\Big|_0^t - gt\right] =$$

$$= \left[v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - Dt}\right) - g.t\right]$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - Dt}\right) - gt}$$

podemos poner

$$t = \frac{m_0 - m(t)}{D} = \frac{m(t) - m_0}{\dot{m}}$$