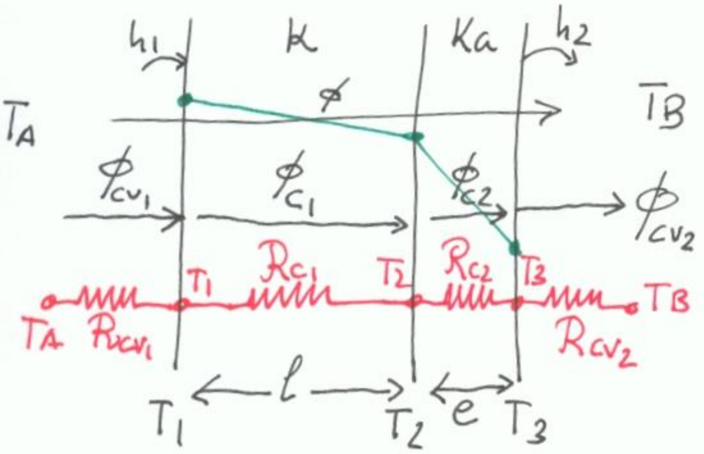
COMPORTAMIENTO DEL FLUJO DE CALOR EN PRESENCIA DE AISLANTE

1) GEOMETRIA PLANA



$$\phi_{CV_1} = \phi_{C_1} = \phi_{C_2} = \phi_{CV_2} = \phi$$

$$\phi = \frac{T_A - T_B}{R_{CV_1} + R_{C_1} + R_{C_2} + R_{CV_2}} =$$

$$= \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{\ell}{KS} + \frac{e}{K_a S} + \frac{1}{h_2 S}}$$

Considerando $\phi_S = \phi/S = \dfrac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1} + \frac{\ell}{K} + \frac{e}{K_a} + \frac{1}{h_2}}$ se ve que $e \nearrow \Rightarrow \phi_S \searrow$

Calculo de las temperaturas

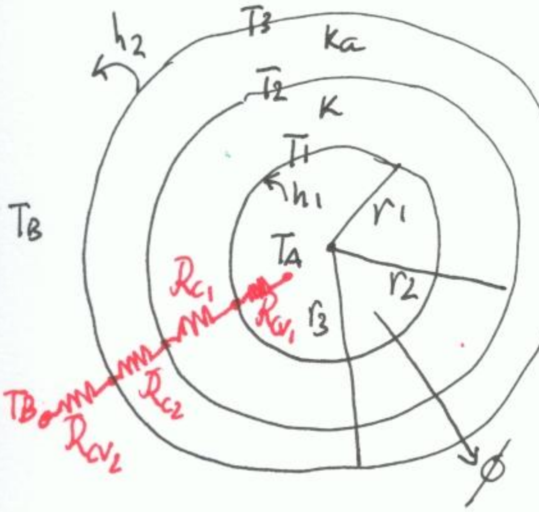
$$T_A - T_1 = \phi_{CV_1} \cdot R_{CV_1} = \phi \cdot \frac{1}{h_1 S} = \frac{\phi_S}{h_1} \Rightarrow T_1 = T_A - \frac{\phi_S}{h_1}$$

$$T_1 - T_2 = \phi_{C_1} \cdot R_{C_1} = \phi \cdot \frac{\ell}{KS} = \phi_S \cdot \frac{\ell}{K} \Rightarrow T_2 = T_1 - \phi_S \cdot \frac{\ell}{K}$$

$$T_3 - T_B = \phi_{CV_2} R_{CV_2} = \phi \cdot \frac{1}{h_2 S} = \frac{\phi_S}{h_2} \Rightarrow T_3 = T_B + \phi_S/h_2$$

Como conclusión general, cualquier espesor de aislante hace disminuir el flujo transmitido por la pared. Las temperaturas T_1 y T_2 crecen y la capa de aislante es la que soporta el mayor gradiente térmico

e) GEOMETRIA CILINDRICA



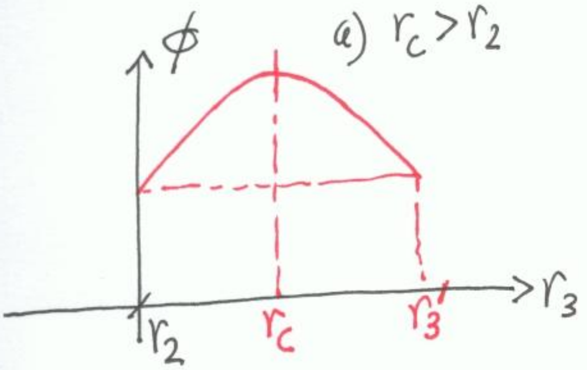
$$\phi_{cv_1}=\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_{cv_2}=\phi$$

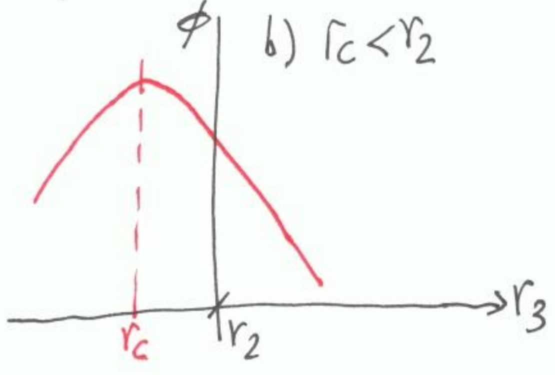
$$\phi = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1 S_1} + \frac{1}{2\pi K L}\log\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi K_a L}\log\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{h_2 S_3}}$$

$$\phi = \frac{2\pi L\,(T_A - T_B)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{1}{K}\log\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{K_a}\log\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{h_2 r_3}}$$

Se considera $\phi_L = \phi/L$ y se evalua $d\phi/dr_3 = 0$. Se alcanza un extremo para el valor $\boxed{r_3 = r_c = \frac{K_a}{h_2}}$ llamado RADIO CRITICO.
El extremo resulta ser un MAXIMO. ya que $\left[\frac{d^2\phi}{dr_3^2}\right]_{r_3=r_c} < 0$.

Dos posibles situaciones se pueden presentar:

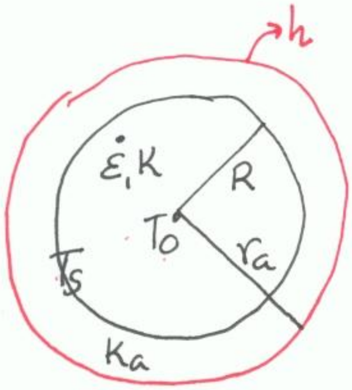


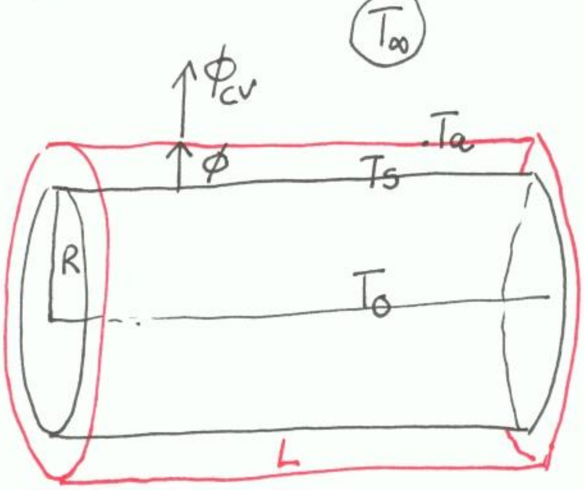


En la situación b) cualquier espesor de aislante $e = r_3 - r_2$ conduce a una DISMINUCION de flujo térmico, como corresponde a su función.
En la situación a) espesores de aislante entre r_2 y r_c conducen a un AUMENTO DEL FLUJO térmico para después volver a disminuir hasta alcanzar de nuevo el valor sin aislante para un r_3'. El calculo de este radio se hace comparando $\phi_L^{SIN} = \phi_L^{CON}(r_3')$

CASO ESPECIAL: (AQUI EL FLUJO HACIA EL EXTERIOR NO CAMBIA)

Material aislante rodeando a un cilindro sólido con fuentes internas.





$$T_0 = T_S + \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{4K}$$

$$T_S - T_a = \phi \cdot \frac{1}{2\pi K_a L} \log \frac{r_a}{R}$$

$$\phi_{cv} = h \cdot S_a (T_a - T_\infty)$$

además $\phi_{cv} = \phi = \dot{\varepsilon} \cdot \pi R^2 \cdot L$

$$T_0 = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{4K} + T_a + \frac{\phi_L}{2\pi K_a} \log \frac{r_a}{R}$$

$$T_0 = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{4K} + \frac{\dot{\varepsilon} \cancel{\pi} R^2}{2\cancel{\pi} K_a} \log \frac{r_a}{R} + \frac{\dot{\varepsilon} \cancel{\pi} R^2 \cancel{L}}{h \cdot 2\cancel{\pi} r_a \cancel{L}} + T_\infty$$

luego la temperatura del eje del conductor es

$$T_0 = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{4K} + \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{2K_a} \log \frac{r_a}{R} + \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{2h r_a} + T_\infty$$

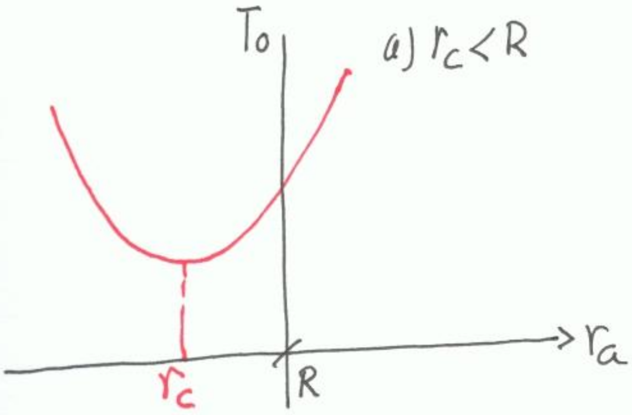
la cual depende de r_a, por tanto podemos buscar extremos

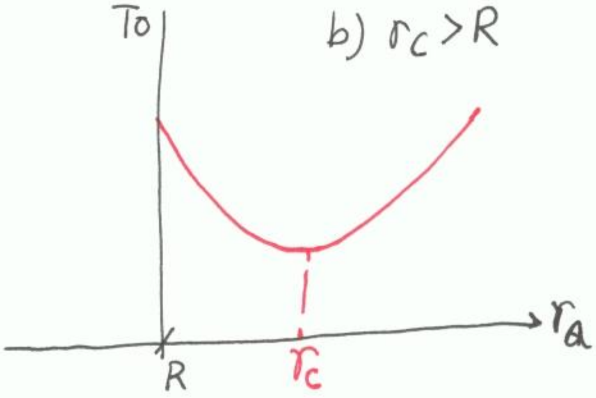
$$\frac{dT_0}{dr_a} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{2} \left[\frac{1}{K_a} \frac{\cancel{R}}{r_a} \cdot \frac{1}{\cancel{R}} - \frac{1}{h r_a^2} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{K_a}{h}} = r_c$$

y se trata de un mínimo pues

$$\left. \frac{d^2 T_0}{dr_a^2} \right|_{r_a = r_c} = \left. \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{2} \left[-\frac{1}{K_a r_a^2} + \frac{2}{h r_a^3} \right] \right|_{r_a = r_c} = \left. \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{2 r_a^2} \left[\frac{2}{h r_a} - \frac{1}{K_a} \right] \right|_{r_a = r_c} > 0$$

Por tanto, dos posibles situaciones se pueden dar,





En la situación a) cualquier espesor de aislante conduce a un aumento de la temperatura del cable To, mientras que en la situación b) hay un rango de espesores para los que To decrece sensiblemente. (Se puede ayudar a enfriar el cable)

Ejemplo: Se tiene un cable de cobre $K_{cu} = 370$ W/mK de radio R = 9 mm. Si el coeficiente de convección con el aire circundante es $h = 10$ W/m²K. Calcula la temperatura en su eje si la temperatura ambiente es 30°C y transporta una corriente de 1000A. ($\rho_{cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$)

1) Calcula la temperatura de la superficie del cable.

Si ahora se forra con un material de conductividad $K_a = 10$ W/mK y espesor igual al radio del cable original, calcula

2) el radio crítico

3) La nueva temperatura de la superficie del cable.

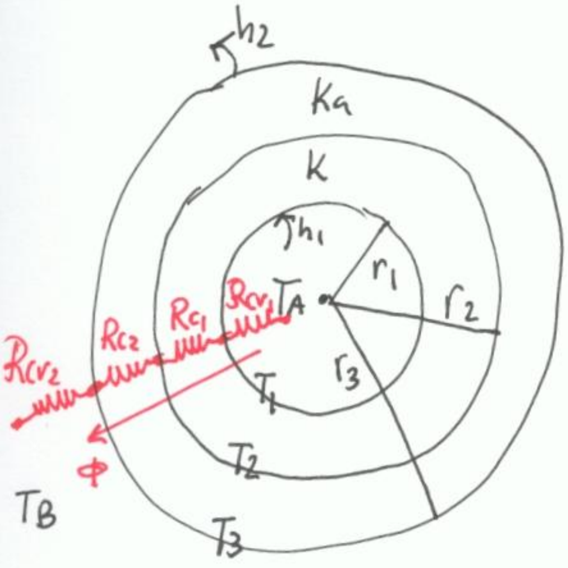
1) $T_s = T_a + \dfrac{\dot{\varepsilon} \cdot R}{2h}$ y $\dot{\varepsilon} = \rho_{cu} \cdot \dfrac{I^2}{(\pi R^2)^2}$; $T_s = 148{,}14\ °C$

2) $r_c = K_a / h = 1\ m$.

3) $T_s' = T_a + \dfrac{\dot{\varepsilon} R^2}{2}\left(\dfrac{1}{K_a} \log \dfrac{R+e}{R} + \dfrac{1}{h(R+e)} \right) = 89{,}81\ °C$

factor de reducción = 39,38 %

3) GEOMETRIA ESFERICA



$$\phi_{cv_1} = \phi_{c_1} = \phi_{c_2} = \phi_{cv_2} = \phi$$

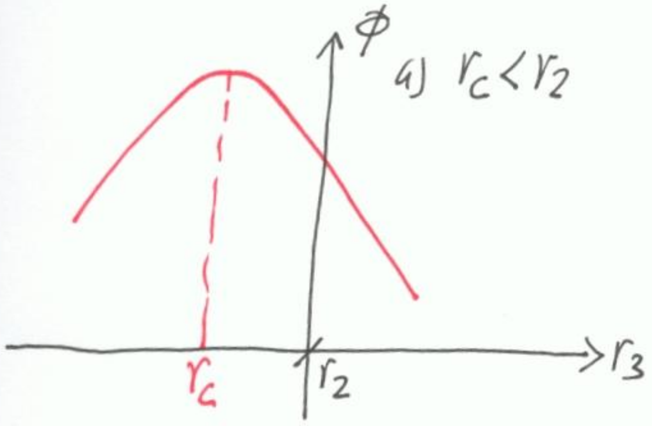
$$\phi = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1 S_1} + \frac{1}{4\pi K}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{4\pi K_a}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \frac{1}{h_2 S_3}}$$

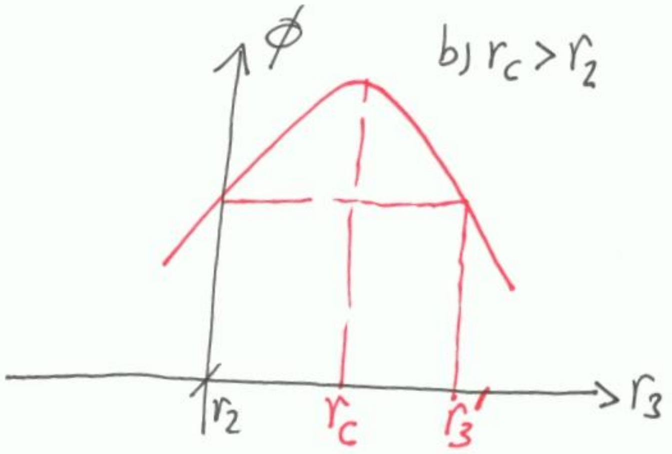
$$= \frac{4\pi (T_A - T_B)}{\frac{1}{h_1 r_1^2} + \frac{1}{K}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{K_a}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \frac{1}{h_2 r_3^2}}$$

Estudiamos los extremos de ϕ como función de r_3

$$\frac{d\phi}{dr_3} = 0 \Rightarrow \boxed{r_3 = r_c = \frac{2K_a}{h_2}}$$ llamado **RADIO CRITICO**..

El extremo es un **MAXIMO** ya que $\left.\frac{d^2\phi}{dr_3^2}\right|_{r_3 = r_c} < 0$ por tanto, se pueden presentar los siguientes situaciones:

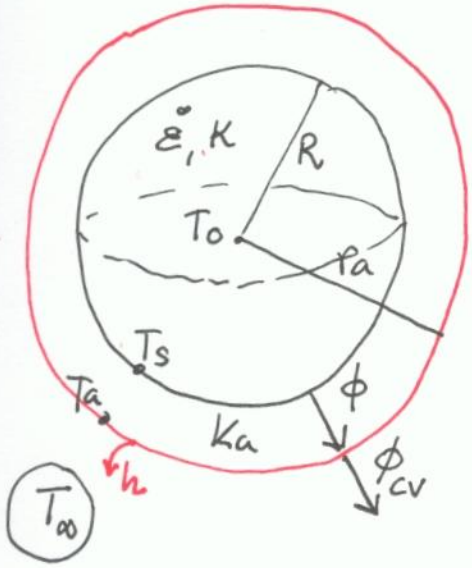




con idéntica interpretación que en geometría cilíndrica.
Igualmente, el radio r_3' para el que se iguala al flujo sin aislante se calcula mediante $\phi^{SIN} = \phi^{CON}(r_3')$

CASO ESPECIAL: (AQUI EL FLUJO HACIA EL EXTERIOR NO CAMBIA)

También puede estudiarse el caso especial de una esfera sólida con fuentes internas de densidad $\dot{\varepsilon}$



$$T_0 = T_S + \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{6K}$$

$$T_S - T_a = \phi \frac{1}{4\pi K_a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\phi_{cv} = h \cdot 4\pi r_a^2 \cdot (T_a - T_\infty)$$

$$\phi = \dot{\varepsilon} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \phi_{cv}$$

$$T_0 = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{6K} + T_a + \frac{\dot{\varepsilon}\, \cancel{4}/3 \cancel{\pi} R^3}{\cancel{4}\cancel{\pi} K_a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{6K} + T_a + \frac{\dot{\varepsilon} R^3}{K_a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$T_0 = \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{6K} + \frac{\dot{\varepsilon} R^3}{3K_a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_a}\right) + \frac{\dot{\varepsilon}\, \cancel{4}/3 \cancel{\pi} R^3}{\cancel{4}\cancel{\pi} r_a^2 h} + T_\infty =$$

$$= \frac{\dot{\varepsilon} R^2}{6K} + \frac{\dot{\varepsilon} R^3}{3K_a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_a}\right) + \frac{\dot{\varepsilon} R^3}{3h\, r_a^2} + T_\infty$$

por tanto buscamos el extremo de $T_0(r_a)$

$$\frac{dT_0}{dr_a} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon} R^3}{3K_a}\frac{1}{r_a^2} - \frac{2\dot{\varepsilon} R^3}{3h}\frac{1}{r_a^3} = 0 \Rightarrow \boxed{r_a = \frac{2K_a}{h}} = r_c$$

y se trata de un mínimo pues

$$\left.\frac{d^2 T_0}{dr_a^2}\right|_{r_a = r_c} \geq 0$$

Si $r_c < R \Rightarrow$ cualquier espesor del forro da lugar a un aumento de T_0

Si $r_c > R \Rightarrow$ hasta que $r_e \in (R, r_c)$ el forro contribuye a bajar la temperatura del cable.