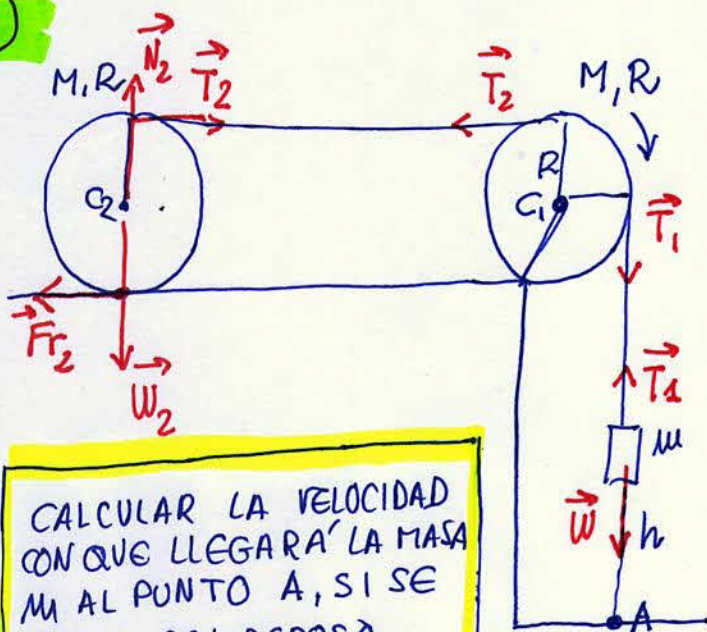


EJEMPLOS DEL PRINCIPIO DE BALANCE DE ENERGÍA PARA UN SISTEMA COMPUERTO DE PARTICULAS Y SOLIDOS RIGIDOS

1)



CALCULAR LA VELOCIDAD CON QUE LLEGARÁ LA MASA M AL PUNTO A, SI SE PARTE DEL REPOSO

a) NEWTON

$$ma = mg - T_1$$

$$I_{C_1} \alpha_1 = RT_1 - RT_2$$

$$Ma_{C_2} = T_2 - Fr_2$$

$$I_{C_2} \alpha_2 = RT_2 + RFr_2$$

$$a = 2a_{C_2}$$

$$a_{C_2} = \alpha_2 \cdot R$$

$$a = \alpha_1 \cdot R$$

Lo que da lugar a las 4 ecuaciones siguientes

$$\left. \begin{aligned} ma + T_1 &= mg \\ I_{C_1} \frac{a}{R^2} - T_1 + T_2 &= 0 \\ M \frac{a}{2} - T_2 + Fr_2 &= 0 \\ I_{C_2} \frac{a}{2R^2} - T_2 - Fr_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}M & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}M & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4}M & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ T_1 \\ T_2 \\ Fr_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} mg & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}M & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}M & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4}M & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2mg}{2m + \frac{7}{4}M}$$

$$\Rightarrow \frac{2mg}{2m + \frac{7}{4}M}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2mg}{2m + \frac{7}{4}M} \cdot 2h}$$

$$= \sqrt{\frac{4mgh}{2m + \frac{7}{4}M}}$$

b) MÉTODO DEL BALANCE DE ENERGÍA

Cómo no hay disipación, $E_{\text{INICIAL}} = E_{\text{FINAL}}$

$$E_{\text{INICIAL}} = mgh$$

$$E_{\text{FINAL}} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} M v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_{C_2} \omega_2^2$$

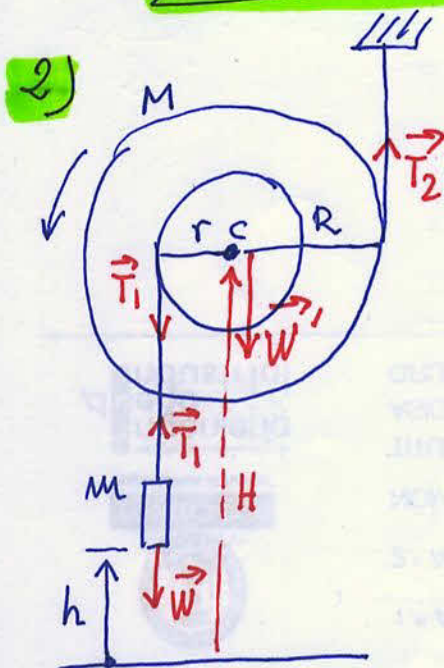
$$\text{pero: } \left. \begin{array}{l} v_A = 2 v_{C_2} \\ v_{C_2} = \omega_2 \cdot R \\ v_A = \omega_1 \cdot R \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_{C_2} = \frac{v_A}{2} \\ \omega_2 = \frac{v_A}{2R} \\ \omega_1 = \frac{v_A}{R} \end{array}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \cdot \frac{v_A^2}{R^2} + \frac{1}{2} M \cdot \frac{v_A^2}{4} + \frac{1}{2} I_{C_2} \cdot \frac{v_A^2}{4R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{4} M v_A^2 + \frac{1}{8} M v_A^2 + \frac{1}{16} M v_A^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{7}{16} M v_A^2$$

de donde

$$v_A = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}m + \frac{7}{16}M}} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + \frac{7}{4}M}}$$



calcular la velocidad con que llega la masa m al suelo u el instante parte del reposo. Hacerlo por Newton y por energías.

a) Newton

$$\begin{cases} m \cdot a = mg - T_1 \\ M a_c = T_1 + Mg - T_2 \\ I_c a_\alpha = T_1 r + R T_2 \end{cases}$$

RELACIONES CINEMATICAS:

$$a = a_c + a_\alpha \cdot r = a_\alpha (R+r)$$

$$a_c = a_\alpha \cdot R$$

$$\begin{cases} m \cdot a = mg - T_1 \\ M \cdot \frac{R}{R+r} \cdot a = T_1 - T_2 + Mg \\ I_c \cdot \frac{a}{R+r} = T_1 r + R T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ \frac{MR}{R+r} & -1 & 1 \\ \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R+r} & -r & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} mg & 1 & 0 \\ Mg & -1 & 1 \\ 0 & -r & -R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ \frac{MR}{R+r} & -1 & 1 \\ \frac{MR^2}{2(R+r)} & -r & -R \end{vmatrix}} = \frac{mgR + mgr + MgR}{mR + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{R+r} + mr + \frac{MR^2}{R+r}} = \frac{mg(R+r) + MgR}{m(R+r) + \frac{3}{2} \frac{MR^2}{R+r}}$$

$$y \quad v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2mgh(R+r) + 2MgRh}{m(R+r) + \frac{3}{2} \frac{MR^2}{R+r}}}$$

b) Balance de energía

Cmo no hay pérdidas $E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$$E_{INICIAL} = mgh + MgH$$

$$E_{FINAL} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + Mgh'$$

donde h' es la altura del centro G' del disco cuando la masa m ha caído la altura h .

RELACIONES CINEMATICAS

de $a = a_\alpha(R+r) \Rightarrow h = \theta \cdot (R+r) \rightarrow$ caída de m

$$a_c = a_\alpha \cdot R \Rightarrow h' = \theta \cdot R \rightarrow$$

caída de M

$$\text{por tanto } h' = h - h' = h - \frac{hR}{R+r}$$

$$mgh + MgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + Mg\left(H - \frac{R}{R+r}h\right)$$

$$\text{También de } a = a_\alpha(R+r) \Rightarrow v = \omega(R+r)$$

$$a_c = a_\alpha \cdot R \Rightarrow v_c = \omega \cdot R$$

$$mgh + Mg\frac{R}{R+r}h = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\frac{R^2v^2}{(R+r)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right) \cdot \frac{v^2}{(R+r)^2}$$

y finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{mgh + Mg\frac{R}{R+r}h}{\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}\frac{MR^2}{(R+r)^2}}} = \sqrt{\frac{2mgh(R+r) + 2MgRh}{m(R+r) + \frac{3}{2}\frac{MR^2}{(R+r)}}}$$