TEORÍA DE ERRORES
(Conceptos Básicos)

Prácticas de Laboratorio: Mecánica. Mecánica y Ondas. Termología y Física Estadística.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

TEORÍA DE ERRORES

(Conceptos Básicos)

Prácticas de Laboratorio: Mecánica. Mecánica y Ondas. Termología y Física Estadística.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Índice general

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. INTRODUCCIÓN.

1.1.1. CONCEPTO DE ERROR.

Error es la desviación existente entre el resultado de la medición de una magnitud física y el valor verdadero de ésta. El error es algo implícito al proceso de medida y se puede clasificar, según su origen, como sigue:

- Error de tipo sistemático: Es aquél debido a defectos en el método o en el instrumento de medición, reflejándose en una desviación, siempre en el mismo sentido, de los resultados de las medidas. Ejemplo: el error sistemático que se produce al utilizar una balanza mal calibrada.
- Error de tipo accidental: Es aquél debido a causas imposibles de controlar, alterándose los resultados de la medida de forma aleatoria. Ejemplo: en la medida de un intervalo temporal con un cronómetro manual el error cometido por el hecho de la no coincidencia entre el inicio del experimento y la puesta en marcha del cronómetro.

Los errores sistemáticos pueden ser prácticamente eliminados al ser posible detectarlos y corregirlos. Sin embargo, los errores accidentales nunca pueden ser eliminados, aunque admiten un tratamiento estadístico que es el que expondremos más adelante.

1.1.2. REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Al realizarse la medición de una magnitud física (que puede haberse hecho a través de un gran número de medidas individuales), nuestro objetivo es presentar el resultado final de la forma

$$magnitud = X^* \pm \epsilon \tag{1.1}$$

donde X^* es el valor aceptado de la magnitud resultado de la medición (al cual llamaremos también valor esperado) y ϵ es una estimación del error absoluto cometido (al que también llamaremos incertidumbre). De esta manera, se está suponiendo implícitamente que el valor verdadero X_V de la magnitud verifica

$$X_V \in (X^* - \epsilon \ , \ X^* + \epsilon) \tag{1.2}$$

A la hora de escribir estos resultados, **siempre** se seguirán las siguientes reglas:

- La última cifra significativa[1] del valor esperado y la última cifra significativa del error han de ser del mismo orden decimal.
- El error ha de tener una única cifra significativa . Se acepta que si la primera cifra significativa del error es un 1, se incluya una segunda.
- Se procurará expresar los resultados en notación científica, para así evitar la posible ambigüedad que surgiría en el caso que la última cifra significativa fuese un cero.
- El resultado ha de estar acompañado por las unidades correspondientes a la magnitud física que se ha medido.

[1]Dado un número escrito en forma decimal, cifras significativas son todas aquellas distintas de cero. Un cero es una cifra significativa si

- Está situado entre dígitos no nulos.
- Está situado detrás de dígitos no nulos y a la derecha de la coma decimal.
- En el caso de números enteros, si está situado detrás de dígitos no nulos **y se ha escrito la coma decimal explícitamente.**

Por ejemplo, en la siguiente lista de números, se resaltan en negrita aquellas cifras que son significativas:

0,0**100205** (6 cifras sig.) **10,230** (5 cifras sig.) **1200,** (4 cifras sig.) **12**00 (2 cifras sig.)

Así, tras la realización de una medida (valor esperado y error absoluto), se redondeará el error absoluto para que así quede expresado con una única cifra significativa (o dos si la primera es un 1). Hecho esto, queda determinado el orden de la última cifra significativa del valor esperado, redondeándose éste en consecuencia. Algunos ejemplos (en la medida de distintas masas) son:

$$1,23782 \pm 0,074\ kg \rightarrow \boxed{1,24 \pm 0,07\ kg}$$
$$0{,}087214 \pm 0,0001256\ kg \rightarrow \boxed{0,08721 \pm 0,00013\ kg = (87,21 \pm 0,13) \times 10^{-3}\ kg}$$
$$1276,23 \pm 31,456\ kg \rightarrow \boxed{1280 \pm 30\ kg} \rightarrow \boxed{(1,28 \pm 0,03) \times 10^{3}\ kg}$$
$$1280,23 \pm 3,1456\ kg \rightarrow \boxed{1280,\ \pm 3\ kg} \rightarrow \boxed{(1,280 \pm 0,003) \times 10^{3}\ kg}$$

Además del error absoluto o incertidumbre, suele incluirse en el resultado el error relativo, definido como

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{X^*} \tag{1.3}$$

siendo evidente que el error relativo es adimensional. Es usual expresar éste en términos de porcentajes, para lo cual basta multiplicar por 100 el resultado de la anterior ecuación.

El resultado de una medida es exacto si el valor verdadero de la magnitud se encuentra dentro del intervalo determinado por el valor esperado y el error absoluto asociado. El resultado de una medida es más preciso cuanto menor sea el error relativo del mismo. Puede así ocurrir que tengamos una medida muy precisa pero inexacta (por ejemplo, debida a un error sistemático no detectado) y, que por el contrario, una medida sea exacta pero imprecisa.

1.2. MEDIDAS DIRECTAS.

1.2.1. DEFINICIÓN.

Como su nombre indica, una medida directa de una magnitud es aquella que se obtiene por lectura directa en un cierto aparato (p.ej. la masa en una balanza) sin necesidad de hacer cálculo alguno.

Llamamos precisión del aparato de medida a la mínima desviación medible en la escala graduada del instrumento (p. ej. en una báscula en la que la distancia entre dos marcas de la escala sea de 1 gramo, la precisión de la misma es 1 gramo; en un aparato digital, su precisión es el orden de la última cifra que aparece en la pantalla del mismo).

Al efectuar una medida directa individual, el orden de la última cifra significativa del resultado de la medida no puede ser menor que la precisión del aparato. Así, en la báscula cuya precisión es de 1 gramo, resulta inadmisible como resultado de una medida individual 123,5 g ¡aunque nos parezca que la aguja está justo entre dos marcas de la escala graduada!

Cada medida individual estará afectada de un error accidental (suponiendo que las fuentes de error sistemático hayan sido eliminadas). Es por ello que al efectuar la medida de la magnitud física realizaremos N mediciones individuales que pueden ser tratadas estadísticamente, pudiéndose hallar el valor esperado y el error.

1.2.2. VALOR ESPERADO.

Supongamos que hemos realizado N medidas directas individuales de una magnitud, siendo x_j $\{j = 1, 2, ..., N\}$ cada uno de los resultados individuales. El valor esperado de la magnitud se toma igual a la media aritmética de las cantidades x_j .

$$X^* = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \tag{1.4}$$

1.2.3. ERROR ABSOLUTO.

La estimación que se haga del error absoluto dependerá del número N de medidas realizadas. Definamos previamente:

- Precisión del aparato: p .
- Dispersión de los datos: $D_m = \dfrac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{2}$, donde $x_{\text{máx}}$ es el dato de valor más alto y $x_{\text{mín}}$ el de valor más bajo).
- Desviación cuadrática media: $\sigma_m = \left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N(N-1)} \right)^{1/2}$.

Entonces, una estimación del error puede venir dada por el siguiente criterio:

- Si se ha efectuado una sola medida $(N = 1)$:

$$\epsilon = p \tag{1.5}$$

- Si se tienen, como máximo, diez medidas $(1 < N \leq 10)$:

$$\epsilon = \text{máx}\,(p, D_m) \tag{1.6}$$

- Si se tienen más de diez medidas $(N > 10)$:

$$\epsilon = \text{máx}\,(p, \sigma_m) \tag{1.7}$$

1.2.4. NÚMERO DE MEDIDAS.

En muchos casos puede surgir la duda en la determinación directa de una magnitud física sobre el número de medidas que se han de realizar. El siguiente criterio puede resultar orientativo a este respecto:

- Se efectúan tres medidas de la magnitud, calculando la dispersión D_m asociada a los tres datos obtenidos. Entonces
  - Si $D_m < 0,02\bar{x}$ estas tres medidas son suficientes.
  - Si $0,02\bar{x} < D_m < 0,08\bar{x}$ seis medidas resultan suficientes.
  - Si $0,08\bar{x} < D_m < 0,15\bar{x}$ quince medidas son suficientes.
  - Si $D_m > 0,15\bar{x}$ hay que realizar un gran número de medidas $(N \simeq 50)$.
- Es inaceptable un resultado en el que el error relativo sea mayor que el 10 %. En este caso hay que aumentar el número de medidas hasta conseguir disminuir esta cifra. Si se observase que el alto error se sigue manteniendo, entonces nos encontraríamos con que el procedimiento experimental resulta limitado para los propósitos deseados, debiendo (lógicamente si resulta posible) cambiar de método.

1.2.5. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS.

En general, la presentación de los datos experimentales se realiza a través de tablas. En el caso de una medida directa, señalaremos claramente la magnitud física, las unidades de los datos obtenidos y el error de la medida individual (la precisión del aparato de medida). A continuación, obtendremos el valor esperado y el error absoluto asociado (indicando el procedimiento empleado para calcular éste) y, por último, el resultado final (valor medio e incertidumbre) con el formato numérico correcto.

Como ejemplo veamos la tabla de resultados asociada a $N = 12$ mediciones del tiempo de caída libre de una masa desde una altura de 2 m con un sistema de medición de tiempos cuya precisión es de una centésima de segundo ($p = 0,01\ s$).

Tabla 2.1.- Tiempo de caída del móvil												
Med. nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(t ± 0.01) s	0.62	0.52	0.62	0.63	0.62	0.62	0.61	0.58	0.66	0.65	0.67	0.65

$$\bar{t}\frac{\sum_{j=1}^{12} t_j}{12} = 0,633...\ s\ ; \qquad \sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{12}(t_j-\bar{t})^2}{12\times 11}} = 0,0097...\ s$$

y en consecuencia, al ser $\sigma_m \simeq p$

$$\boxed{\text{t=0,63}\pm\text{0,01 s}}$$

1.3. MEDIDAS INDIRECTAS.

1.3.1. DEFINICIÓN.

Una medida indirecta de una magnitud física es aquella que se obtiene a través de operaciones efectuadas sobre valores de magnitudes medidas directamente. Por ejemplo, la determinación de la aceleración de la gravedad g en la superficie terrestre indirectamente a través de la medición del tiempo t que tarda un móvil en recorrer un espacio vertical h en caída libre usando la expresión

$$g = \frac{2h}{t^2} \tag{1.8}$$

La altura h y el tiempo t han sido medidos directamente y el valor que se tiene, en consecuencia, de la constante g ha sido resultado de una medida indirecta.

1.3.2. VALOR ESPERADO Y ERROR ABSOLUTO.

Consideremos una magnitud Z que viene dada en función de otras $A, B, C, ...$ mediante una expresión del tipo

$$Z = f\,(A, B, C, ...) \tag{1.9}$$

siendo los valores esperados de $A, B, C, ...$ respectivamente $A^*, B^*, C^*, ...$ y los errores absolutos $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C, ..$ Entonces, el valor esperado de Z^* es el resultado de la evaluación de la función Z sobre los valores esperados $A^*, B^*, C^*, ..$:

$$\boxed{\mathrm{Z}^* = f\,(A^*, B^*, C^*, ...)} \tag{1.10}$$

Paralelamente, el error sobre las magnitudes $A, B, C, ...$ determina el error de Z (propagación de errores). Para calcular éste tendremos que hallar en primer lugar las derivadas parciales de la función f respecto de cada una de sus variables

$$f_A = \frac{\partial f}{\partial A} \quad ; \quad f_B = \frac{\partial f}{\partial B} \quad ; \quad f_C = \frac{\partial f}{\partial C} \quad ; \quad ... \tag{1.11}$$

Hecho esto, el error absoluto asociado a Z viene dado por

$$\boxed{\epsilon_Z = |f_A(A^*, B^*, C^*, ...) \cdot \epsilon_A| + |f_B(A^*, B^*, C^*, ...) \cdot \epsilon_B| + |f_C(A^*, B^*, C^*, ...) \cdot \epsilon_C| + ...} \tag{1.12}$$

donde por $|x|$ designamos el valor absoluto de la cantidad x.

Por ejemplo, en la situación mencionada de la obtención de g a través de la expresión

$$g = g(h, t) = \frac{2h}{t^2} \tag{1.13}$$

la medida de la altura h ha dado como resultado $h = 2,00 \pm 0,01\ m$, mientras que el tiempo de caída ha viene expresado por $t = 0,63 \pm 0,01\ s$:

$$\begin{array}{ll} h^* = 2,00\ m & \epsilon_h = 0,01\ m \\ t^* = 0,63\ s & \epsilon_t = 0,01\ s \end{array} \tag{1.14}$$

Las dos derivadas parciales son

$$g_h(h, t) = \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{2}{t^2} \quad ; \quad f_t(h, t) = \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{4h}{t^3} \tag{1.15}$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned} g^* &= \frac{2h^*}{t^{*2}} = 10,078\ ms^{-2} \\ \epsilon_g &= \left|\frac{2}{t^{*2}}\epsilon_h\right| + \left|-\frac{4h^*}{t^{*3}}\epsilon_t\right| = 0,37\ ms^{-2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

de manera que redondeando convenientemente los resultados

$$\boxed{g = 10,1 \pm 0,4\ ms^{-2} \quad ; \quad \epsilon_r \simeq 4\,\%} \tag{1.17}$$

Por último, si en la función apareciese un número irracional (π , por ejemplo), en buena lógica hay que introducir el error del número resultado de tomar para éste finitas cifras decimales ($\pi = 3,1415 \pm 0,0001$). Ha de cumplirse que el error relativo asociado a un número irracional ha de ser menor que el error relativo de cualquier magnitud física medida directamente que aparezca en la expresión, para lo cual basta tomar el número irracional con el suficiente número de cifras decimales.

1.3.3. CASOS PARTICULARES.

Como acabamos de ver, el cálculo asociado a la propagación de errores resulta tedioso debido a la necesidad de obtener y, posteriormente evaluar, un gran número de derivadas parciales. Ahora bien, hay situaciones en las que el resultado final que se sigue del procedimiento expuesto en el subapartado anterior resulta especialmente simple:

- Expresiones lineales
$$Z = \alpha A + \beta B + ... \tag{1.18}$$
con $\alpha, \beta, ...$ constantes racionales y $A, B, ...$ magnitudes físicas. En este caso
$$\epsilon_Z = |\alpha|\, \epsilon_A + |\beta|\, \epsilon_B + ...$$

- Monomios
$$Z = \gamma A^\alpha B^\beta ...$$
con $\gamma, \alpha, \beta, ...$ constantes racionales y $A, B, ..$ magnitudes. Entonces
$$\epsilon_Z = |Z^*| \left(\left| \frac{\alpha}{A^*} \right| \epsilon_A + \left| \frac{\beta}{B^*} \right| \epsilon_B + ... \right)$$

Capítulo 2

GRÁFICAS

2.1. GENERALIDADES.

En muchos casos, el objetivo de las medidas es descubrir o comprobar una posible relación entre dos magnitudes físicas X e Y. En esta situación es conveniente emplear una gráfica en la que se representen las parejas de valores (X_j, Y_j) cuyo análisis facilitaría el estudio de la mencionada relación.

A la hora de representar una gráfica, seguiremos las siguientes normas generales:

- Se usará papel milimetrado o, si se tiene acceso, uno de los múltiples programas de ordenador diseñados a tal efecto.
- Cada gráfica tendrá un título, en el que se indique de forma clara y breve lo que se pretende representar con dicha gráfica. Si los datos numéricos se encuentran en una tabla aparte, conviene hacer referencia a la misma.
- Los ejes de la gráfica deben rotularse claramente con el nombre de la magnitud física y las unidades en las que se expresa. A su vez, deben incluirse divisiones que faciliten la interpretación de los datos.
- Los límites de cada eje, al igual que el origen de coordenadas, deben elegirse cuidadosamente de tal manera que los datos se distribuyan sobre toda la gráfica (impidiendo que aparezcan apelmazados en una parte de la misma). Así, el origen no tiene porque ser, necesariamente, el cero de ambas magnitudes.
- Los puntos correspondientes a una pareja de datos deben marcarse explícitamente, destacándolos con un símbolo (por ejemplo $\bullet, \diamondsuit$). Asimismo, se tiene que indicar el error experimental en la toma de los datos mediante

una o dos barras de error. Así, si el error del valor Y_j resulta ser ϵ_Y, se situará un segmento vertical de longitud $2\epsilon_Y$ (en las unidades determinadas en el eje de ordenadas, naturalmente) centrado en el punto que representa la pareja de datos. Análogamente se procede con el error del valor X_j usando un segmento horizontal de longitud $2\epsilon_X$.

- Cuando la interpretación física lo requiera, debe dibujarse , junto con los datos experimentales, una curva que mejor ajuste a los mismos. Esto solo debe realizarse si la teoría que intentamos corroborar así lo prescribe. En la mayoría de las gráficas de estos laboratorios solo será necesario un ajuste lineal que puede ser realizado a mano, según se explica en el capítulo anterior, o a través de una aplicación informática (mucho más sencillo) como, por ejemplo, *Origin*.

2.2. TIPOS DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

- Lineal: En una gráfica lineal, distancias iguales tomadas sobre ambos ejes representan intervalos iguales, siendo éste el tipo de representación gráfica usada habitualmente.

- Logarítmica: Las escalas horizontales y verticales no son lineales, sino logarítmicas; así distancias iguales no representan intervalos iguales. Más claramente, sobre la gráfica se representa no el par ordenado (X_j, Y_j) sino $(\log_{10} X_j, \log_{10} Y_j)$. Si deseásemos hacer una gráfica logarítmica, usaríamos papel adecuado (papel logarítmico), el cual ya está preparado para no tener que efectuar ninguna operación intermedia. Las gráficas logarítmicas son útiles a la hora de representar relaciones del tipo $Y = \alpha X^q$, puesto que tomando logaritmos $\log_{10} Y = \log_{10} \alpha + q \log_{10} x$, y así la gráfica sería una recta de pendiente q.

- Semilogarítmica: Una de las escalas es lineal y la otra es logarítmica. De esta manera (suponiendo que el eje lineal es el de abcisas) representamos los puntos $(X_j, \log_{10} Y_j)$. Al igual que existe un papel logarítmico, se tiene papel semilogarítmico preparado a este efecto. Las gráficas semilogarítmicas son útiles a la hora de representar dependencias exponenciales del tipo $Y = A\beta^x$, ya que tomando logaritmos $\log_{10} Y = \log_{10} A + (\log_{10} \beta)\, x$, y así la gráfica será una recta de pendiente $\log_{10} \beta$.

2.3. AJUSTE DE FUNCIONES LINEALES. MÍNIMOS CUADRADOS.

Consideremos un conjunto de N medidas de una pareja de magnitudes físicas X e Y de las cuales sospechamos que se encuentran relacionadas mediante una función lineal del tipo

$$Y = mX + b \tag{2.1}$$

siendo nuestro objetivo el encontrar la pareja de valores m, b que den lugar la recta que mejor ajuste los N datos experimentales (método de mínimos cuadrados). Como convenio, consideraremos la mejor recta como aquella para la cual *la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos respecto de la recta sea mínima.* Esto es, se han de tomar m, b de tal forma que la cantidad

$$C\,(m,b) = \sum_{j=1}^{N} \left(Y_j - mX_j - b\right)^2 \tag{2.2}$$

sea mínima. Puede probarse que solucionar este problema es equivalente a resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas m, b

$$\tag{2.3}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j Y_j - N X_C Y_C}{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^2 - N X_C^2} \\ b &= \frac{Y_C \sum\limits_{j=1}^{N} X_j^2 - X_C \sum\limits_{j=1}^{N} X_j Y_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^2 - N X_C^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

siendo (X_C, Y_C) las coordenadas del "centro de gravedad" de los datos experimentales dadas por

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \quad ; \quad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j \tag{2.5}$$

(nótese que ni X_C ni Y_C representan un valor esperado, puesto que cada pareja de datos (X_j, Y_j) está asociada a un estado distinto del sistema que estamos midiendo).

Puede suceder que m, b estén relacionados, como ya hemos comentado, con alguna cantidad cuyo valor deseamos conocer. Así, siendo consistentes, necesitamos saber el error cometido en la determinación de m y b, pudiendo probarse que vienen dados por

$$\begin{aligned}\epsilon_m &= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(Y_j - mX_j - b)^2}{(N-2)\sum_{j=1}^{N}(X_j - X_C)^2}} \\ \epsilon_b &= \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{X_C^2}{\sum_{j=1}^{N}(X_j - X_C)^2}\right)\frac{\sum_{j=1}^{N}(Y_j - mX_j - b)^2}{(N-2)}}\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por último, se define el coeficiente de correlación como

$$r = \frac{N\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j - \sum_{j=1}^{N} X_j \sum_{j=1}^{N} Y_j}{\sqrt{N\sum_{j=1}^{N} X_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} X_j\right)^2}\sqrt{N\sum_{j=1}^{N} Y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right)^2}} \tag{2.7}$$

y que informa sobre la dependencia existente entre las variables X e Y. Un coeficiente de correlación cercano a la unidad indica que la dependencia entre ambas es, efectivamente, lineal y que tiene sentido el hacer el ajuste por una recta.

El método de ajuste lineal no está limitado a relaciones del tipo $Y = mX + b$. Ya hemos visto que otro tipo de funciones como $Y = aX^m$ o $Y = Ab^x$, tras la toma de logaritmos dan lugar a relaciones lineales. En este caso el ajuste que acabamos de ver sigue siendo válido. Análogamente, en una relación del tipo $Y = \sqrt{A + BX^4}$, la toma de logaritmos no simplificaría la relación, sin embargo, representando Y^2 frente a X^4 el resultado es de nuevo una recta, siendo ajustable ésta.

En las situaciones extremas en las que resulta imposible el ajuste mediante una recta (por ejemplo $Y = A + BY + CY^2$, con A, B, C desconocidos) se sigue el mismo principio que el empleado en el ajuste lineal por mínimos cuadrados: los valores de los parámetros han de ser tales que la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales respecto de la gráfica sea mínima. El problema, igualmente, se reducirá a la resolución de un sistema de M ecuaciones lineales con M incógnitas (los parámetros).

Capítulo 3

EJEMPLO

Para clarificar en lo posible estos últimos conceptos, consideremos como ejemplo la siguiente experiencia ficticia (cálculo de la aceleración de la gravedad):

- OBJETIVO: Cálculo de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre mediante el estudio del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo en caída libre.

- PROCEDIMIENTO:

  - En primer lugar se medirá el tiempo t que emplea el móvil en recorrer una distancia h por efecto de la aceleración de la gravedad partiendo con velocidad nula (caída libre). Para ello se suelta el cuerpo desde distintas alturas y se mide el tiempo que tarda en impactar contra el suelo. Para cada altura se realizan distintas mediciones, calculándose los errores y representando los resultados finales en una tabla adecuada.

  - Se representan las gráficas t *en función de* h y t^2 *en función de* h, ajustando por mínimos cuadrados esta última mediante una recta. Relacionando el valor de la pendiente de dicha recta con la aceleración de la gravedad calcular esta última, con su error asociado.

  - Representar t *en función de* h en papel logarítmico, comprobando que el resultado es una recta.

  - Representar $\log t$ *en función de* $\log h$. Ajustando la recta correspondiente por mínimos cuadrados hallar, de nuevo, el valor de g . Comentar las diferencias existentes entre este método y el expuesto en la segunda parte del procedimiento.

• En los apartados 2 y 3, como ilustración del cálculo de errores, hemos visto un cálculo de g midiendo el tiempo que tardaba el móvil en caer desde una altura determinada. Aquí vamos a seguir la misma idea, pero midiendo los tiempos que emplea en recorrer distintas alturas, extrayendo el valor de g a partir de la gráfica adecuada que relacione tiempos con alturas.

Vamos a suponer que las alturas se han dispuesto a intervalos de 20 cm desde 0,2 m hasta 2 m, habiendo sido medidas éstas con una cinta métrica graduada en centímetros ($p_h = 0,01\ m$). Para cada altura se efectuaron quince medidas del tiempo de caída con un cronómetro cuya precisión es de una centésima de segundo ($p_t = 0,01\ s$). En total tenemos 150 datos experimentales agrupados en diez grupos, por lo que en primer lugar presentaremos de forma compacta los datos experimentales:

Figura 3.1: Datos Experimentales.

h (m)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)	t_6 (s)	t_7 (s)	t_8 (s)	t_9 (s)	t_{10} (s)	t_{11} (s)	t_{12} (s)	t_{13} (s)	t_{14} (s)	t_{15} (s)	**<t>** (seg)	σ (seg)
0,20	0,18	0,19	0,17	0,22	0,21	0,20	0,22	0,18	0,19	0,20	0,21	0,19	0,22	0,21	0,20	**0,199**	**0,004**
0,40	0,28	0,29	0,27	0,30	0,28	0,28	0,30	0,29	0,27	0,28	0,29	0,30	0,27	0,28	0,30	**0,286**	**0,003**
0,60	0,33	0,35	0,34	0,37	0,35	0,36	0,36	0,35	0,38	0,34	0,33	0,35	0,33	0,36	0,35	**0,350**	**0,004**
0,80	0,42	0,40	0,40	0,39	0,41	0,37	0,41	0,40	0,42	0,40	0,41	0,38	0,41	0,40	0,39	**0,401**	**0,006**
1,00	0,44	0,45	0,45	0,46	0,44	0,45	0,45	0,46	0,45	0,44	0,45	0,47	0,44	0,45	0,45	**0,450**	**0,002**
1,20	0,50	0,49	0,50	0,51	0,49	0,50	0,50	0,49	0,50	0,50	0,49	0,48	0,48	0,51	0,50	**0,494**	**0,003**
1,40	0,54	0,53	0,53	0,54	0,55	0,53	0,53	0,54	0,54	0,53	0,53	0,53	0,53	0,54	0,53	**0,536**	**0,002**
1,60	0,57	0,57	0,58	0,56	0,56	0,57	0,57	0,56	0,57	0,59	0,57	0,58	0,58	0,57	0,56	**0,571**	**0,002**
1,80	0,60	0,60	0,62	0,61	0,62	0,61	0,61	0,60	0,62	0,61	0,61	0,60	0,60	0,62	0,61	**0,609**	**0,002**
2,00	0,62	0,61	0,63	0,63	0,64	0,64	0,64	0,64	0,63	0,65	0,64	0,65	0,65	0,64	0,64	**0,635**	**0,003**

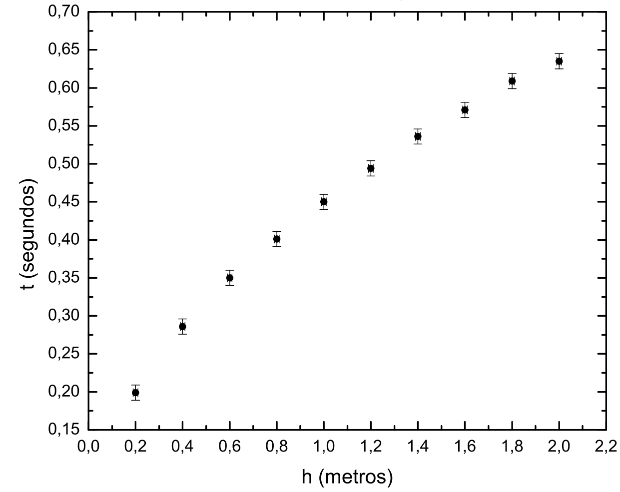
Aprovechando la propia tabla para indicar los valores medios y desviaciones cuadráticas medias de los 10 tiempos de caída. Ahora bien, puesto que resulta que, en todos los casos, $p_t > \sigma_m$, el error en cada uno de los diez tiempos resulta ser la precisión del cronómetro. Los datos definitivos se reflejan en una segunda tabla:

Figura 3.2: Tiempo/Altura

h (m)	**<t>** (seg)	Δh (m)	Δt (s)
0,20	**0,20**	0,01	0,01
0,40	**0,29**	0,01	0,01
0,60	**0,35**	0,01	0,01
0,80	**0,40**	0,01	0,01
1,00	**0,45**	0,01	0,01
1,20	**0,49**	0,01	0,01
1,40	**0,54**	0,01	0,01
1,60	**0,57**	0,01	0,01
1,80	**0,61**	0,01	0,01
2,00	**0,64**	0,01	0,01

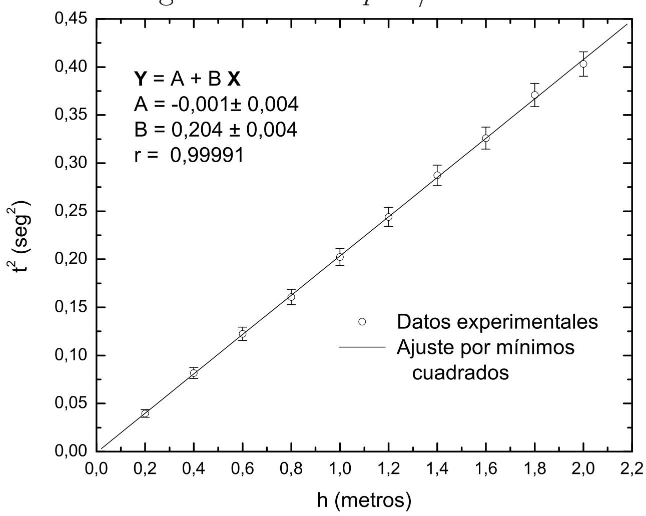
• A continuación dibujamos la primera gráfica (lineal)

Figura 3.3: Tiempo/Altura



y la segunda, incluyendo en ésta la recta ajustada por mínimos cuadrados:

Figura 3.4: *Tiempo* ^{2}/Altura.



(nótese que, mientras en la primera gráfica todas las barras de error asociadas a los tiempos eran iguales, en la segunda esto no sucede. Si usamos propagación de errores $\epsilon_{t^2} = 2t\epsilon_t$, lo que ha de tenerse en cuenta).

Nótese también que en gráfica se a incluido el valor de r, coeficiente de regresión. Dicho coeficiente indica la calidad del ajuste a los datos experimentales. Un valor, como el del ejemplo, de 0,999... es un valor muy bueno, significa que la recta obtenida y sus parámetros son una representación fidedigna de los datos medidos.

Esta recta es de la forma

$$t^2 = mh + b$$

siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen. Por otro lado, el resultado teórico es

$$t^2 = \frac{2}{g}h$$

por lo que

$$m_{teor} = \frac{2}{g} \quad ; \quad b_{teor} = 0$$

Empleando las expresiones correspondientes al ajuste de una recta por mínimos cuadrados, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} m = 0,204\ s^2m^{-1} & ; & \epsilon_m = 0,004\ s^2m^{-1} \\ b = -0,001\ s^2 & ; & \epsilon_b = 0,004\ s^2 \end{array}$$

por lo que, efectivamente, dentro del margen de error la ordenada en el origen de la gráfica es nula.

Puesto que

$$g = \frac{2}{m} = 9,8039..\ ms^{-2}$$

por propagación de errores

$$\epsilon_g = \left|\frac{2}{m^2}\right| \epsilon_m = 0,19\ ms^{-2}$$

y así se llega a que

$$\boxed{g = \quad 9,80 \pm 0,19\ ms^{-2}}$$

resultado razonable dentro del margen de error.

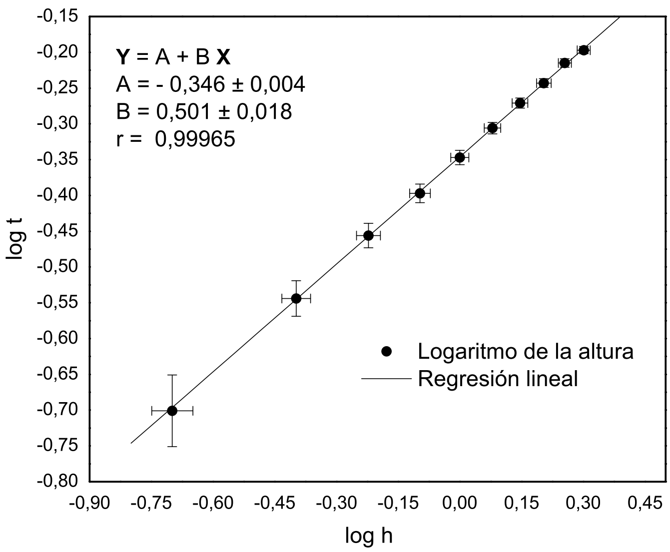
• Por último, representamos el logaritmo del tiempo de caída frente al logaritmo de la altura. La gráfica es, salvo los datos numéricos, exactamente la misma que la anterior (lógico). Sin embargo ya podemos utilizar las expresiones del ajuste de mínimos cuadrados con los datos que se derivan de la tabla 3.2:

Figura 3.5: Logaritmos de Datos Experimentales (con error).

log h (m)	**log <t>** (seg)	$\Delta \log h$ (m)	$\Delta \log t$ (s)
-0,70	-0,70	0,05	0,05
-0,40	-0,54	0,03	0,04
-0,22	-0,46	0,02	0,03
-0,097	-0,40	0,013	0,03
0,000	-0,35	0,010	0,02
0,079	-0,31	0,008	0,02
0,146	-0,271	0,007	0,019
0,204	-0,243	0,006	0,018
0,255	-0,215	0,006	0,016
0,301	-0,197	0,005	0,016

siendo la gráfica de la siguiente forma

Figura 3.6: Gráfica de la tabla 3.5



En este caso, la recta ajustada es de la forma

$$\log t = m' \log h + b'$$

y como la expresión teórica es

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} h^{1/2}$$

se debe cumplir que

$$m'_{teor} = \frac{1}{2} \quad ; \quad {b_{teor}}' = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{g}\right) \Rightarrow g = 2 \times 10^{-2b'_{toer}} \; (g \; en \; ms^{-2})$$

Aplicando las expresiones de mínimos cuadrados

$$m' = 0,501 \qquad \epsilon_{m'} = 0,018$$

$$b' = -0,346 \qquad \epsilon_{b'} = 0,004$$

por lo que, de nuevo, dentro del margen de error se comprueba la proporcionalidad entre t^2 y h. En cuanto a la aceleración de la gravedad

$$g = 2 \times 10^{-2b'} \; (g \; en \; ms^{-2}) = 9,841 \; ms^{-2}$$

$$\epsilon_g = \left|-4 \times 10^{-2b'} \times \ln 10\right| \epsilon_{b'} = 2g\epsilon_{b'} \ln 10 = 0,09 \; ms^{-2}$$

de forma que, redondeando

$$\boxed{g = 9,84 \pm 0,09 \; ms^{-2}}$$

Los resultados no coinciden exactamente. En el primer método, ya estábamos suponiendo que t^2 y h eran proporcionales, obteniéndose el valor de g consecuente con el ajuste. En este segundo método sólo estamos suponiendo la proporcionalidad de h con una potencia de t. El ajuste nos indica tanto la potencia como el valor de g. Es pues, evidente, que el segundo método es más general, puesto que inmediatamente confirma (o desmiente) si una magnitud es proporcional a una potencia *cualquiera* de otra.

Bibliografía.

- *Análisis de errores.*[1] Sánchez del Río, Carlos.
- *Experimentos caseros para un curso de Física General.* Yuste Llandres, Manuel
- *An introduction to error analysis : the study of uncertainties in physical measurements.* Taylor, John Robert

[1]Especialmente recomendable.