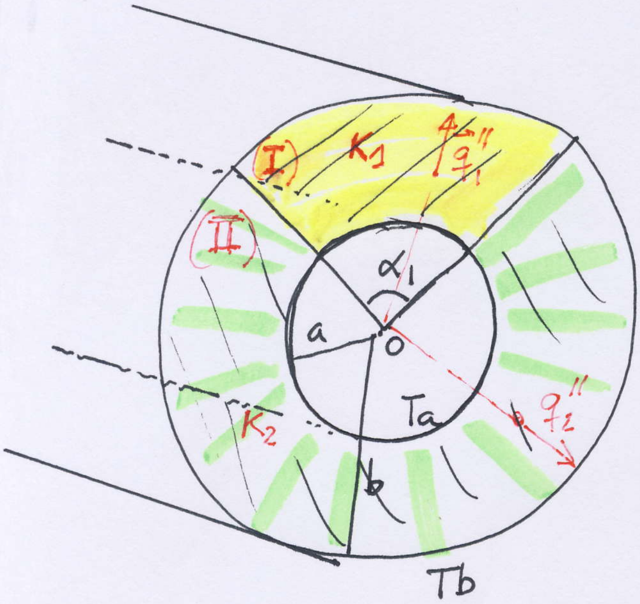
# CAPA CILINDRICA COMPUESTA (2)




Supondremos que en la superficie interior

$$T(a) = T_a$$

y en la exterior.

$$T(b) = T_b$$

En las dos regiones (I) y (II) el perfil de Temperatura es

$$T_I(r) = A \ln r + B$$

$$T_{II}(r) = C \ln r + D$$

Al aplicar las condiciones de frontera se ve facilmente que.

$$T_I(r) \equiv T_{II}(r)$$

EL CAMPO DE TEMPERATURAS ES IDÉNTICO EN AMBAS REGIONES (I) y (II)

$$\boxed{T(r) = -\frac{T_a - T_b}{\ln b/a} \ln r/a + T_a}$$

En cuanto a las corrientes y flujos de energía:

$$\vec{q}_1'' = -K_1 \frac{dT}{dr}\vec{u}_r = K_1 \cdot \frac{T_a - T_b}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{r}\vec{u}_r$$

$$\phi_1 = \int_{S_1} \vec{q}_1'' \cdot d\vec{S}_1 = K_1 \cdot \frac{T_a - T_b}{\ln b/a} \cdot \alpha_1 \cdot L = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{\alpha_1 K_1 L} \ln b/a}$$

$$d\vec{S}_1 = \alpha_1 \cdot r\,dl\,\vec{u}_r$$

de donde podemos deducir la resistencia térmica de la región (I)

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{\alpha_1 \cdot K_1 L} \ln b/a}$$

Nótese que es inversamente proporcional a la amplitud angular $\alpha_1$ de la región. Para un caso "normal" $\alpha_1 = 2\pi$ y se recupera la resistencia de la capa cilíndrica completa.

Para la región (II) puede obtenerse fácilmente que

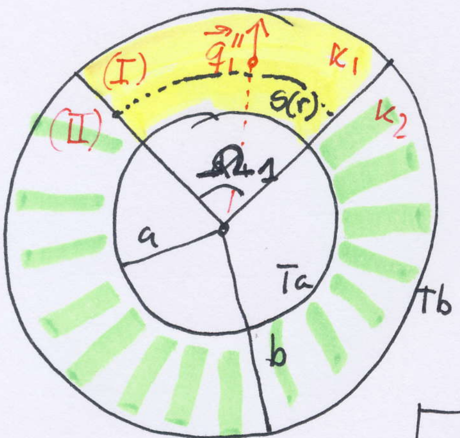
$$R_2 = \frac{1}{\alpha_2 k_2 L} \ln b/a \qquad (\text{aquí } \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1)$$

La capa cilíndrica completa equivale a la combinación en paralelo de las resistencias térmicas

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) L} \cdot \ln b/a$$

<u>N</u>: Si $k_1 = k_2$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$. recuperamos la resistencia "normal"

## CAPA ESFERICA COMPUESTA (2)




Igual que con la capa cilíndrica anterior, el campo de temperaturas es idéntico en ambas regiones (I) y II

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Junto a las condiciones de frontera, se obtiene

$$\boxed{T(r) = -\frac{T_a - T_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + T_a}$$

$$\vec{q}_1'' = -k_1 \frac{dT}{dr} \vec{u}_r = k_1 \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\phi_1 = \int_{S_1} \vec{q}_1'' \cdot d\vec{S}_1 = k_1 \cdot \frac{T_a - T_b}{1/a - 1/b} \cdot \Omega_1 = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{k_1 \Omega_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$d\vec{S}_1 = r^2 \cdot d\Omega_1 \vec{u}_r.$$

Aquí $\Omega_1$ es el ángulo sólido respecto el que se "ve" la superficie esférica parcial S(r).

A partir de este resultado puede deducirse el valor de la resistencia térmica asociada a cada región

$$R_1 = \frac{1}{k_1 \Omega_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \text{(región I)}$$

$$R_2 = \frac{1}{k_2 \Omega_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \text{(región II)}$$

Si $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$ (ángulo sólido completo) y $k_1 = k_2$, la resistencia térmica total es

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{(k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2)} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

que es la resistencia de una capa esférica "normal"