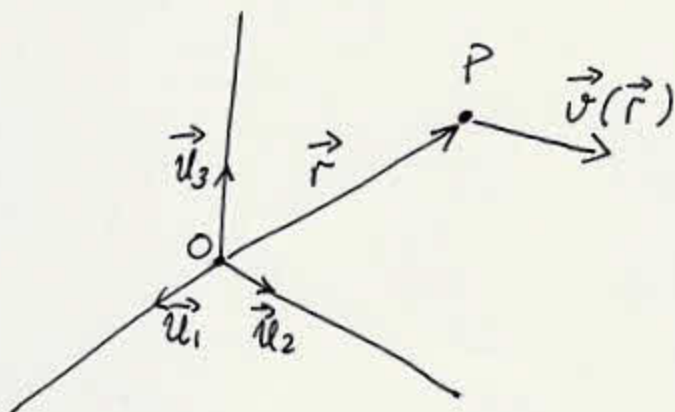


VECTORES, COORDENADAS Y FUNCIONES

(1)



$\vec{r} \equiv$ VECTOR DE POSICION

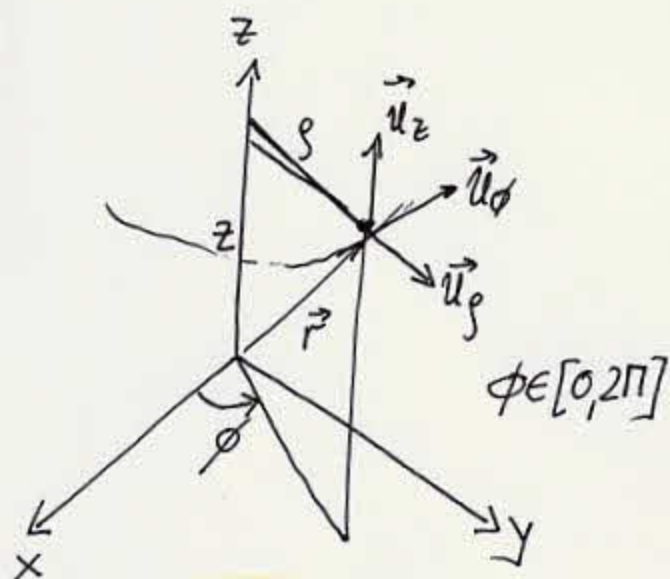
$P \equiv$ PUNTO DEL ESPACIO

$T(\vec{r}) \equiv$ FUNCION ESCALAR

$\vec{V}(\vec{r}) \equiv$ FUNCION VECTORIAL

SISTEMAS DE COORDENADAS

- CARTESIANAS
- CILINDRICAS
- ESFERICAS

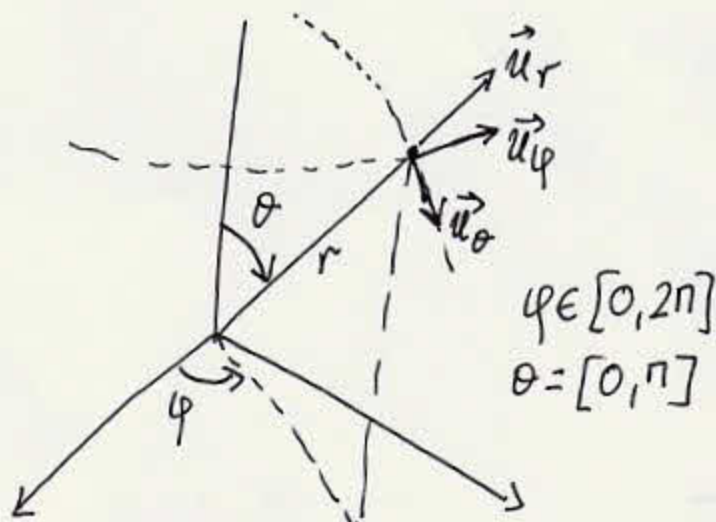


CILINDRICAS

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$



ESFERICAS

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

1 - CAMPO ESCALAR

$T(\vec{r}, t) \rightarrow$ CAMPO ESCALAR VARIABLE CON t

$T(\vec{r}) \rightarrow$ CAMPO ESCALAR ESTACIONARIO

VIENE GRAFICAMENTE REPRESENTADO POR LAS SUP. EQUIESCALARES

$$T_i = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{r}) = T_i \} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ISOTERMAS} \\ \text{SUP. EQUIPOT.} \\ \text{---} \end{array} \right)$$

ε_j : TEMPERATURA, DENS. DE MASA,

a) GRADIENTE: $\vec{\nabla} T(\vec{r})$

CARTES. $\vec{\nabla} T(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$

CILIND. $\vec{\nabla} T(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$

ESFER. $\vec{\nabla} T(\vec{r}) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$

$$\vec{\nabla} T \left\{ \begin{array}{l} \text{MODULO: } |\vec{\nabla} T| = \frac{dT}{|d\vec{r}|} \quad \begin{array}{l} \text{VARIACION DE } T \\ \text{POR U. DEL. EN LA} \\ \text{DIRECCION DE MAXIMA} \\ \text{VARIACION} \end{array} \\ \text{DIRECCION: } \vec{\nabla} T \perp \text{ SUP. EQUIESCALARES} \\ \text{SENTIDO: CRECIMIENTO DEL ESCALAR } T \end{array} \right.$$

$$\boxed{dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{r}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{DERIVADA DIRECCIONAL} \\ \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \frac{dT}{ds} \end{array} \right)$$

EJERCICIO: DADO $T = 2xy^2 + y \cdot z$, y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, CALCULAR $\frac{dT}{ds}$ CON s , PARAMETRO A LO LARGO DE $\vec{v}$

b) INTEGRALES DE CAMPOS ESCALARES (O DE FUNCIONES ESCAL.) (3)

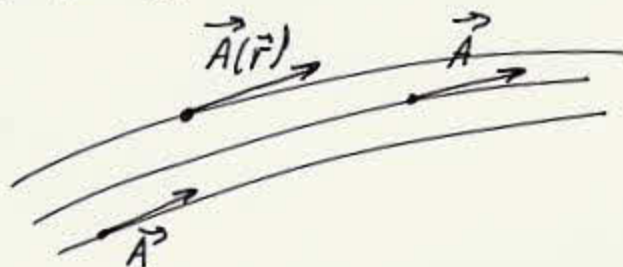
$$\int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV \quad | \quad \rho(\vec{r}) \text{ ES UNA DENSIDAD} \begin{cases} \text{MASA} \\ \text{CARGA} \\ \text{ENERGIA} \end{cases}$$

2) CAMPOS VECTORIALES

$\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv$ FUNCION VECTORIAL DE PUNTO Y VARIABLE CON t

$\vec{A}(\vec{r}) \equiv$ F.V.P. ESTACIONARIA

TIENE GRAFICAMENTE REPRESENTADO POR LINEAS DE CORRIENTE



Ej: CORRIENTE DE MASA DE UN FLUIDO

DENSIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA

DENSIDAD DE CORRIENTE DE CALOR

$$\begin{aligned} \rho \cdot \vec{v} & \quad [kg/s \cdot m^2] \\ \vec{J} & \quad [A/m^2] \\ \vec{q} & \quad [W/m^2] \end{aligned}$$

a) CALCULO DIFERENCIAL

i) DIVERGENCIA $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (ES UN ESCALAR)

ii) ROTACIONAL $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ (ES UN VECTOR)

Coordenadas	Expresión de la divergencia
Cartesianas	$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
Esféricas	$div \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
Cilíndricas	$div \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Coordenadas	Expresión del rotacional
Cartesianas	$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$
Esféricas	$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta r & \vec{u}_\phi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\phi \end{vmatrix}$
Cilíndricas	$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\phi \rho & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$

IDENTIDADES DEL CÁLCULO VECTORIAL

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\psi V) = \psi \vec{\nabla} V + V \vec{\nabla} \psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) = \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) = \psi \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

ϕ ESCALAR $\phi(u_1, u_2, u_3)$

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$$

COORDENADAS CURVILINEAS

$$a) \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \vec{e}_3$$

$$b) \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$c) \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$d) \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

SISTEMAS COORDENADOS MAS COMUNES

1) CARTESIANAS:

2) CILINDRICAS

3) ESFERICAS

$$\begin{array}{lll} u_1 = x, & u_2 = y, & u_3 = z & h_1 = h_2 = h_3 = 1 \\ u_1 = \rho & u_2 = \theta, & u_3 = z & h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1 \\ u_1 = r & u_2 = \theta, & u_3 = \varphi & h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta \end{array}$$

Σ : CILINDRICAS

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right] =$$

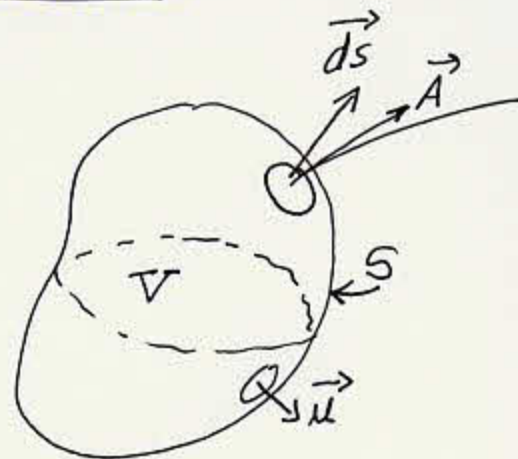
$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]$$

b) CALCULO INTEGRAL PARA CAMPOS VECTORIALESi) FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

$$\phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{o} \quad \phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$\downarrow$ ABIERTA $\downarrow$ CERRADA

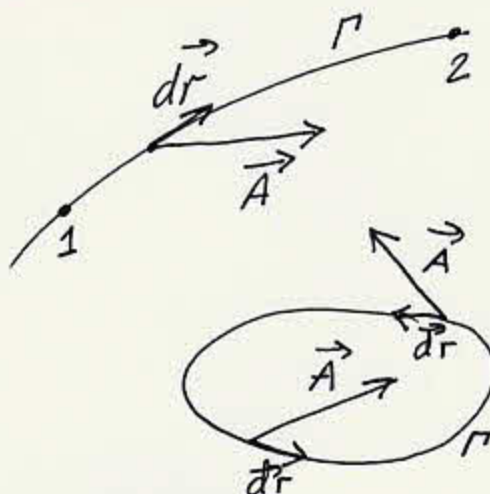


Ej: $\vec{A} = \rho \cdot \vec{v}$ " $\int_V \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = G_m$ (CAUDAL MASICO)

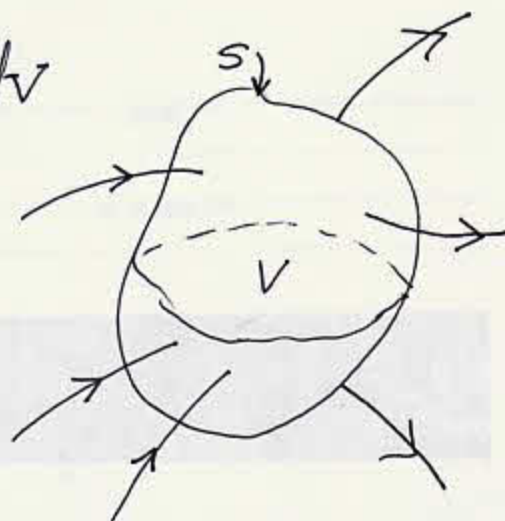
ii) CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

$$C = \int_{\Gamma_{1,2}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$C\phi = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

c) TEOREMAS INTEGRALES MUY USADOS1) TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (TEOREMA DE GAUSS)

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \cdot dv$$



ii) TEOREMA DEL ROTACIONAL (TEOREMA DE STOKES)

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

iii) IDENTIDAD DE GREEN.

SEAN ϕ y ψ FUNCIONES ESCALARES DE CLASE C^2 EN V
LIMITADO POR S y $\vec{n}$ NORMAL EXTERIOR

$$\int_V [\phi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \phi] dV = \int_S [\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi] d\vec{S}$$

APLICACIONES

- CONVERTIR EC. DIF. PARC. $\rightarrow$ ECUACION INTEGRAL
- FUNDAMENTO DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

FUNDAMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO) (7)

$$F\left(\frac{d^2T}{dx^2}, \frac{dT}{dx}, T(x), x\right) = 0 \quad \text{en } x \in (a, b)$$

HAY QUE AÑADIR LAS CONDICIONES IMPUESTAS EN LA FRONTERA DEL DOMINIO, ESTAS "CONDICIONES DE CONTORNO" SON DE VARIOS TIPOS:

a) TIPO DIRICHLET : $T(a) = T_a$, $T(b) = T_b$

b) TIPO NEUMAN : $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=a} = \phi_a$, $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=b} = \phi_b$

c) COMBINADA (DE ROBIN)

$$\alpha \left.\frac{dT}{dx}\right|_a + \beta T(a) = R_a$$

$$r \left.\frac{dT}{dx}\right|_b + \delta T(b) = R_b$$

d) OTRAS...

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_a = f(T(a))$$

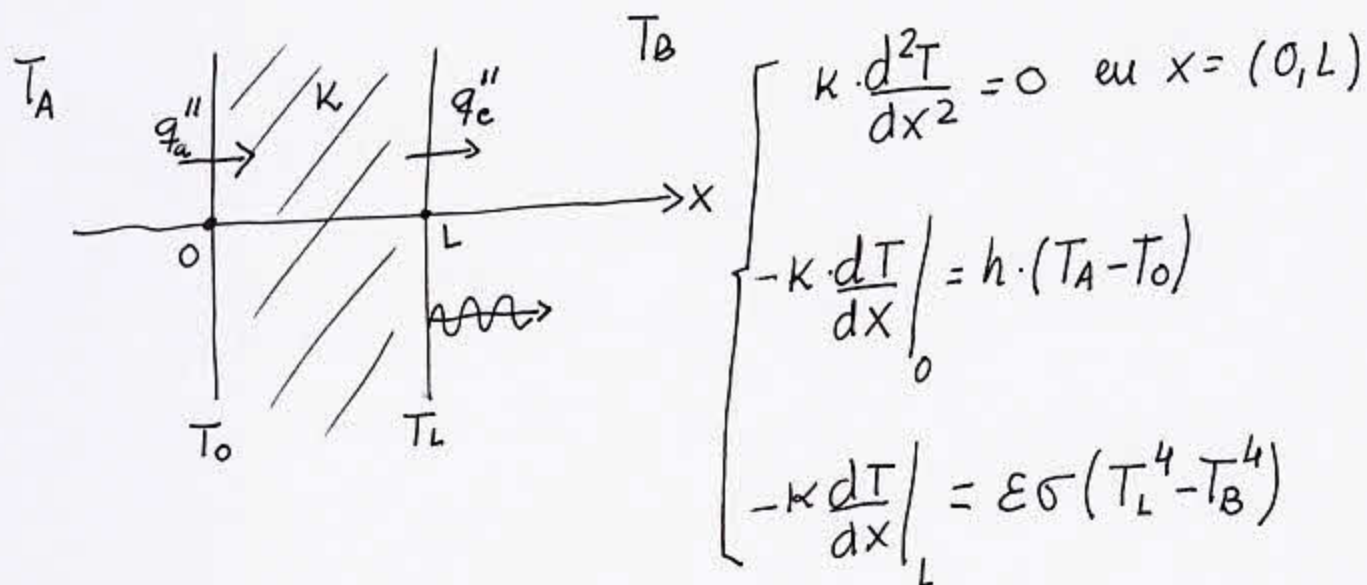
$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_b = g(T(b))$$

Ej 1 - Ec. de conducción ^{ESTAC.} del calor en medios no homogéneos 1-D con fuentes internas y cc. variadas (DIRICHLET + CONVECCION) ^{es}

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \cdot \frac{dT}{dx}\right) + f(x) = 0 & \text{en } x \in (a, b) \\ T(a) = T_a \quad \text{y} \quad \kappa \left.\frac{dT}{dx}\right|_b = -h(T(b) - T_\infty) \end{cases}$$

(8)

Ej 2. Conducción ^{ESTAC.} 1-D con medio homogéneo y cc.
de convección (absorción) y radiación (emisiva)



SOLUCIÓN: SALVO CASOS CONCRETOS ES POSIBLE ENCONTRAR
UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA COMPLETA QUE CUMPLA LAS C.C.. DICHA
SOLUCIÓN ES UNICA

APARECEN EN PROBLEMAS CON FUNCIONES DE MAS DE 1 VARIABLES
AQUÍ SE TRATAN DOS TIPOS DE SITUACIONES:

1) PROBLEMAS 2-D EN VARIABLES ESPACIALES: $T(x, y)$

$$EJ: \nabla^2 T(x, y) = 0 \text{ en } V \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } T(x, y)|_S = g(x, y)$$

2) PROBLEMAS CON UNA VARIABLE ESPACIAL Y OTRA TEMPORAL

$$EJ: T(x, t) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} & x \in (a, b) \\ & t \in (0, \infty) \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{ESTADO INICIAL.} \\ T(a) = T_a, T(b) = T_b & \text{COND. CONT.} \end{cases}$$

AHORA LAS SOLUCIONES ANALITICAS SON LA EXCEPCIÓN,
VEREMOS ALGUNOS METODOS PARTICULARES

- METODO DE SEPARACION DE VARIABLES
- METODO DE LAS AUTOFUNCIONES DEL OP. DIF.
- TRANSFORMADAS INTEGRALES: (FOURIER, LAPLACE..)

... PERO CUANDO TODO FALLA, SIEMPRE NOS QUEDAN LOS

MÉTODOS NUMÉRICOS

1- SISTEMA TERMODINAMICO

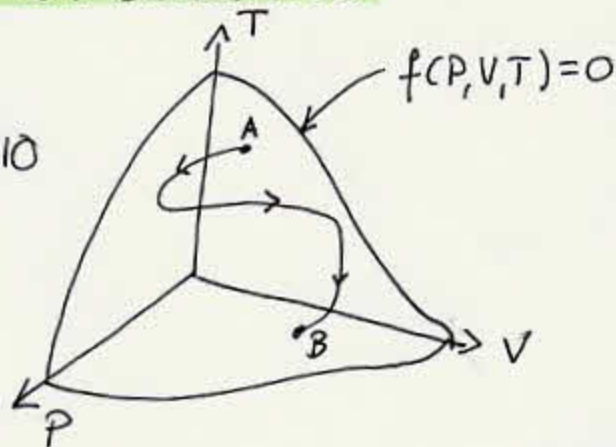
VARIABLES MACROSCOPICAS : $P, V, T,$

2- ECUACIÓN DE ESTADO (DE EQUILIBRIO)

$$f(P, V, T) = 0 \quad \text{Ej: GAS IDEAL } P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

3- TRANSFORMACIÓN O PROCESO TERMODINAMICO

- TRAYECTORIA SOBRE $f(P, V, T) = 0$
- SUCECIÓN DE ESTADOS DE EQUILIBRIO
- PROCESO REVERSIBLE



4- TRABAJO

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B P \cdot dV$$

A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA P , DADA

HAY QUE ESPECIFICAR A y B

HAY QUE SABER $P = P(V)$

- NO ES UNA FUNCIÓN DE ESTADO
- DEPENDE DE LA TRAYECTORIA Γ_{AB}

5- CALOR

$$Q_{A \rightarrow B} = \int_A^B m \cdot c_e \cdot dT$$

HAY QUE CONOCER Γ

HAY QUE ESPECIFICAR A y B

HAY QUE CONOCER $c_e = c_e(T)$

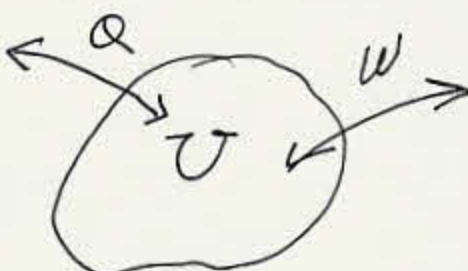
ENERGIA QUE SE TOMA O CEDE COMO CONSECUENCIA DE UNA DIFERENCIA DE TEMPERATURAS.

6- BALANCE DE ENERGÍA: PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMOD.

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = Q_{A \rightarrow B} - W_{A \rightarrow B}$$

$\uparrow$
 FUNCIÓN DE ESTADO

$\rightarrow$ MECANICO
 $\rightarrow$ ELECTRICO
 $\rightarrow$



- EL PRIMER PRINCIPIO EN POTENCIAS: $\dot{\Delta U}_{A \rightarrow B} = \dot{Q}_{A \rightarrow B} - \dot{W}_{A \rightarrow B}$

7- MECANISMOS POR LOS QUE SE ABSORBE O CEDE CALOR

- CONDUCCIÓN (MEDIO MATERIAL ESTÁTICO < HOMOG. NO HOMOG.)
- CONVECCIÓN (FLUIDO EN MOVIMIENTO)
- RADIACIÓN (NO ES NECESARIO UN SOPORTE MATERIAL)

Conduction	Convection	Radiation
Heat transfer across medium.	Heat transfer between moving fluid and surface.	Heat transfer in form of electromagnetic waves emitted by surfaces at a finite temperature.
LEY DE FOURIER $\phi = -kA \frac{dT}{dx}$	LEY DE NEWTON $\phi = hA(T_s - T_\infty)$	LEY DE STEFAN-BOLTZMANN $\phi = \epsilon A \sigma (T_s^4 - T_\infty^4)$

Conduction through a solid or a stationary fluid	Convection from a surface to a moving fluid	Net radiation heat exchange between two surfaces
