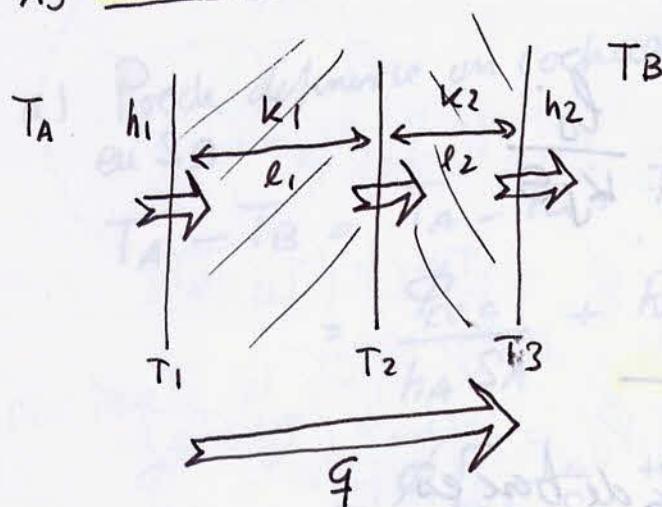


1) CONDUCCION + CONVECCION (EN ESTADO ESTACIONARIO)

A) PAREDES PLANAS (FLUJO 1-D)



$$q_{cv1} = h_1 S (T_A - T_1)$$

$$q_{c1} = k_1 S \frac{(T_1 - T_2)}{l_1}$$

$$q_{c2} = k_2 S \frac{(T_2 - T_3)}{l_2}$$

$$q_{cv2} = h_2 S (T_3 - T_B)$$

Como en el estado estacionario $q_{cv1} = q_{c1} = q_{c2} = q_{cv2} = q$

$$h_1 (T_A - T_1) = \frac{k_1}{l_1} (T_1 - T_2)$$

$$\frac{k_1}{l_1} (T_1 - T_2) = \frac{k_2}{l_2} (T_2 - T_3)$$

$$\frac{k_2}{l_2} (T_2 - T_3) = h_2 (T_3 - T_B)$$

Sistema de 3 ecs
con 3 incógnitas que
nos permite calcular
 T_1, T_2, T_3 a partir
de T_A, T_B y las
variables térmicas k_1, k_2
 h_1, h_2, l_1 y l_2

II) Puede definirse un ~~coeficiente~~ coeficiente global de T.C.: U

$$T_A - T_B = T_A - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_B$$

$$= \frac{q_{cv1}}{h_1 S} + \frac{q_{c1}}{k_1 S / l_1} + \frac{q_{c2}}{k_2 S / l_2} + \frac{q_{cv2}}{h_2 S} =$$

$$= q \cdot \left(\frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{k_1 S / l_1} + \frac{1}{k_2 S / l_2} + \frac{1}{h_2 S} \right) =$$

$$= \frac{q}{S U} \quad \text{con} \quad \frac{1}{U} = \sum_{j=1}^N \frac{l_j}{k_j} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

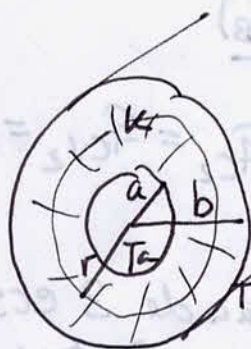
de manera que $q = U \cdot S (T_A - T_B)$

III) En el modelo de resistencias térmicas

$$T_A - T_B = q \cdot R_T$$

$$R_T = \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S} + \sum_{j=1}^N \frac{l_j}{k_j S}$$

B) PAREDES CILÍNDRICAS



q = la fórmula de base es

$$T(r) = T_a + \frac{\ln r/a}{\ln b/a} (T_b - T_a)$$

la corriente de energía es

$$q(r) = -k \frac{dT}{dr} = -\frac{k}{r} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a}$$

y el flujo es $\Phi_{ab} = \int_S q(r) \cdot dS = \int -\frac{k}{r} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} 2\pi r \cdot L$

$$= 2\pi k L \frac{T_a - T_b}{\ln b/a} = \frac{T_a - T_b}{\frac{\ln b/a}{2\pi k L}} R_{ab}$$

por tanto $\phi_a = \phi_{ab} = \phi_b$ en notación internacional.

$$h_A S_A (T_A - T_a) = \frac{T_a - T_b}{R_{ab}} = h_B S_B (T_b - T_B)$$

de donde podemos encontrar

1) los valores de las temperaturas T_a y T_b a partir de T_A y T_B temperaturas de los fluidos de los lados interior y exterior. Solo hay que resolver

$$\left. \begin{aligned} h_A S_A (T_A - T_a) &= \frac{T_a - T_b}{R_{ab}} \\ \frac{T_a - T_b}{R_{ab}} &= h_B S_B (T_b - T_B) \end{aligned} \right\} \text{2 ecs con 2 incógnitas}$$

II) Puede definirse un coeficiente global basado en S_A o en S_B

$$\begin{aligned} T_A - T_B &= T_A - T_a + T_a - T_b + T_b - T_B = \\ &= \frac{\phi_{cva}}{h_A S_A} + R_{ab} \phi_{cab} + \frac{\phi_{cvb}}{h_B S_B} = \end{aligned}$$

$$= \phi \left[\frac{1}{h_A S_A} + R_{ab} + \frac{1}{h_B S_B} \right]$$

$$R_T = \frac{1}{h_A S_A} + \frac{1}{h_B S_B} + \frac{\ln(b/a)}{2\pi k L}$$

$$\phi = U_A S_A (T_A - T_B) \text{ con } U_A^{-1} = \frac{1}{h_A} + S_A R_{ab} + \frac{S_A}{h_B S_B}$$

$$\phi = U_B S_B (T_A - T_B) \text{ con } U_B^{-1} = \frac{S_B}{h_A S_A} + S_B R_{ab} + \frac{1}{h_B}$$

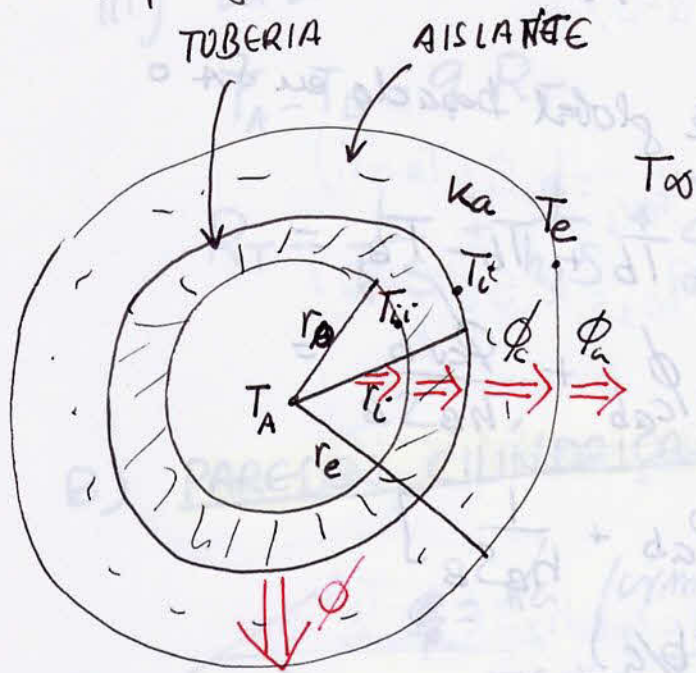
III) Las resistencias térmicas asociadas se suman

$$R_T = R_{cva} + R_{cvb} + R_{cab} = \frac{1}{h_A S_A} + \frac{1}{h_B S_B} + \frac{\ln b/a}{2\pi k L}$$

Veamos ahora un efecto interesante que se presenta en las geometrías cilíndricas que es la aparición de un efecto debido a la adición de aislante.

(*) ESPEJOR CRÍTICO DE AISLANTE (APLICACION) - 2

Supongamos una tubería aislada



$$\phi_{cvA} = h_a S_A (T_A - T_{ii})$$

$$\phi_{CT} = \frac{2\pi k_a L}{\ln r_e/r_i} (T_{ii} - T_e)$$

$$\phi_{CA} = \frac{2\pi k_a L}{\ln r_e/r_i} (T_e - T_{\infty})$$

$$\phi_{cvB} = h_e S_B (T_e - T_{\infty})$$

Se observa que T_{ii} depende de los espesores, por tanto hay que suponer para el cálculo que vamos a hacer que T_{ii} es constante independientemente del espesor del aislante. *constante en 1º aprox.*

$$\phi = \frac{T_{ii} - T_{\infty}}{\frac{1}{h_e S_B} + \frac{\ln r_e/r_i}{2\pi k_a L}} = \frac{T_{ii} - T_{\infty}}{\left[\frac{1}{h_e 2\pi r_e L} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi k_a L} \right]}$$

$$\frac{d\phi}{dr_e} = \frac{-(T_{ii} - T_{\infty}) \cdot \left[\frac{1}{2\pi k_a L} \cdot \frac{1}{r_e} - \frac{1}{h_e 2\pi L r_e^2} \right]}{\left[\frac{1}{h_e 2\pi r_e L} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi k_a L} \right]^2} = 0$$

$$\frac{1}{r_e k_a} - \frac{1}{h_e r_e^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k_a} = \frac{1}{h_e r_e} \Rightarrow \boxed{r_{ec} = \frac{k_a}{h_e}}$$

Este es el llamado RADIO CRÍTICO que corresponde a un MAXIMO en el flujo calorífico.

$r_e > r_{ec} \Rightarrow$ disminuye ϕ
 $r_e < r_{ec} \Rightarrow$ aumenta ϕ

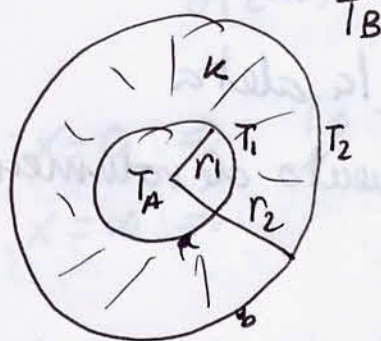
todo esto tiene sentido si $r_{ec} > r_i$

c) PAREDES ESFERICAS

La formula de base es

$$\phi_c = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

$$R = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



i) por tanto el flujo total y el correspondiente a cada parte es

$$\left. \begin{aligned} \phi_{cvA} &= h_1 S_1 (T_A - T_1) \\ \phi_c &= \frac{T_1 - T_2}{R} \\ \phi_{cvB} &= h_2 S_2 (T_2 - T_B) \end{aligned} \right\} \phi_{cvA} = \phi_c = \phi_{cvB}$$

de donde obtenemos las temperaturas interiores T_1 y T_2 en funcion de h_1, h_2, k, T_A y T_B y r_1 y r_2

ii) La compenación de resistencias en serie es

$$R_T = \frac{1}{h_1 S_1} + \frac{1}{h_2 S_2} + \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

iii) Igual que en la geometria cilindrica se pueden considerar coeficientes globales de T.C con respecto a la S_1 o con respecto a S_2

$$\phi = U_1 S_1 (T_A - T_B) = U_2 S_2 (T_A - T_B)$$

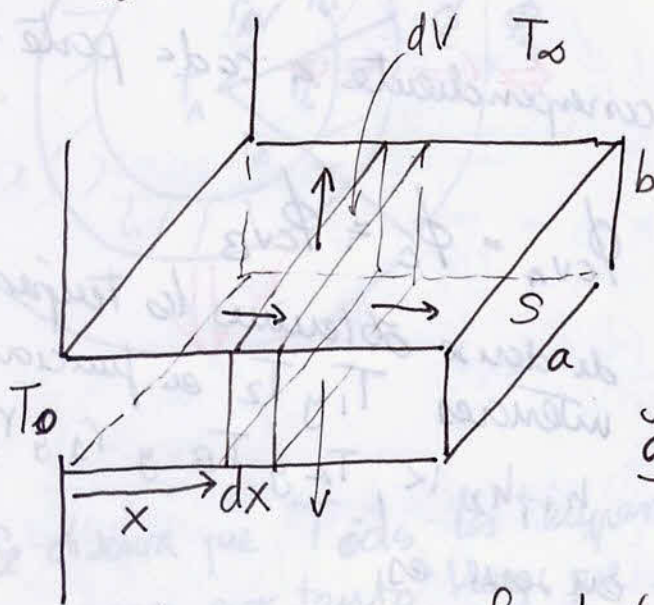
entonces

$$\boxed{\phi = \frac{T_A - T_B}{R_T}}$$

* ALETAS (APLICACION 2)

Aunque el problema es 3-D, podemos efectuar un cálculo aproximado suponiendo

- i) flujo 1-D a lo largo de la dirección de la aleta
- ii) Balance local de TC. en cada elemento de volumen de la aleta.



$$j(x) = -k \frac{dT}{dx}$$

$$\int_{S_I} j(x) dS + h S_0 \cdot (T(x) - T_\infty) = 0$$

pero $\int_{S_I} j(x) dS = \int_V \frac{d}{dx} (j(x)) dv \approx -k \frac{d^2 T}{dx^2} \cdot a \cdot b \cdot dx$

y $S_0 = 2(a+b) \cdot dx = P \cdot dx$ siendo P el perímetro por tanto se tiene que.

$$-k \frac{d^2 T}{dx^2} a \cdot b \cdot dx + h P (T(x) - T_\infty) \cdot dx = 0$$

Si hacemos el cambio de variable $T(x) - T_\infty = \theta(x)$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \left(\frac{h P}{k \cdot S} \right) \theta = 0 \Rightarrow \theta(x) = A e^{mx} + B e^{-mx}$$

$\theta(0) = T_0 - T_\infty$ y falta una 2ª C.C. que da lugar a varias posibilidades

CASO 1: Aleta de longitud L muy grande ($L \rightarrow \infty$) $\Rightarrow T(x) = T_\infty$
 $x \rightarrow \infty$

C.C: $\theta(0) = T_0 - T_\infty$
 $\theta(L \rightarrow \infty) = T_\infty - T_\infty = 0$

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow T_0 - T_\infty = A + B \\ x=\infty &\Rightarrow 0 = A e^{\infty} + 0 \Rightarrow A = 0 \\ &\quad B = T_0 - T_\infty \end{aligned}$$

La solución es $\theta(x) = \theta(0) e^{-mx}$ o bien

$$\boxed{T(x) = T_0 + (T_0 - T_\infty) e^{-mx}}$$

El flujo de calor a lo largo de la aleta es

$$\phi(x) = -k \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} = -k S \cdot \theta_0 (-m) e^{-mx} = mk S \theta_0 e^{-mx}$$

CASO 2: EFFECTIVIDAD DE UNA ALETA

Es el cociente entre el flujo transmitido por la base S con aleta / sin aleta.

$$\varepsilon = \frac{\phi_{\text{ALETA}}}{h \cdot S \cdot \theta_0} = \frac{\phi(0)}{h S \theta_0} = \frac{mk S \theta_0}{h S \theta_0}$$

$$= \sqrt{\frac{h P}{k S}} \cdot \frac{k}{h} = \sqrt{\frac{k P}{h S}}$$



EFICACIA O RENDIMIENTO DE UNA ALETA

$\eta = \frac{\phi}{h \cdot A \theta_0}$ $\leftarrow$ flujo medido $\theta_{m, \text{cv}}$ correspondiente a una temperatura media de agua total A
 $\leftarrow$ flujo como si toda la aleta estuviera a la temperatura de la base S

$$\eta = \frac{h A \theta_m}{h A \theta_0} \approx \frac{\theta_m}{\theta_0} \leftarrow ??$$

CASO 2

EXTREMO LIBRE DE LA ALETA AISLADO

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \Rightarrow \theta_0 = T_0 - T_\infty &= A + B \\ x=L \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} &= A m e^{mL} - B m e^{-mL} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Ecs} \\ \text{con 2 incgn.} \\ A \text{ y } B \end{array}$$

$$A = \frac{\theta_0 \cdot e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad \text{y} \quad B = \frac{\theta_0 \cdot e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

La solución es

$$\theta(x) = \theta_0 \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

y el flujo a lo largo de la aleta es

$$\phi(x) = -kS \frac{dT}{dx} = -kS \cdot \theta_0 m \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} - \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

En este caso la efectividad es

$$\varepsilon = \frac{mkS\theta_0 \left(\frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right)}{hS\theta_0} =$$

$$= \frac{mk}{h} \left(\frac{1 + e^{-2mL}}{(1 + e^{2mL})(1 + e^{-2mL})} - \frac{1 - e^{-2mL}}{(1 + e^{2mL})(1 + e^{-2mL})} \right) = \sqrt{\frac{kP}{hS}} \left(\frac{e^{2mL} - e^{-2mL}}{(1 + e^{2mL})(1 + e^{-2mL})} \right)$$

(que es menor que en el caso anterior)

CASO 3: El extremo también es convectivo a la temperatura que le corresponde.

$$x=0 \quad \theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

$$x=L \quad -kS \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = hS(T(L) - T_\infty)$$

$$T_0 - T_\infty = A + B$$

$$Am e^{mL} - Bm e^{-mL} = -\frac{h}{k} (A e^{mL} + B e^{-mL})$$

$$\begin{cases} A(m + \frac{h}{k}) e^{mL} - B(m - \frac{h}{k}) e^{-mL} = 0 \\ A + B = \theta_0 \end{cases}$$

Solución:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{e^{-\frac{x}{l}} + [(1-m')/(1+m')] e^{-2u'} e^{u'x/l}}{1 + [(1-m')/(1+m')] e^{-2u'}}$$

$$\text{donde } m' = \sqrt{\frac{hS}{kP}} \quad \text{y} \quad u' = \sqrt{\frac{hPl^2}{kS}} = l \cdot m.$$