

CAMPO GRAVITATO

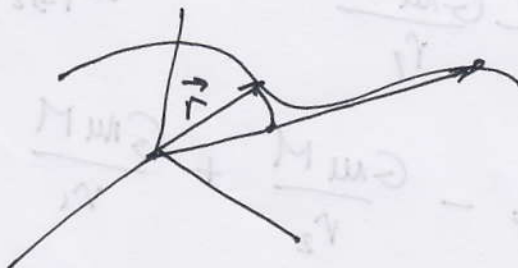
$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{u}_r$$

1) ES CONSERVATIVO.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad * \text{Demostrar}$$

2) POTENCIAL.

$$U(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$U(\vec{r}) = \int_r^\infty -\frac{GmM}{r^2} dr = \left[\frac{GmM}{r} \right]_r^\infty = -\frac{GmM}{r}$$

Ej: comprobar que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

~~Potencial~~ Potencial efectivo: $U_{ef} = U + \frac{L_0^2}{2mr^2}$ (mov. radial)

3) ENERGIA MECANICA

a) PROPIEDAD: "EN ORBITAS CIRCULARES" $\rightarrow$ MOV. NO RADIAL



$$\left. \begin{aligned} m \cdot a_N &= +\frac{GmM}{r^2} \\ a_N &= \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v^2 &= \frac{GM}{r} \\ \text{o bien } \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} \frac{GmM}{r} \end{aligned}$$

LA ENERGIA CINETICA = $\frac{1}{2}$ | POTENCIAL |

b) ENERGIA MECANICA EN MOV. CIRCULAR

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2} \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GmM}{r}$$

"EN UNA ORBITA CIRCULAR $E = -\frac{1}{2} \frac{GmM}{r}$ "

2) ENERGIA A APORTAR / QUITAR PARA CAMBIAR DE ORBITA
FUERZAS EXTERNAS

$$E_1 = -\frac{GmM}{r_1}$$

$$E_2 = -\frac{GmM}{r_2}$$

$$E_1 + W_{1 \rightarrow 2} = E_2$$

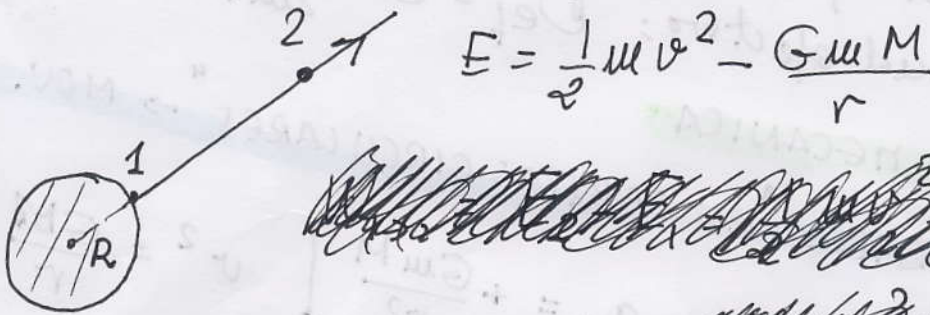
$$W_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\frac{GmM}{r_2} + \frac{GmM}{r_1} = GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$W_{1 \rightarrow 2} > 0 \Rightarrow r_2 > r_1$$

$$W_{1 \rightarrow 2} < 0 \Rightarrow r_2 < r_1$$

c) ENERGIA MECANICA EN MOVIMIENTO RADIAL



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

LA ENERGIA SE CONSERVA SI NO ACTUAN FUERZAS EXTERNAS. ENTONCES

$$E_1 = E_2 \text{ SI NO SI LO HACEN}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1$$

Ejercicio:

Fecha

Plan

Grupo

Curso

Asignatura

Nombre

Apellidos

Nº de Matrícula

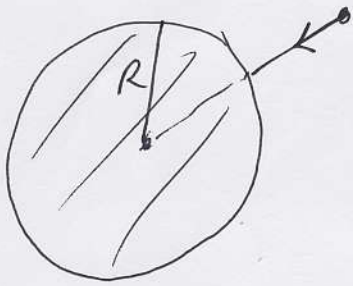
Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial
Ingeniería y Diseño Industrial
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

D)

ACELERACION GRAVITATORIA

$$g(h) = \frac{F}{m} = \frac{GMm}{m \cdot (R+h)^2} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$



$$g_0 = g(h=0) = \frac{GM}{R^2} \cong 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$g(h) = \frac{GM}{R^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \right] \approx \frac{GM}{R^2} \cdot \left[1 - 2 \frac{h}{R} \right] =$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} \underset{x \ll 1}{\approx} 1 - 2x + 3x^2 - \dots$$

$$\approx \frac{GM}{R^2} - \frac{2GMh}{R^3} = g_0 - \frac{2GMh}{R^3}$$

$$\left[\Delta g = \frac{g_0 - g(h)}{g_0} = \frac{2GMh/R^3}{GM/R^2} = \frac{2h}{R} \right] \%$$

Calculo: $\Delta g \cong 0,01$ (1%)

$$h = \frac{\Delta g \cdot R}{2} \approx \frac{6830 \cdot 0,01}{2} \text{ km} \approx \underline{\underline{34 \text{ km}}}$$

APLICACIONES

1) PUESTA EN ORBITA

Partimos de un satélite en tierra $E_1 = -\frac{GMm}{R}$ y
dreams pasado en una órbita circular a la altura h
del suelo $E_2 = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R+h}$, por tanto necesitamos
hacer un trabajo

$$W_{12} = E_2 - E_1 = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R+h} - \left(-\frac{GMm}{R} \right) =$$


$$E_2 = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)} \right)$$

Para lo hace un cohete propulsor, y se lleva a cabo
en un tiempo de Δt , la potencia del motor del
cohete deberá ser

$$P = \frac{W_{12}}{\Delta t} = \frac{GMm}{\Delta t} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)} \right)$$

y la velocidad angular ^{cte} del satélite será

$$\omega^2 = \frac{GM}{(R+h)^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$$

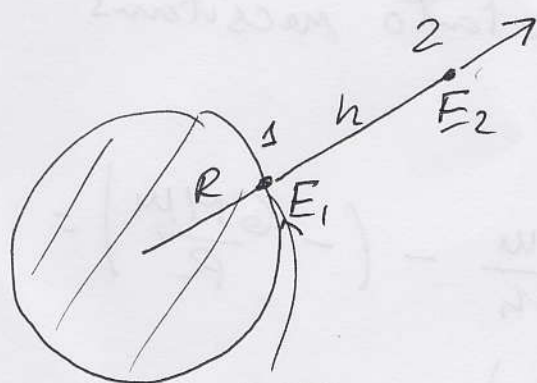
2) ESCAPE DE LA ATRACCION TERRESTRE

En la superficie terrestre, hay que darle al
objeto una energía total $E=0$ para que pueda
escapar completamente.

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

v_1 = velocidad de escape desde la superficie terrestre

Lo que hayo es propulsar el objeto en sentido radial hasta una altura h donde se alcanza la energía necesaria para el escape, entonces



PARTO
DEL REPOSO
 $E_1 = -\frac{GMm}{R}$

Si $E_2 = 0 \rightarrow$ escape

$$W_{12} = E_2 - E_1 = 0 - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{GMm}{R}$$

Si el cohete impulsa toda Δt en hacerlo entonces debe tener una potencia

$$P = \frac{GMm}{\Delta t R}$$

La fuerza impulsora media en el trayecto es

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \frac{GMm}{R} \Rightarrow F \cdot h = \frac{GMm}{R} \Rightarrow$$

$$F = \frac{GMm}{h \cdot R}$$

y la velocidad del objeto en (2) es

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{R+h} = 0 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

velocidad de escape a la altura h